Вступительный экзамен по математике
для поступающих в магистратуру МГУ имени М. В. Ломоносова
по направлениям «Математика», «Математика и компьютерные науки»,
«Механика и математическое моделирование»
2022 год

Вариант 2022-07-29

1. Найдите площадь фигуры на координатной плоскости, находящейся в области $x > 0$, $y > 0$ и ограниченной линиями $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 9$, $y = x$, $y = \sqrt{3}x$.

2. Игральный кубик (шестигранный) бросают один или несколько раз, пока сумма выпавших очков не станет больше 3. Найдите вероятность того, что для этого потребуется ровно 2 броска.

3. Решите дифференциальное уравнение $xy' - y = x^3 e^x$.

4. Решите в натуральных числах систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 20, \\ x + 5y + 8z = 100. \end{cases}$$

5. В пространстве заданы точки $A(1, 2, -2)$, $B(3, 1, 4)$, $C(2, 0, 3)$, $D(-1, 2, 1)$. Найдите угол между плоскостями ABC и ABD.

6. Решите матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

7. Найдите все особые точки функции комплексной переменной

$$f(z) = \frac{1}{z(z - i)^2}$$

и их тип, и в каждой из этих точек вычислите вычет.

8. Исследуйте на абсолютную и условную сходимость числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n \cdot \arccos \frac{1}{n}}{\sqrt{n}}.$$