Вступительный экзамен по математике для поступающих в магистратуру МГУ имени М. В. Ломоносова по направлениям «Математика», «Математика и компьютерные науки», «Механика и математическое моделирование»
2023 год

Вариант 2023-07-25

1. Вычислите предел
$$\lim_{x\to 0} \frac{6\sin(x^2) - 6x^2 + x^6}{x\left(e^{x^3} - 1 - x^3 - \frac{1}{2}x^6\right)}$$

2. Найдите неопределённый интеграл
$$\int \frac{1}{x^3 + 2x^2 + x}\,dx$$

3. Найдите все решения уравнения $(z^3 - 1)^3 = 8$ в комплексных числах.

4. Возьмём «классическую» игральную кость (кубик, на его гранях нарисованы от 1 до 6 точек, всего получается 1+2+3+4+5+6 = 21 точка). Из этих точек наугад выбирают одну и стирают. Потом кость бросается. Найдите математическое ожидание величины «число выпавших очков».

5. В ортонормированном базисе дана матрица
$$\begin{pmatrix} 7 & 14 & -13 \\ 1 & 2 & -1 \\ 6 & 12 & -12 \end{pmatrix}$$
Найдите угол в диапазоне от 0 до $\frac{\pi}{2}$ между собственными векторами с наибольшим и наименьшим собственными значениями.
Собственные значения сравниваются с учётом знака, например, $-5 < 1$.

6. Найдите общее решение дифференциального уравнения
$$y' x \ln x = 2y + 4\ln^6 x.$$

7. Дана прямая $\frac{x-8}{7} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{2}$ и плоскость $3x + 2y + 5z + 5 = 0$. Прямая отражается от плоскости, как от зеркала. Найдите уравнения отражённой прямой.

8. Какой порядок у группы поворотов пространства, переводящих октаэдр в себя?