Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

ВАРИАНТ 251

1. Известно, что $x : y = 9 : 7$. Найдите $\dfrac{x+y}{x-y}$.

2. Дана последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots$ действительных чисел, удовлетворяющих при каждом натуральном n равенству

$$a_{n+1} = \frac{5 - a_n}{4}.$$

Пусть S_n обозначает сумму первых n членов этой последовательности: $S_n = a_1 + \ldots + a_n$. Найдите наименьшее значение n, при котором выполняется неравенство

$$|S_n - n - 8| < \frac{1}{1000},$$

если известно, что $a_1 = 11$.

3. Решите неравенство

$$1 + \sqrt{\log_9(3x^2 + 8x + 6)} > \log_3(3x^2 + 8x + 6).$$

4. Решите уравнение $\sin 2x + 3\cos x = \sqrt{3}(1 + \cos 2x + \sin x)$.

5. В треугольнике ABC проведена медиана AD. Известно, что $AD : BC = \sqrt{3} : 2$ и что $\angle BAC = 45°$. Найдите угол $\angle BMC$, где M — точка пересечения медиан.

6. Положительные действительные числа a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 удовлетворяют равенству

$$a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3 = 3.$$

Найдите наименьшее возможное значение выражения

$$\frac{a_1^2}{a_1 + b_1} + \frac{a_2^2}{a_2 + b_2} + \frac{a_3^2}{a_3 + b_3}.$$

7. Дан тетраэдр $ABCD$. Рёбра AC и BD перпендикулярны прямой, проходящей через их середины. Найдите все возможные значения $AB + BC$, если известно, что $AD + DC = 1$.

Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

ВАРИАНТ 252

1. Известно, что $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{15}{x}$. Найдите наименьшее целое число, превосходящее $f\left(\dfrac{25}{16}\right)$.

2. Дана последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots$ действительных чисел, удовлетворяющих при каждом натуральном n равенству

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = 2a_n - 1.$$

Последовательность $b_1, b_2, b_3, \ldots$ определяется соотношениями $b_1 = 2$ и $b_{n+1} = b_n + a_n$, $n \in \mathbb{N}$. Найдите $b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{2025} - 2^{2025}$.

3. Решите неравенство

$$\log_{1/2}\left(\frac{2}{9^x - 1}\right) \leqslant \log_{1/2}\left(\frac{1}{3^x + 31}\right).$$

4. Решите уравнение $\sqrt{3}(\sin^2 x \operatorname{tg} x + \cos^2 x \operatorname{ctg} x) = 4 - \sqrt{3}\sin 2x$.

5. Окружности Ω_1 и Ω_2 находятся внутри окружности Ω, касаются окружности Ω в точках A и B соответственно и касаются друг друга внешним образом в точке C. Пусть O — центр окружности Ω и пусть D — точка пересечения прямой OC с отрезком AB. Найдите отношение $AD : DB$, если известно, что радиус окружности Ω в три раза больше радиуса окружности Ω_1 и в пять раз больше радиуса окружности Ω_2.

6. Последовательность действительных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2025}$ удовлетворяет неравенствам

$$2\sqrt{a_n - (n-1)} \geqslant a_{n+1} - (n-1)$$

при каждом $n = 1, 2, 3, \ldots, 2024$ и неравенству

$$2\sqrt{a_{2025} - 2024} \geqslant a_1 + 1.$$

Найдите все возможные значения a_{2025}.

7. Все три плоских угла при вершине D тетраэдра $ABCD$ равны α. Найдите α, если известно, что $AB = BC = AC$, $AD = 1$ и $BD = \sqrt{3} - 1$.

Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

ВАРИАНТ 253

1. Найдите наибольшее целое число, меньшее числа $\sqrt{7}+\sqrt{8}$.

2. Дана последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots$ действительных чисел, удовлетворяющих при каждом натуральном $n \geqslant 3$ равенству

$$a_n = (-1)^n \cdot 3 \cdot a_{n-1} + \frac{a_{n-1}^2}{a_{n-2}}.$$

Найдите $\sqrt[2024]{a_{2025}}$, если известно, что $a_1 = 1$ и $a_2 = 4$.

3. Решите неравенство

$$\sqrt{\log_2^2\left(x^{\sqrt{2}}\right) - 3\log_4 x^6 + 13} > \log_2\left(\frac{x}{2}\right).$$

4. Решите уравнение $\dfrac{1}{\cos^2 x} + \dfrac{12}{\sin^2 2x} + \dfrac{12}{\sin x \sin 2x} = \dfrac{3}{\sin^2 x}$.

5. На сторонах AB, BC, AC треугольника ABC отмечены точки D, E, F соответственно. На BD и на FC как на диаметрах построены окружности. Эти окружности касаются отрезка AE в одной и той же точке. Найдите DF, если известно, что $AB : AC = 2 : 3$, $BD : FC = 1 : 2$ и что $BC = 12$.

6. Положительные действительные числа $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_7$ удовлетворяют неравенствам

$$a_i + a_j \geqslant a_{i+j}$$

при всех натуральных i, j, таких что $i + j \leqslant 7$. Найдите наименьшее возможное значение выражения

$$\frac{a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \frac{a_4}{4} + \frac{a_5}{5} + \frac{a_6}{6} + \frac{a_7}{7}}{a_7}.$$

7. Радиус сферы, вписанной в правильную треугольную пирамиду, равен 1. Радиус окружности, вписанной в основание этой пирамиды, равен $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Найдите радиус сферы, описанной около этой пирамиды.

Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

ВАРИАНТ 254

1. Найдите в явном виде целое число, задающееся выражением $\left(\frac{1}{24}+\frac{1}{15}-\frac{1}{10}\right)^{-1}$.

2. Строго возрастающая последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots$ натуральных чисел удовлетворяет при каждом натуральном n соотношению

$$a_{n+2} \leqslant \sqrt{a_n^2 + 2a_n + 2a_{n+1} + 2}.$$

Найдите все возможные значения a_{25}, если известно, что $a_1 = 1$.

3. Решите неравенство

$$(2-2x)\cdot \log_{2\cdot 3^x-5}\sqrt{3} \leqslant 1.$$

4. Решите уравнение $\sin 3x(\cos x - \cos 2x) - \cos 3x(\sin x - \sin 2x) = 6\cos x - 3$.

5. Внутри окружности Ω радиуса 5 отмечена точка E, через которую проведены хорды AB и CD, перпендикулярные друг другу. Найдите все возможные значения расстояния от вершины F прямоугольника $AECF$ до центра O окружности Ω, если известно, что $OE = 1$.

6. Положительные действительные числа a, b, c удовлетворяют равенству $a+b+c=1$. Найдите наименьшее возможное значение выражения

$$\frac{\sqrt{(1-a)(1-b)}+\sqrt{(1-b)(1-c)}+\sqrt{(1-c)(1-a)}}{1+\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}}.$$

7. Дан куб с основаниями $ABCD$, $A'B'C'D'$ и боковыми рёбрами AA', BB', CC', DD'. Длина ребра этого куба равна 1. На диагонали AC основания $ABCD$ отмечена точка E так, что $AE = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$. Найдите площадь сечения данного куба, проходящего через его центр O и перпендикулярного прямой OE.

Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

ВАРИАНТ 255

1. Какое из следующих двух чисел больше: $\frac{4}{5}+\frac{2}{11}$ или $\frac{6}{7}+\frac{1}{8}$?

2. Положим для каждого натурального n

$$A_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} \qquad \text{и} \qquad B_n = A_1+A_2+A_3+\ldots+A_n.$$

Найдите $\dfrac{B_7+7}{A_7}$.

3. Решите неравенство $\left(\sqrt[3]{x}\right)^{5+\log_2 x} \geqslant 2^{1+\log_2 x}$.

4. Решите уравнение $\dfrac{(1-\operatorname{tg}^2 x)(1+\sin 2x)}{(1+\operatorname{tg}^2 x)(1-\sin 2x)} = 3+2\sin 2x-2\sin^2 x$.

5. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Найдите все возможные значения угла $\angle FEG$, где E, F и G — центры вписанных окружностей в треугольники ABC, BCD и ABD соответственно.

6. Положительные действительные числа a, b, c удовлетворяют равенству $a^2+b^2+c^2=12$. Найдите наибольшее возможное значение выражения

$$\sqrt{1+a^3}+\sqrt{1+b^3}+\sqrt{1+c^3}.$$

7. Дана четырёхугольная пирамида $ABCDS$ с высотой $SH=8$. Сфера радиуса 3 касается всех граней пирамиды, причём основания $ABCD$ эта сфера касается в точке H основания высоты. Найдите периметр четырёхугольника $ABCD$, если известно, что его площадь равна 144.

Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

ВАРИАНТ 256

1. Какое из следующих двух чисел больше: $\sqrt{\frac{20}{7}} + \frac{13}{3}$ или 6?

2. Положительные действительные числа a и b удовлетворяют равенствам

$$a^3 = a + 1 \qquad \text{и} \qquad b^6 = b + 3a.$$

Определите, какое из чисел a и b больше другого.

3. Решите неравенство $\log_{3/2} x^{3/2} + \log_{2/3} x^{2/3} \leqslant \frac{5}{6} \cdot x \cdot \log_6 x$.

4. Решите уравнение $\sin 2x - \cos 2x = \operatorname{tg} x$.

5. На сторонах AB и AC остроугольного треугольника ABC как на диаметрах построены окружности Ω_1 и Ω_2 соответственно. Через точку D пересечения этих окружностей (отличную от A) проведена прямая, пересекающая Ω_1 и Ω_2 в точках E и F соответственно, причём E и F лежат по одну сторону от AD (и отличны от D). Расстояние от A до середины M стороны BC равно 3, расстояние от A до середины N отрезка EF равно 2. Найдите MN.

6. Положительные действительные числа a, b, c удовлетворяют равенству $a+b+c = 3$. Найдите наибольшее возможное значение выражения

$$\frac{(1+a)^2}{a+\frac{1}{b}} + \frac{(1+b)^2}{b+\frac{1}{c}} + \frac{(1+c)^2}{c+\frac{1}{a}}.$$

7. Дан правильный тетраэдр $ABCD$ с ребром $2\sqrt{3}$. Найдите площадь сечения этого тетраэдра плоскостью, касающейся сферы, вписанной в тетраэдр, и параллельной рёбрам AB и CD.