Вступительный экзамен по математике
для поступающих в магистратуру МГУ имени М. В. Ломоносова
по направлениям «Математика», «Математика и компьютерные науки»,
«Механика и математическое моделирование»
2022 год

**Вариант 2022-07-23**

**1.** Запишите в виде произведения независимых циклов перестановку

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 6 & 7 & 5 & 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Решение.** Поскольку $1 \mapsto 4 \mapsto 7 \mapsto 1$, $2 \mapsto 3 \mapsto 6 \mapsto 8 \mapsto 2$ и $5 \mapsto 5$, данная перестановка равна произведению

$$(147)(2368)(5).$$

**2.** Найдите все значения $a \in \mathbb{R}$, при каждом из которых система

$$\begin{cases} \operatorname{Re} z = \operatorname{Im}(z + i), \\ |z - 2i| = a \end{cases}$$

имеет единственное решение $z \in \mathbb{C}$.

**Решение.** Пусть $z = x + iy$. Тогда система принимает вид

$$\begin{cases} x = y + 1, \\ x^2 + (y - 2)^2 = a^2. \end{cases}$$

Она имеет единственное решение, если окружность радиуса $a$ с центром в точке $(0, 2)$, задаваемая вторым уравнением, касается прямой $y - x + 1 = 0$. Это возможно лишь в случае, если радиус окружности равен расстоянию от центра окружности до прямой:

$$a = \frac{|2 - 0 + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

**3.** Решите дифференциальное уравнение $xy'' + y' = \ln x + 1$.

**Решение.** Пусть $z = xy'$. Тогда уравнение принимает вид $z' = \ln x + 1$. Решая его, получаем

$$z = \int (\ln x + 1)\, dx = x \ln x + C_1.$$

Возвращаясь к исходной функции $y$, получаем

$$y' = \ln x + \frac{C_1}{x}, \qquad y = x\ln x - x + C_1 \ln x + C_2,$$

где $C_1$, $C_2$ — произвольные постоянные.

**4.** По числовой прямой прыгает кузнечик. Влево он может прыгать только на 37 см, а вправо — только на 47 см. За какое наименьшее число прыжков кузнечик может оказаться на 1 см правее исходной точки?

**Решение.** Пусть кузнечик сделал $x$ прыжков вправо и $y$ прыжков влево. Тогда $47x - 37y = 1$. Требуется найти решение этого уравнения в целых неотрицательных числах с наименьшей суммой $x + y$.

Одно из решений этого уравнения: $x = 26$, $y = 33$ (его можно найти, например, с помощью обратного хода алгоритма Евклида для поиска НОД$(47, 37) = 1$). Пусть $(x, y)$ — другое целочисленное решение этого уравнения. Вычтя из равенства $47x - 37y = 1$ равенство $47 \cdot 26 - 37 \cdot 33 = 1$, получаем $47(x - 26) = 37(y - 33)$. Отсюда следует, что $x - 26$ делится на 37, а $y - 33$ — на 47. Значит, $(26, 33)$ — решение с минимальным положительным значением как $x$, так и $y$. Таким образом, кузнечик может оказаться на 1 см правее исходной точки за $26+33 = 59$ прыжков, а за меньшее число прыжков не может.

**5.** Точка $A$ лежит на параболе $y = x^2$, а точка $B$ — на прямой $y = 2x - 6$. Найдите наименьшую длину отрезка $AB$.

**Решение.** Пусть $A(x_1, x_1^2)$, $B(x_2, 2x_2 - 6)$. Тогда

$$AB^2 = (x_1 - x_2)^2 + (x_1^2 - 2x_2 + 6)^2 = f(x_1, x_2).$$

Найдём наименьшее значение функции $f$. Имеем

$$f'_{x_1} = 2(x_1 - x_2) + 4x_1(x_1^2 - 2x_2 + 6) = 0,$$

$$f'_{x_2} = -2(x_1 - x_2) - 4(x_1^2 - 2x_2 + 6) = 0.$$

Тогда $0 = x_1 f'_{x_1} + f'_{x_2} = 2(1 - x_1)(x_1 - x_2)$, откуда $x_1 = x_2$ или $x_1 = 1$. В первом случае получаем $x_1 = x_2 = 0$, но $f'_{x_2}(0, 0) = -24 \neq 0$, поэтому этот случай не подходит. Во втором случае находим $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Поскольку форма

$$d^2 f(1, 3) = 16dx_1^2 - 20dx_1 dx_2 + 10dx_2^2$$

положительна определена, в этой точке функция имеет локальный минимум, а других экстремумов нет. Следовательно, наименьшее значение функции $f$ равно $f(1, 3) = 5$, а наименьшая длина отрезка $AB$ равна $\sqrt{5}$.

**6.** Составьте многочлен $P(x)$ наименьшей степени, для которого

$$P(-1) = -10, \quad P(2) = -1, \quad P(3) = 10, \quad P(4) = 25, \quad P(5) = 44.$$

**Решение.** Заметим, что этот многочлен отличен от постоянной, поэтому его степень не меньше 1. Далее, он также не является линейным многочленом, так как в противном случае $P(n+1) - P(n)$ — постоянная величина, но $P(5) - P(4) = 19 \neq 15 = P(4) - P(3)$.

Следовательно, $P(x)$ — многочлен как минимум второй степени. Будем искать его в виде

$$P(x) = ax^2 + bx + c.$$

Тогда, пользуясь значениями многочлена в точках $-1$, 2 и 3, составим систему уравнений

$$\begin{cases} a - b + c = -10, \\ 4a + 2b + c = -1, \\ 9a + 3b + c = 10, \end{cases}$$

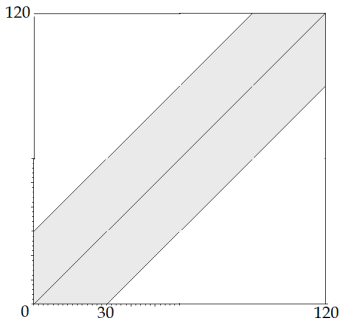
решая которую, находим $a = 2$, $b = 1$, $c = -11$. Значит, если $P(x)$ — многочлен второй степени, то он имеет вид $P(x) = 2x^2 + x - 11$. Заметим, что для этого многочлена также выполняются равенства $P(4) = 25$, $P(5) = 44$, а значит, найденный многочлен является многочленом наименьшей степени, принимающий требуемые значения в указанных 5 точках.

**7.** Известный видеоблогер проводит стрим с 21:00 до 23:00. Петя и Вася независимо друг от друга подключаются в случайный момент стрима (каждый момент равновероятен) и слушают его в течение 30 мин, либо до окончания стрима, если подключение произошло после 22:30. Какова вероятность того, что в некоторый момент времени Петя и Вася будут смотреть стрим одновременно?

**Решение.** Пусть Петя подключается к стриму через $x$ мин после его начала, а Вася — через $y$ мин. Поскольку они подключаются к стриму в промежутке длительности 120 минут (с 21:00 до 23:00), то справедливы следующие условия: $0 \leqslant x \leqslant 120$ и $0 \leqslant y \leqslant 120$.

Рассмотрим прямоугольную систему координат $xOy$. В этой системе координат всем возможным значениям времени подключения к стриму соответствуют точки квадрата со стороной 120. Искомое событие наступит, если либо Петя подключится к стриму раньше, чем отключится Вася, то есть если $y < x + 30$, когда $y > x$, либо наоборот, то есть если $x < y + 30$, когда $y < x$. Таким образом, искомому событию соответствуют условия $x < y < x + 30$ и $x - 30 < y < x$.

Построим прямые $y = x$, $y = x - 30$, $y = x + 30$ и закрасим область, лежащую внутри квадрата, точки которой удовлетворяют условиям. Точки этой фигуры (серый шестиугольник в центре) соответствуют событию о том, что Петя и Вася в некоторый момент времени смотрят стрим одновременно.




Тогда искомая вероятность того, что Петя и Вася смотрят в некоторый момент стрим одновременно, по геометрическому определению вероятности равна отношению площади этой фигуры к площади квадрата:

$$\mathrm{P} = \frac{120^2 - \frac{1}{2} \cdot 90^2 - \frac{1}{2} \cdot 90^2}{120^2} = \frac{7}{16}.$$

**8.** а) Докажите, что сходится несобственный интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2 - x + 1}\, dx.$$

б) Найдите значение этого интеграла.

**Решение.** а) Данный интеграл имеет единственную концевую особую точку $+\infty$. Имеем $\frac{\operatorname{arctg} x}{x^2 - x + 1} \sim \frac{\pi}{2x^2}$ при $x \to +\infty$ и интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\pi}{2x^2}\, dx$ сходится, поэтому по признаку сравнения данный интеграл также сходится.

б) Производя замену переменной $x = \frac{1}{t}$, получаем

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2 - x + 1}\, dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{t}}{(\frac{1}{t})^2 - \frac{1}{t} + 1} \cdot \frac{dt}{t^2} =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x}{x^2 - x + 1}\, dx = \frac{\pi}{2} \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - x + 1} - I,$$

поэтому

$$I = \frac{\pi}{4} \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - x + 1} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} \Bigg|_0^{+\infty} = \frac{\pi^2}{3\sqrt{3}}.$$