Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Вступительный экзамен по математике для поступающих в магистратуру по направлениям «Математика», «Математика и компьютерные науки», «Механика и математическое моделирование»

Вариант 12.08.2025 (4)

Задача 1. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдите определитель $(A^{-1})^7$.

Задача 2. Найдите интеграл

$$\int \frac{-4x}{x^4 - 1}\, dx.$$

Задача 3. Даны уравнения сферы и плоскости. Среди векторов нормали к плоскости с концом на сфере найдите самый длинный.

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 25, \qquad 2x + 3y - 6z + 26 = 0.$$

Задача 4. Найдите предел

$$\lim_{t \to 0} \left(1 - 4\sin(t^2)\right)^{\frac{1}{\sin(5t^2)}}$$

Задача 5. Дан многочлен $(z^6 + 1)(z^4 + 1)$. Сколько у него различных делителей вида $z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_n$, где произвольное натуральное $n \geqslant 1$, а все коэффициенты — действительные числа?

Задача 6. Если раскладывать функцию $y = x^x$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x = 1$ — какие будут первые три члена этого разложения?

Задача 7. В правильном 104-угольнике выбраны наугад три вершины. С какой вероятностью эти три вершины образуют равнобедренный треугольник?

Задача 8. Дано линейное дифференциальное уравнение, зависящее от параметров $\alpha \in \mathbb{R}$ и $n = 0, 1, 2, \ldots$.

$$y''' + 225y' = x^n \sin \alpha x$$

При каких значениях параметров α, n все решения этого дифференциального уравнения будут неограниченными?