Вступительный экзамен по математике для поступающих в магистратуру МГУ имени М. В. Ломоносова по направлениям «Математика», «Математика и компьютерные науки», «Механика и математическое моделирование»
2024 год

Вариант 2024-07-23

1. Вычислите предел
$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_2(8+4x^2)-3-\frac{x^2}{2\ln 2}}{x^4}.$$

Ответ: $-\frac{1}{8\ln 2}$

Решение: Воспользуемся разложением в ряд Тейлора для логарифма, для чего сначала используем его свойства и формулу для смены основания:
$$\log_2(8+4x^2)=\log_2 8\left(1+\frac{x^2}{2}\right)=\log_2 8+\log_2\left(1+\frac{x^2}{2}\right)=3+\frac{1}{\ln 2}\ln\left(1+\frac{x^2}{2}\right)=$$
$$=3+\frac{x^2}{2\ln 2}-\frac{x^4}{8\ln 2}+o(x^4).$$

Значит,
$$\frac{\log_2(8+4x^2)-3-\frac{x^2}{2\ln 2}}{x^4}=\frac{3-3+\frac{x^2}{2\ln 2}-\frac{x^2}{2\ln 2}-\frac{x^4}{8\ln 2}+o(x^4)}{x^4}=-\frac{1}{8\ln 2}+o(1).$$

Отсюда получается ответ.

2. Найдите объём тела, полученного вращением графика функции $y=\cos x-1$ (при $x\in[0,2\pi]$) относительно оси $0x$.

Ответ: $3\pi^2$

Решение: Площадь круглого поперечного сечения в точке x равна $\pi(\cos x-1)^2$. Остаётся проинтегрировать эту функцию от $x=0$ до $x=2\pi$:
$$\int_0^{2\pi}\pi(\cos x-1)^2\,dx=\pi\int_0^{2\pi}\left(\cos^2 x-2\cos x+1\right)\,dx=$$
$$=\pi\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}-2\cos x+1\right)\,dx=\pi\left(\frac{\sin 2x}{4}-2\sin x+\frac{3}{2}x\right)\Big|_0^{2\pi}=3\pi^2.$$

3. Найдите производную функции $y=\log_{\sin x}\operatorname{tg} x$.

Ответ:
$$y'=\frac{\operatorname{tg} x\ln\sin x+\operatorname{ctg} x\ln\cos x}{\ln^2\sin x}$$

Решение:
$$y'=(\log_{\sin x}\operatorname{tg} x)'=\left(\frac{\ln(\operatorname{tg} x)}{\ln(\sin x)}\right)'=\left(\frac{\ln\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)}{\ln(\sin x)}\right)'=\left(1-\frac{\ln\cos x}{\ln\sin x}\right)'=$$

$$= -\frac{-\frac{\sin x}{\cos x}\ln\sin x - \frac{\cos x}{\sin x}\ln\cos x}{\ln^2\sin x} = \frac{\operatorname{tg} x\ln\sin x + \operatorname{ctg} x\ln\cos x}{\ln^2\sin x}$$

4. Решите дифференциальное уравнение

$$y' = y(1-y)(1+y).$$

Ответ:

$$y = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{1 + C\cdot e^2 x}}, \qquad y = \pm 1.$$

Решение: Разделим переменные:

$$\frac{dy}{y(1-y)(1+y)} = dx.$$

Чтобы взять интеграл слева — разложим дробь на простейшие.

$$\frac{1}{y(1-y)(1+y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{1-y} + \frac{C}{1+y} = \frac{A(1-y)(1+y) + By(1+y) + Cy(1-y)}{y(1-y)(1+y)} =$$

$$= \frac{A + (B+C)y + (-A+B-C)y^2}{y(1-y)(1+y)}.$$

То есть, $A = 1, B + C = 0, -A + B - C = 0$, откуда $B = 0.5, C = -0.5, A = 1$.

Берём интегралы от элементарных дробей, получаем решение (к нему добавляем решения $y = 0, y = 1, y = -1$, потерянные при делении):

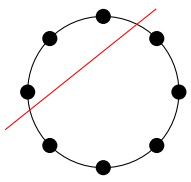
$$\ln|y| - 0.5\ln|1-y| - 0.5\ln|1+y| = x + C.$$

Выражаем y через x :

$$\frac{y}{\sqrt{1-y^2}} = C\cdot e^x, \qquad y = \pm 1.$$

$$y = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{1 + C\cdot e^2 x}}, \qquad y = \pm 1.$$

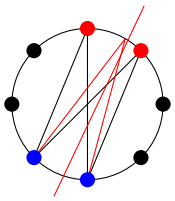
5. На плоскости есть окружность. На окружности расположено 8 точек-«бусин», образующих вершины правильного восьмиугольника. Случайным образом проводится разрез — выбирается случайная точка на окружности (НЕ обязательно бусина), потом выбирается случайное направление, и проводится прямая. Такая прямая разрежет окружность на две дуги. С какой вероятностью на получившихся дугах бусин будет поровну?



Ответ: $\frac{1}{8}$

Решение: Случайно выбранная точка в любом случае окажется между какими-нибудь двумя бусинами — обозначим их красным. Чтобы разрез разделил бусины

поровну, нужно, чтобы прямая (выходящая из случайной точки на дуге с красными концами) прошла между бусинами, которые мы обозначили синим.



Вероятность определится величиной угла, который опирается на синюю хорду. Вписанные в окружность углы, опирающиеся на одну и ту же хорду, одинаковы по величине, поэтому от точного расположения начала разреза на красной хорде вероятность зависеть не будет. Осталось найти величину угла, опирающегося на синюю хорду.

Проведём из красной точки прямые ко всем остальным. Получится 6 одинаковых углов (так как опираются они на 6 отрезков одинаковой длины), и в сумме они составляют угол правильного восьмиугольника, равный $135°$. Тогда на синюю хорду опирается угол в $\frac{135^\circ}{6} = 22.5°$, то есть вероятность, что прямая разреза окажется внутри этого угла, составит $\frac{\pi}{8\pi} = \frac{1}{8}$.

6. Решите линейную систему в комплексных числах ($x, y, z \in \mathbb{C}$):

$$\begin{pmatrix} 2+i & i & 2+i \\ 2 & 1 & 2+2i \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+4i \\ 6+6i \\ -3+i \end{pmatrix}$$

Ответ: $x = 3 - i;\ y = 4i;\ z = 1 + i$.

Решение: Комплексность — не преграда методу Гаусса. Приводя систему к диагональному виду, мы получим ответ $x = 3 - i;\ y = 4i;\ z = 1 + i$.

7. В пространстве задан плоский четырёхугольник $ABCD$ с вершинами $A = (0, 0, 0), B = (2, 3, 1), C = (-2, 5, -5), D = (-2, 1, -3)$. Копию этого четырёхугольника параллельно сдвигают на вектор $v = (1, 1, 7)$ и обозначают $A_1B_1C_1D_1$. Найдите объём получившейся призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Ответ: 75

Решение: Эта фигура не параллелопипед, но если мы разобъём призму на две призмы с треугольными основаниями — мы сможем воспользоваться формулами для определителя (если вектора a, b задают две стороны треугольного основания, а c — боковое ребро, то объём такой призмы можно найти, поделив смешанное произведение векторов (определитель) пополам, т.к. определитель даёт площадь параллелопипеда, а у треугольной призмы основание вдвое меньше.) Итак, ищем объёмы призм $ABCA_1B_1C_1$ и $ACDA_1C_1D_1$.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 5 & -5 \\ 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 100, \qquad \begin{vmatrix} -2 & 5 & -5 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 50, \qquad V = \frac{100 + 50}{2} = 75.$$

8. Есть 30 карточек с числами от 1 до 30. Наугад выбираются три. С какой вероятностью из них можно будет сложить верное выражение вида $\square + \square = \square$, где квадрат обозначает место под карточку? Карточки можно ставить в любом порядке.

   Ответ:
   $$\frac{3}{58}$$

   Решение: Всего способов выбрать три карточки будет $(30 \cdot 29 \cdot 28)/6$. Нужно найти, сколько карточек позволят составить пример со сложением.

   Пусть наугад попались числа $a < b < c$. В таком случае $c = a+b$, то есть c однозначно определяется упорядоченной парой a, b. Ограничивает нас только то, что $a + b \leqslant 30$. Значит, нужно найти число пар (a, b) таких, что $a < b$, $a \in [1, 30], b \in [1, 30], a+b \leqslant 30$.

   Представим квадрат 30 клеток на 30 клеток. В нём будет 900 клеточек, каждая из которых обозначает неупорядоченную пару. Одна диагональ квадрата (30 клеток) будет соответствовать случаю, когда $a = b$ — такие примеры надо исключить, и рассматривать только один из «треугольников», где $a < b$. Другая же диагональ квадрата будет соответствовать случаю, когда $a + b = 31$ — нам нужны случаи, которые лежат по нужную сторону от этой диагонали. Так как сторона квадрата составляет чётное число клеток, эти клетчатые диагонали «не пересекутся» — общих клеток они иметь не будут. Всего нам подойдёт «одна четверть» квадрата, а точнее:
   $$\frac{900 - 30 - 30}{4} = 210.$$

   Вероятность будет равна отношению числа подходящих наборов ко всем возможным:
   $$\frac{210 \cdot 6}{30 \cdot 29 \cdot 28} = \frac{3}{58}.$$