Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Вступительный экзамен по математике для поступающих в магистратуру по направлениям «Математика», «Математика и компьютерные науки», «Механика и математическое моделирование»

Вариант 12.08.2025 (4)

Задача 1. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдите определитель $(A^{-1})^7$.

Ответ: $\frac{-1}{128}$

Решение. Для подсчёта, конечно, не нужно искать обратную матрицу и возводить в степень — достаточно найти определитель A и возвести в нужную степень его.

Задача 2. Найдите интеграл

$$\int \frac{-4x}{x^4 - 1}\, dx.$$

Ответ:

$$-\ln|x^2 - 1| + \ln|x^2 + 1| + C$$

Решение. Нужно сделать замену $x^2 = t$ и разложить дроби под интегралом на простейшие. Разложение будет таким

$$\frac{1}{2}\left(\frac{-2}{t-1} + \frac{2}{t+1}\right).$$

От этих дробей берётся интеграл и получается ответ.

Задача 3. Даны уравнения сферы и плоскости. Среди векторов нормали к плоскости с концом на сфере найдите самый длинный.

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 25, \qquad 2x + 3y - 6z + 26 = 0.$$

Ответ: $\frac{8}{7} \cdot (2, 3, -6)$

Решение. Направление нормали к плоскости определяется коэффициентами уравнения плоскости. По уравнению сферы определяется её радиус и центр. Нужный нам вектор имеет длину, равную радиусу сферы плюс расстояние от центра сферы до плоскости. Остаётся вычислить расстояние от центра сферы до плоскости (для этого используется типовая формула), пронормировать вектор нормали и удлинить его в нужное число раз (предварительно умножив его на -1, если он смотрит не в то полупространство, где находится центр сферы). В общем виде:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2, \qquad Ax + By + Cz + D = 0.$$

(x_0, y_0, z_0) — центр сферы, R — её радиус, нормаль равна (A, B, C), а нормированная нормаль равна

$$\frac{(A, B, C)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Расстояние L от центра сферы до плоскости равно

$$L = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

(если число под модулем положительно, то вектор смотрел в ту полуплоскость, где находился центр сферы), а ответ в итоге равен

$$\frac{L+R}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}(A,B,C).$$

Задача 4. Найдите предел

$$\lim_{t\to 0}\left(1-4\sin(t^2)\right)^{\frac{1}{\sin(5t^2)}}$$

Ответ: $e^{\frac{-4}{5}}$

Решение.

$$\lim_{t\to 0}\left(1+A\sin(t^2)\right)^{\frac{1}{\sin(Bt^2)}}=\lim_{t\to 0}e^{\ln\left(1+A\sin(t^2)\right)\cdot\frac{1}{\sin(Bt^2)}}=\lim_{t\to 0}e^{\frac{A\sin t^2}{\sin Bt^2}}=e^{\frac{A}{B}}.$$

Задача 5. Дан многочлен $(z^6+1)(z^4+1)$. Сколько у него различных делителей вида $z^n+a_1z^{n-1}+a_2z^{n-2}+\ldots+a_n$, где произвольное натуральное $n\geqslant 1$, а все коэффициенты — действительные числа?

Ответ: 31

Решение. Так как коэффициент при старшей степени равен 1, многочлен (на комплексной плоскости) полностью определяется набором своих корней и их кратностями. Чтобы коэффициенты такого многочлена оказались действительными, нужно, чтобы его корни образовывали комплексно сопряжённые пары. Чтобы многочлен оказался делителем — нужно, чтобы корни делителя были выбраны из корней данного в условии многочлена.

Корни данного в условии многочлена легко изобразить на комплексной плоскости, использовав формулу Муавра (каждая скобка даёт по правильному многоугольнику). С учётом возможных наложений вершин, мы получаем шестиугольник и квадрат, действительных корней нет, пять однократных комплексно сопряжённых пар. Способов выбрать корни и получить многочлен как минимум первой степени $2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2-1=31$.

Задача 6. Если раскладывать функцию $y=x^x$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x=1$ — какие будут первые три члена этого разложения?

Ответ: $1+2(x-1)+\frac{5}{2}(x-1)^2$

Решение. x^x при $x=1$ равно 1. Первое слагаемое 1. $(x^x)'=(e^{x\ln x})'=(\ln x+1)x^x$, при $x=1$ получаем второе слагаемое $2(x-1)$. Дифференцируем ещё раз: $(x^x)''=((\ln x+1)x^x)'=\frac{1}{x}x^x+(\ln x+1)^2x^x$, и, следовательно, третье слагаемое равно $\frac{5}{2}(x-1)^2$.

Задача 7. В правильном 104-угольнике выбраны наугад три вершины. С какой вероятностью эти три вершины образуют равнобедренный треугольник?

Ответ: $\frac{3}{103}$

Решение. Напишем решение для N-угольника. Число способов выбрать в нём три вершины равно $C_N^3=\frac{N!}{3!(N-3)!}=\frac{1}{6}(N-2)(N-1)N$. Теперь отыщем, сколько из этих способов соответствуют равнобедренному треугольнику. Отметим, что N не делится на 3, поэтому получить равносторонний треугольник невозможно — их не рассматриваем. Равнобедренный треугольник задаётся положением его вершины (N вариантов) и расстоянием от вершины до основания ($\frac{N-1}{2}$ или $\frac{N-2}{2}$ варианта, в зависимости от чётности N). Всего $\frac{N(N-1)}{2}$ или $\frac{N(N-2)}{2}$. Остаётся поделить число равнобедренных треугольников на число треугольников вообще — получаем $\frac{3}{N-1}$ для чётного и $\frac{3}{N-2}$ для нечётного N.

Задача 8. Дано линейное дифференциальное уравнение, зависящее от параметров $\alpha \in \mathbb{R}$ и $n = 0, 1, 2, \ldots$.

$$y''' + 225y' = x^n \sin \alpha x$$

При каких значениях параметров α, n все решения этого дифференциального уравнения будут неограниченными?

Ответ: При $n > 0$ с любой α, и при $n = 0, \alpha = 15, -15$.

Решение. У однородного уравнения вида $y''' + \omega^2 y'$ общее решение имеет вид $C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x + C_3$. Любое общее решение получилось ограниченным. Частное решение неоднородного уравнения ищется в виде $P_n[x] \cos \alpha x + Q_n[x] \sin \alpha x$, если $\pm\alpha \neq \omega, 0$ — такое решение неограниченно из-за многочлена в его составе, если $n > 0$. Если $\alpha = \pm\omega$, то решение будет отыскиваться в виде $xP_n[x] \cos \alpha x + xQ_n[x] \sin \alpha x$, и в таком виде даже при нулевой степени n будет неограниченность. При $\alpha = 0$ (если только правая часть от этого не обратится в ноль) решение будет отыскиваться в виде $x \cdot P_n[x]$, что тоже неограниченная функция при любом n.