Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

июль 2014 года

1. Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением $\sqrt{7-4\sqrt{3}}\left(8+4\sqrt{3}\right)$.

2. Найдите максимальное значение функции $\log_{1/2}(x^2-6x+17)$.

3. Найдите все положительные x, удовлетворяющие неравенству $x^{3x+7} > x^{12}$.

4. Решите уравнение $\cos^2 x - \cos x \sin^2\left(\frac{5x}{4}-\frac{5\pi}{12}\right)+\frac{1}{4}=0$.

5. Окружности Ω_1 и Ω_2 с центрами в точках O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке A. Общая внешняя касательная к этим окружностям касается Ω_1 и Ω_2 соответственно в точках B_1 и B_2. Общая касательная к окружностям, проходящая через точку A, пересекает отрезок B_1B_2 в точке C. Прямая, делящая угол ACO_2 пополам, пересекает прямые O_1B_1, O_1O_2, O_2B_2 в точках D_1, L, D_2 соответственно. Найдите отношение $LD_2 : O_2D_2$, если известно, что $CD_1 = CO_1$.

6. Найдите все положительные x, y, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} x^{3/2}+y=16 \\ x+y^{2/3}=8 \end{cases}$$

7. В основании прямой призмы лежит правильный треугольник со стороной 1. Высота призмы равна $\sqrt{2}$. Найдите расстояние между скрещивающимися диагоналями боковых граней.

8. Пусть

$$f(x,y)=\sqrt{-6x^2-14y^2-18xy+6}+y,$$
$$g(x,y)=-\sqrt{-6x^2-14y^2-18xy+6}+y.$$

Найдите все значения, которые может принимать хотя бы одна из этих функций.

Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

июль 2014 года

1. Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением $\sqrt{5-2\sqrt{6}}\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$.

2. Найдите максимальное значение функции $\log_{1/3}(x^2+4x+31)$.

3. Найдите все положительные x, удовлетворяющие неравенству $x^{-5x-3} < x^{-7}$.

4. Решите уравнение $\sin^2 x + \sqrt{2}\,|\sin x|\cos\left(\frac{5x}{2}-\frac{5\pi}{8}\right)+\frac{1}{2}=0$.

5. Окружности Ω_1 и Ω_2 с центрами в точках O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке A. Общая внешняя касательная к этим окружностям касается Ω_1 в точке B и пересекает в точке C общую касательную этих окружностей, проходящую через точку A. Прямая, делящая угол ACO_1 пополам, пересекает прямые O_1O_2 и BO_1 в точках L и D соответственно. Найдите CO_2, если известно, что $LO_1 = 2$, а прямые CO_2 и DO_2 перпендикулярны.

6. Найдите все x, y на интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\cos^3 x}+\dfrac{1}{\sin^3 y}=16 \\ \operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 y=6 \end{cases}$$

7. В основании прямой призмы лежит квадрат со стороной 1. Высота призмы равна $\sqrt{7}$. Найдите расстояние между большой диагональю призмы и скрещивающейся с ней диагональю боковой грани.

8. Пусть

$$f(x,y)=\sqrt{-5x^2-13y^2-16xy+2}+y,$$
$$g(x,y)=-\sqrt{-5x^2-13y^2-16xy+2}+y.$$

Найдите все значения, которые может принимать хотя бы одна из этих функций.

Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

июль 2014 года

1. Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением $\sqrt{7+2\sqrt{10}}\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)$.

2. Найдите максимальное значение функции $\log_{1/3}(x^2+10x+34)$.

3. Найдите все положительные x, удовлетворяющие неравенству $x^{-7x+5} < x^{-4}$.

4. Решите уравнение $\cos^2 x + \sqrt{2}\,|\cos x| \sin\left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) + \frac{1}{2} = 0$.

5. Окружности Ω_1 и Ω_2 с центрами в точках O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке A. Общая внешняя касательная к этим окружностям касается Ω_1 в точке B и пересекает в точке C общую касательную этих окружностей, проходящую через точку A. Прямая, делящая угол ACO_1 пополам, пересекает прямые O_1O_2 и BO_1 в точках L и D соответственно. Найдите LO_1, если известно, что $CO_2 = 2$, а прямые CO_2 и DO_2 перпендикулярны.

6. Найдите все x, y на интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sin^3 x} + \dfrac{1}{\cos^3 y} = 54 \\ \operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{tg}^2 y = 16 \end{cases}$$

7. В основании прямой призмы лежит квадрат со стороной 1. Высота призмы равна $\sqrt{3}$. Найдите расстояние между большой диагональю призмы и скрещивающейся с ней диагональю боковой грани.

8. Пусть

$$f(x,y) = \sqrt{-6x^2 - 11y^2 - 16xy + 5} + y,$$
$$g(x,y) = -\sqrt{-6x^2 - 11y^2 - 16xy + 5} + y.$$

Найдите все значения, которые может принимать хотя бы одна из этих функций.