Вступительный экзамен по математике для поступающих в магистратуру МГУ имени М. В. Ломоносова по направлениям «Математика», «Математика и компьютерные науки», «Механика и математическое моделирование»
2023 год

Вариант 2023-07-28

1. Вычислите предел
$$\lim_{x\to 0} \frac{x^8}{2\cos(x^2) - 2 + x^4}$$

Ответ: 12

Решение: Разлагаем функции по степеням:
$$\cos(x^2) = 1 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!} + o(x^8)$$

После подстановок в выражение останется:
$$\lim_{x\to 0} \frac{x^8}{\frac{2}{4!}x^8 + o(x^8)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{2}{4!} + o(1)} = \frac{4!}{2} = 12.$$

2. Найдите неопределённый интеграл
$$\int \frac{1}{x^3 - 2x^2 + x}\, dx$$

Ответ:
$$\ln\left|\frac{x}{x-1}\right| - \frac{1}{x-1} + C.$$

Решение: Разлагаем знаменатель на множители, чтобы превратить дробь в сумму элементарных:
$$\frac{1}{x^3 - 2x^2 + x} = \frac{1}{x(x-1)^2}.$$

Значит, элементарное разложение будет иметь вид
$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}.$$

Ищем A, B, C :
$$\frac{1}{x^3 - 2x^2 + x} = \frac{A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx}{x^3 - 2x^2 + x},$$

то есть
$$(A+B)x^2 + (-2A - B + C)x + A = 1.$$

Значит, $A + B = 0, -2A - B + C = 0, A = 1$, откуда $A = 1, B = -1, C = 1$. Тогда:
$$\int \frac{1}{x^3 + 2x^2 + x}\, dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\right) dx =$$

$$= \ln|x| - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C = \ln\left|\frac{x}{x-1}\right| - \frac{1}{x-1} + C.$$

3. Решите систему в комплексных числах:

$$\begin{cases} |z| = \sqrt{2}, \\ |z-1| = 1. \end{cases}$$

Ответ: $z = 1 \pm i$.

Решение: Её лучше всего решать графически. Первое уравнение даёт окружность на плоскости с центром в нуле, радиуса $\sqrt{2}$, а второе — тоже окружность, радиуса 1, но с центром в точке $(1, 0)$. Эти окружности пересекаются в точках $(1, 1)$ и $(1, -1)$. Переводим точки плоскости в комплексные числа и получаем ответ: $z = 1 \pm i$.

4. Есть 6 нулей и 3 единицы. Их в случайном порядке записывают в виде матрицы размером 3 на 3. С какой вероятностью у получившейся матрицы будет ненулевой определитель?

Ответ:

$$\frac{9 \cdot 4 \cdot 1}{3! \cdot C_9^3} = \frac{1}{14}$$

Решение: Есть 9 мест, на которые можно разместить 3 единички — число возможных вариантов равно $C_9^3 = \frac{9!}{3!6!}$. Сколько способов разместить единицы дадут ненулевой определитель? Первая единица может выпасть куда угодно — это 9 вариантов. Вторая единица может выпасть куда угодно, кроме занятых первой единицей строки и столбца (иначе из-за недостатка единиц получится нулевая строка или столбец) — это 4 варианта. Третья не может попять в уже занятые строки и столбцы, поэтому ей остаётся единственная клетка. Значит, $9 \cdot 4 \cdot 1$ вариантов, и это количество надо поделить на количество перестановок трёх элементов, 3!, потому что подсчёт вёлся с учётом порядка, а он здесь не важен. В итоге мы получаем ответ: число матриц с ненулевым определителем делить на число всех возможных матриц, то есть

$$\frac{9 \cdot 4 \cdot 1}{3!} \cdot \frac{1}{C_9^3} = \frac{9 \cdot 4 \cdot 3! \cdot 6!}{3! \cdot 9!} = \frac{9 \cdot 4}{7 \cdot 8 \cdot 9} = \frac{1}{14}.$$

5. При каких значениях параметра λ вектора $(\lambda^2, 1, 1), (\lambda, -1, 0), (1, 0, 1)$ линейно зависимы?

Ответ:

$$\lambda = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Решение: Линейную зависимость определяем с помощью определителя. Когда он равен нулю?

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 & 1 & 1 \\ \lambda & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\lambda^2 - \lambda + 1 = 0.$$

Остаётся решить квадратное уравнение. Корнями будут $\lambda = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$.

6. Найдите общее решение дифференциального уравнения

$$y'''' - y'' = e^x.$$

Ответ: $y = C_1 + C_2x + C_3e^x + C_4e^{-x} + 0.5xe^x$.

Решение: Это — линейное дифференциальное уравнение высокого порядка с правой частью специального вида. Решим однородное уравнение. Ему соответствует характеристический многочлен $\lambda^4 - \lambda^2 = 0$. Находим корни: $\lambda = 0, 0, 1, -1$. Таким корням, с учётом их кратности, соответствует решение $y = C_1 + C_2x + C_3e^x + C_4e^{-x}$. Решение неоднородного ищется в виде Axe^x (e^x соответствует число $\mu = 1$, и среди λ один такой корень есть). Подставляя Axe^x в уравнение, мы узнаём, что $4Ae^x + Axe^x - 2Ae^x - Axe^x = e^x$, то есть $A = 0.5$. Получаем ответ: $y = C_1 + C_2x + C_3\cos x + C_4\sin x + 0.5xe^x$.

7. Дана прямая $\frac{x-8}{7} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{2}$ и плоскость $3x+2y+5z+5 = 0$. Прямая ортогонально проецируется на плоскость. Найдите уравнения спроецированной прямой.

   Ответ:
   $$\frac{x-1}{167} = \frac{y-1}{-28} = \frac{z+2}{-89}.$$

   Решение: Для начала найдём, в какой точке прямая пересечёт плоскость. Эта точка должна удовлетворять как уравнениям прямой, так уравнению плоскости, поэтому находится она из системы

   $$\begin{cases} 3x + 2y + 5z + 5 = 0, \\ \frac{x-8}{7} = \frac{y-2}{1}, \\ \frac{y-2}{1} = \frac{z}{2}. \end{cases}$$

   Решая систему, получаем точку $(1, 1, -2)$.
   Дальше нужно понять, какой у спроецированной прямой направляющий вектор. Для этого возьмём вектор исходной прямой $(7, 1, 2)$ и проведём из его конца перпендикуляр к плоскости. Получившийся вектор будет проекцией.
   Нормаль к плоскости видна из уравнения, это $(3, 2, 5)$. Скалярное произведение направляющей и нормали равно $7\cdot3+1\cdot2+2\cdot5 = 33$. Оно положительно, значит вектора смотрят по одну сторону плоскости. Проекция направляющего вектора на нормальное направление равна скалярному произведению, делённому на длину нормали, что будет $33/\sqrt{38}$. Значит, нужен вектор такой длины, направленный противоположно нормали $(3, 2, 5)$. Делим нормаль на её длину, умножаем на требуемую длину, затем на минус единицу, получаем $-\frac{33}{38}(3, 2, 5)$.
   Откладываем от конца направляющего вектора полученный, чтобы получить вектор спроецированной прямой: $(7, 1, 2) - \frac{33}{38}(3, 2, 5) = (\frac{167}{38}, \frac{-28}{38}, \frac{-89}{38})$. Впрочем, вектор $(167, -28, -89)$ будет смотреть туда же.
   В конце нужно написать уравнение прямой с таким направляющим вектором, проходящей через точку $(1, 1, -2)$. Получаем ответ:
   $$\frac{x-1}{167} = \frac{y-1}{-28} = \frac{z+2}{-89}.$$

8. Чему равно 7^{-1} в поле Z_{11}?

   Ответ: 8

   Решение: Умножаем 7 на числа от 1 до 11: это будет 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 77. Из этих чисел только одно выглядит как $1 + 11 \cdot k$. Это 56, $56 = 7 \cdot 8$, следовательно $7 \cdot 8 = 1 \pmod{11}$, поэтому ответ равен 8.