Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

июль 2013 года

1. Старший коэффициент квадратного трехчлена $f(x)$ равен 2. Один из его корней равен $5/2$. Найдите второй корень, если известно, что $f(0) = 3$.

2. Вычислите $\log_5 27 \cdot \log_9 5$.

3. Решите неравенство

$$12\left(3 + 3^{-2x}\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(3^{1+2x} + 1\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant 4 \cdot 3^{\frac{x}{2}}.$$

4. Решите уравнение

$$\frac{\cos 3x}{\sin 2x} + \frac{\sin 3x}{\cos 2x} = \frac{\sin 2x}{\cos 3x} + \frac{\cos 2x}{\sin 3x}.$$

5. В $14:00$ из села Верхнее вниз по течению реки в сторону села Нижнее отправился катер "Быстрый". Когда до Нижнего оставалось плыть 500 метров, ему навстречу из Нижнего вышел катер "Смелый". В этот же самый момент "Быстрый", не желая встречи со "Смелым", развернулся и пошел обратно к Верхнему. В $14:14$, когда расстояние по реке от "Быстрого" до Верхнего сравнялось с расстоянием по реке от "Смелого" до "Быстрого", на "Смелом" осознали, что они идут с "Быстрым" на одинаковой скорости, развернулись и направились обратно к Нижнему. В исходные пункты катера вернулись одновременно в $14:18$. Найдите расстояние по реке между Верхним и Нижним, если известно, что оба катера движутся равномерно и с одинаковой собственной скоростью.

6. Трапеция $KLMN$ вписана в окружность радиуса R и описана около окружности радиуса r. Найдите r, если $R = 20$, а косинус угла между диагональю KM и основанием KN равен $4/5$.

7. В основании прямой призмы $ABCA'B'C'$ лежит прямоугольный треугольник ABC, такой что $AC = BC = 1$. На ребре $A'C'$ верхнего основания (параллельном AC) отмечена точка D, так что $A'D : DC' = 2 : 1$. Найдите радиус сферы, вписанной в тетраэдр $AB'CD$, если высота призмы равна 1.

8. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\cos\left(x + a\ln|x|\right) = x - 1$$

имеет бесконечно много решений.

Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

июль 2013 года

1. Старший коэффициент квадратного трехчлена $f(x)$ равен -3. Один из его корней равен $7/3$. Найдите второй корень, если известно, что $f(0) = 4$.

2. Вычислите $\log_8 10 \cdot \log_{10} 4$.

3. Решите неравенство

$$\frac{9}{2}\left(1 + 2^{1-2x}\right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\left(2^{2x} + 2\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant 3^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{x}{2}}.$$

4. Решите уравнение

$$\frac{\sin 5x}{\sin x} - \frac{\cos 5x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\sin 5x} - \frac{\cos x}{\cos 5x}.$$

5. От биостанции до границы заповедника вниз по реке ровно 8 км. В $8:00$ браконьеры вошли на катере в заповедник и направились в сторону биостанции. В это же время им навстречу с биостанции вышел катер с рыбинспекторами. Через 6 минут, когда рыбинспекторы были ровно посередине между биостанцией и браконьерами, браконьеры заметили катер рыбинспекции, тут же развернулись и направились обратно к границе заповедника. Когда браконьеры достигли границы, рыбинспекторы с чувством выполненного долга развернулись и отправились обратно на биостанцию, куда прибыли в $08:25$. Найдите наименьшее расстояние, на котором находились браконьеры от рыбинспекторов, если известно, что оба катера движутся равномерно и с одинаковой собственной скоростью.

6. Трапеция $KLMN$ вписана в окружность радиуса R и описана около окружности радиуса r. Найдите r, если $R = 20$, а косинус угла между диагональю KM и основанием KN равен $4/5$.

7. В основании прямой призмы $ABCA'B'C'$ лежит прямоугольный треугольник ABC, такой что $AC = BC = 1$. На ребре $A'B'$ верхнего основания (параллельном AB) отмечена точка D, так что $A'D : DB' = 1 : 2$. Найдите радиус сферы, вписанной в тетраэдр $ABC'D$, если высота призмы равна 1.

8. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\sin\left(x - a\ln|x|\right) = x + 1$$

имеет бесконечно много решений.

Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

июль 2013 года

1. Старший коэффициент квадратного трехчлена $f(x)$ равен -2. Один из его корней равен $3/2$. Найдите второй корень, если известно, что $f(0) = 1$.

2. Вычислите $\log_{12} 3 \cdot \log_9 12$.

3. Решите неравенство

$$12\left(3 + 3^{-2x}\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(3^{1+2x} + 1\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant 4 \cdot 3^{\frac{x}{2}}.$$

4. Решите уравнение

$$\frac{\cos 3x}{\sin 2x} + \frac{\sin 3x}{\cos 2x} = \frac{\sin 2x}{\cos 3x} + \frac{\cos 2x}{\sin 3x}.$$

5. В $14:00$ из села Верхнее вниз по течению реки в сторону села Нижнее отправился катер "Быстрый". Когда до Нижнего оставалось плыть 500 метров, ему навстречу из Нижнего вышел катер "Смелый". В этот же самый момент "Быстрый", не желая встречи со "Смелым", развернулся и пошел обратно к Верхнему. В $14:14$, когда расстояние по реке от "Быстрого" до Верхнего сравнялось с расстоянием по реке от "Смелого" до "Быстрого", на "Смелом" осознали, что они идут с "Быстрым" на одинаковой скорости, развернулись и направились обратно к Нижнему. В исходные пункты катера вернулись одновременно в $14:18$. Найдите расстояние по реке между Верхним и Нижним, если известно, что оба катера движутся равномерно и с одинаковой собственной скоростью.

6. Трапеция $ABCD$ вписана в окружность радиуса R и описана около окружности радиуса r, причем $R = 2r$. Найдите среднюю линию трапеции, если диагональ AC равна 4.

7. В основании прямой призмы $KLMK'L'M'$ лежит прямоугольный треугольник KLM, такой что $KM = LM = 1$. На ребре $K'M'$ верхнего основания (параллельном KM) отмечена точка N, так что $K'N : NM' = 3 : 1$. Найдите радиус сферы, вписанной в тетраэдр $KL'MN$, если высота призмы равна 1.

8. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\cos\left(x - \frac{a}{x}\right) = x - 1$$

имеет бесконечно много решений.

Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

июль 2013 года

1. Старший коэффициент квадратного трехчлена $f(x)$ равен 2. Один из его корней равен $5/2$. Найдите второй корень, если известно, что $f(0) = 3$.

2. Вычислите $\log_{16} 6 \cdot \log_6 8$.

3. Решите неравенство

$$15\left(4 + 4^{-2x}\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(4^{1+2x} + 1\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant 20^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{\frac{x}{2}}.$$

4. Решите уравнение

$$\frac{\sin 3x}{\sin x} + \frac{\cos 3x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\sin 3x} + \frac{\cos x}{\cos 3x}.$$

5. От биостанции до границы заповедника вверх по реке ровно 14 км. В $7:00$ браконьеры вошли на катере в заповедник и направились в сторону биостанции. Через некоторое время им навстречу с биостанции вышел катер рыбинспекции. Браконьеры тут же развернулись и направились обратно к границе заповедника. В $7:38$, когда браконьеры оказались ровно посередине между рыбинспекторами и границей, рыбинспекторы осознали, что они идут с браконьерами на одинаковой скорости, развернулись и направились обратно на биостанцию. До биостанции они добрались ровно в тот момент, когда браконьеры выехали за пределы заповедника — в $7:50$. Найдите наименьшее расстояние, на котором находились браконьеры и рыбинспекторы, если известно, что оба катера движутся равномерно и с одинаковой собственной скоростью.

6. Трапеция $KLMN$ вписана в окружность радиуса R и описана около окружности радиуса r, причем $R = \frac{3}{2}r$. Найдите среднюю линию трапеции, если диагональ KM равна 3.

7. В основании прямой призмы $KLMK'L'M'$ лежит прямоугольный треугольник KLM, такой что $KM = LM = 1$. На ребре $K'L'$ верхнего основания (параллельном KL) отмечена точка N, так что $K'N : NL' = 1 : 3$. Найдите радиус сферы, вписанной в тетраэдр $KLM'N$, если высота призмы равна 1.

8. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\sin\left(x + \frac{a}{x}\right) = x + 1$$

имеет бесконечно много решений.