Вступительный экзамен по математике для поступающих в магистратуру МГУ имени М. В. Ломоносова по направлениям «Математика», «Математика и компьютерные науки», «Механика и математическое моделирование»

2024 год

Вариант 2024-06-26

1. Вычислите предел
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x} - 1 + x - x^2}{x^2}.$$

2. Вычислите интеграл $\int x \sin^3 x^2 \cos^2 x^2 \, dx$.

3. Решите дифференциальное уравнение
$$xy' = \frac{y}{x+1} + x.$$

4. Вычислите производную функции
$$f(x) = (\sin(\sin x))^{\sin x}.$$

5. N точек расположены в вершинах выпуклого N-угольника. Все точки в случайном порядке соединены ломаной из $(N-1)$-го звена. С какой вероятностью у ломаной не будет самопересечений?

6. Найдите пересечение решений систем
$$\begin{cases} x + 2y + 3w = -1, \\ 3x + 13y + 7z + 9w = -17 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2y + 2z + w = -3 \\ 2x + 6y + 2z + 6w = -6. \end{cases}$$

7. Через точку $(0,0,0)$ проходят три прямые: $x/2 = y/2 = z/1$, $x/-6 = y/-2 = z/3$, $x/4 = y/7 = z/-7$. На одной из прямых откладываем от нуля расстояние 5, на другой — расстояние 7, и на оставшейся — расстояние 8. Отмеченные на прямых точки, вместе с точкой $(0,0,0)$, образуют тетраэдр.

   Какие могут получиться объёмы у такого тетраэдра?

8. Даны три уравнения на комплексной плоскости:
$$\begin{cases} |z| = 1, \\ \left|z - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = 1, \\ \left|z + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = 1. \end{cases}$$

   Пусть z_l — корни, подходящие под два уравнения из трёх, $l = 1, 2, \ldots, n$.

   Чему равно n? Сколько чисел вида $z = z_1^{k_1} z_2^{k_2} \ldots z_n^{k_n}$ находятся в области
$$\{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}\ z| \leqslant 2, |\mathrm{Im}\ z| \leqslant 4\}$$
   где k_l — целые неотрицательные степени? В ответе укажите оба количества.