Вступительный экзамен по математике для поступающих в магистратуру МГУ имени М. В. Ломоносова по направлениям «Математика», «Математика и компьютерные науки», «Механика и математическое моделирование»
2024 год

Вариант 2024-07-23

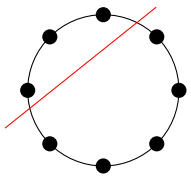
1. Вычислите предел
$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_2(8+4x^2) - 3 - \frac{x^2}{2\ln 2}}{x^4}.$$

2. Найдите объём тела, полученного вращением графика функции $y = \cos x - 1$ (при $x \in [0, 2\pi]$) относительно оси $0x$.

3. Найдите производную функции $y = \log_{\sin x} \operatorname{tg} x$.

4. Решите дифференциальное уравнение
$$y' = y(1-y)(1+y).$$

5. На плоскости есть окружность. На окружности расположено 8 точек-«бусин», образующих вершины правильного восьмиугольника. Случайным образом проводится разрез — выбирается случайная точка на окружности (НЕ обязательно бусина), потом выбирается случайное направление, и проводится прямая. Такая прямая разрежет окружность на две дуги. С какой вероятностью на получившихся дугах бусин будет поровну?



6. Решите линейную систему в комплексных числах ($x, y, z \in \mathbb{C}$):
$$\begin{pmatrix} 2+i & i & 2+i \\ 2 & 1 & 2+2i \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+4i \\ 6+6i \\ -3+i \end{pmatrix}$$

7. В пространстве задан плоский четырёхугольник $ABCD$ с вершинами $A = (0,0,0), B = (2,3,1), C = (-2,5,-5), D = (-2,1,-3)$. Копию этого четырёхугольника параллельно сдвигают на вектор $v = (1,1,7)$ и обозначают $A_1B_1C_1D_1$. Найдите объём получившейся призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

8. Есть 30 карточек с числами от 1 до 30. Наугад выбираются три. С какой вероятностью из них можно будет сложить верное выражение вида $\square + \square = \square$, где квадрат обозначает место под карточку? Карточки можно ставить в любом порядке.