Вступительный экзамен по математике
для поступающих в магистратуру
механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова
по направлениям «Математика», «Математика и компьютерные науки», «Механика и математическое моделирование»
2016 год

Вариант 2016-06-23

1. Вычислите предел
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^2+3^2+\ldots+(2n-1)^2}{2^2+4^2+\ldots+(2n)^2}.$$

2. Постройте график функции $y = \dfrac{x^4}{(1+x)^3}$.
Для построения графика необходимо 1) определить область существования этой функции и исследовать поведение функции в граничных точках области существования функции, 2) выяснить симметрию графика и периодичность, 3) найти точки разрыва функции и промежутки непрерывности, 4) определить нули функции и области постоянства знака, 5) найти точки экстремума и выяснить промежутки возрастания и убывания функции, 6) определить точки перегиба и установить промежутки вогнутости определенного знака графика функции, 7) найти асимптоты в случае существования таковых.

3. Изобразите множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих системе
$$\begin{cases} |z-1-i| & \leqslant & |z+1+i|, \\ |z-3i| & \leqslant & \sqrt{5}, \end{cases}$$
где z – комплексная переменная, i – мнимая единица.

4. Вычислите определенный интеграл:
$$\int_0^{2\pi} x^2 \cos x \, dx.$$
Указание: примените формулу интегрирования по частям.

5. Найдите координаты центра и радиус сферы
$$x^2+y^2+z^2-12x+4y-6z=0.$$

6. Решите дифференциальное уравнение
$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 4xe^x.$$

7. Найдите наибольшее значение функции $f(x) = \sqrt{5-2x} - \sqrt{1-2x}$.

8. Семья, состоящая из четырех человек: папа, мама, ребенок и бабушка, подошла ночью к мосту через ущелье. У них есть один фонарик, и передвигаться по мосту без фонарика нельзя. Папа может пройти мост за 1 минуту, мама – за 2 минуты, ребенок – за 5 минут и бабушка – за 10 минут. Мост может выдержать только двоих человек одновременно. Когда двое идут по мосту, они идут с минимальной из их скоростей. Перебрасывать фонарик через ущелье нельзя, также нельзя брать на руки другого члена семьи. Сможет ли семья перейти мост за 17 минут?

Вступительный экзамен по математике
для поступающих в магистратуру
механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова
по направлениям «Математика», «Математика и компьютерные науки»,
«Механика и математическое моделирование»
2016 год

Вариант 2016-07-12-1

1. Исследуйте на сходимость последовательность

$$x_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \ldots + \frac{\sin n}{2^n}.$$

2. Постройте фазовый портрет системы, описываемой уравнением $\ddot{x} - x = 1$.

3. Множество точек комплексной плоскости удовлетворяет условию $|z - 3 - 4i| \leqslant 1$, где z – комплексная переменная, i – мнимая единица. В каких пределах может изменяться отношение $\dfrac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}$?

4. Вычислите неопределенный интеграл:

$$\int \frac{x^3 + x}{(x^2 + 2x + 2)^2}\, dx.$$

Указание: примените метод неопределенных коэффициентов.

5. Определите геометрическое место хорд сферы

$$(x-1)^2 + (y-4)^2 + (z+1)^2 = 25,$$

делящихся точкой $M(3, 5, 1)$ пополам.

6. Найдите все значения параметра q, при которых векторы

$$\bar{a}_1 = (2+q,\, 2,\, -6); \quad \bar{a}_2 = (3,\, 1,\, -3); \quad \bar{a}_3 = (1,\, 2,\, 2+q)$$

линейно независимы.

7. В шар радиуса R вписан цилиндр максимального объема. Найдите этот объём.

8. Решите уравнение

$$x^2 + y^2 = 3z^2$$

в целых числах.

Вступительный экзамен по математике
для поступающих в магистратуру
механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова
по направлениям «Математика», «Математика и компьютерные науки»,
«Механика и математическое моделирование»
2016 год

Вариант 2016-07-12-2

1. Исследуйте на сходимость последовательность

$$x_n = \frac{\cos 1!}{1 \cdot 2} + \frac{\cos 2!}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{\cos n!}{n \cdot (n+1)}.$$

2. Постройте фазовый портрет системы, описываемой уравнением $\ddot{x} - \dot{x} = 1$.

3. Множество точек комплексной плоскости удовлетворяет условию $|z - 3 + 2i| \leqslant 1$, где z – комплексная переменная, i – мнимая единица. В каких пределах может изменяться отношение $\dfrac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}$?

4. Вычислите неопределенный интеграл:

$$\int \frac{3x+1}{(x+3)^2(x-5)}\,dx.$$

Указание: примените метод неопределенных коэффициентов.

5. На прямой, проходящей через начало координат и точку $(1, 1, 1)$, найдите такую точку, касательные из которой к сферам

$$(x-2)^2 + (y-5)^2 + z^2 = 1,$$

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 + (z-6)^2 = 2$$

равны.

6. Найдите все значения параметра q, при которых векторы

$$\bar{a}_1 = (3+q,\, 3,\, -6); \quad \bar{a}_2 = (3,\, 1,\, -2); \quad \bar{a}_3 = (2,\, 1,\, 2+q);$$

линейно независимы.

7. В шар радиуса R вписан цилиндр с максимальной площадью полной поверхности. Найдите эту площадь.

8. Решите уравнение

$$x^2 + y^2 + x^2 = x^2 y^2$$

в целых числах.

Вступительный экзамен по математике
для поступающих в магистратуру
механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова
по направлениям «Математика», «Математика и компьютерные науки»,
«Механика и математическое моделирование»
2016 год

Вариант 2016-08-11

1. Найдите область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx - \cos(n+1)x}{n}.$$

2. При каких a и b все решения дифференциального уравнения $y'' + ay' + by = 0$ удовлетворяют соотношению $y = o(e^{-x})$ при $x \to +\infty$?

3. Множество K всех точек z_1 комплексной плоскости задается условием

$$| - z_1 i - 2i\sqrt{2}| = 1,$$

где i – мнимая единица. L – множество всех точек z_2, имеющих вид $z_2 = -z_1 i$. Найдите расстояние между множествами K и L.

4. Вычислите площадь находящейся в первом квадранте плоской фигуры, ограниченной линиями

$$y = 4 - x^2, \quad y = 3x, \quad y = 0.$$

5. Составьте уравнение сферы, проходящей через окружность

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2 = 49, \quad 2x + 2y - z + 4 = 0$$

и начало координат.

6. Вычислите ранг матрицы Q для всех значений параметра q

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 & q+1 \\ 1 & q & 1 & 2 \\ 1 & 5 & q & 0 \end{pmatrix}.$$

7. В гладкую чашу, имеющую форму полусферы радиуса r, опущен тонкий стержень длины $L > 2r$. Найдите положение равновесия стержня.

8. Существуют ли значения $n \in \mathbb{N}$, при котором числа

$$2^{n+1} - 1 \quad \text{и} \quad 2^{n-1}(2^n - 1)$$

одновременно являются кубами целых чисел?

Вступительный экзамен по математике
для поступающих в магистратуру
механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова
по направлениям «Математика», «Математика и компьютерные науки»,
«Механика и математическое моделирование»
2016 год

Вариант 2016-08-13

1. Найдите область сходимости и сумму ряда

$$x - 4x^2 + 9x^3 - 16x^4 + \dots .$$

2. Для заданного $b > 0$ найдите такое a, при котором решение уравнения $y''+ay'+by = 0$ с начальными условиями $y(0) = 1$ и $y'(0) = 0$ возможно быстрее стремится к нулю при $x \to +\infty$.

3. Множество K всех точек z_1 комплексной плоскости задается условием

$$|z_1 i + i\sqrt{2}| = \frac{1}{2},$$

где i – мнимая единица. L – множество всех точек z_2, имеющих вид $z_2 = z_1 i - i\sqrt{2}$. Найдите расстояние между множествами K и L.

4. Вычислите площадь плоской фигуры, ограниченной графиками функций

$$y = 12 + 6x - x^2, \quad y = x^2 - 2x + 2.$$

5. Составьте уравнение сферы, проходящей через окружность

$$x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 6y + 2z - 5 = 0, \quad x - 2y - 2z + 1 = 0$$

и касающейся плоскости $2x + 2y + z - 7 = 0$.

6. Вычислите ранг матрицы Q для всех значений параметра q

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & q+1 \\ 2 & -q & -2 & -2 \\ -2 & 2 & q & 4 \end{pmatrix}.$$

7. Какой сектор следует вырезать из круга радиуса R, чтобы из оставшейся части можно было свернуть воронку наибольшей вместимости?

8. Решите уравнение

$$x(x+1)(x+7)(x+8) = y^2$$

в целых числах.