Вступительный экзамен по математике
для поступающих в магистратуру МГУ имени М. В. Ломоносова
по направлениям «Математика», «Математика и компьютерные науки»,
«Механика и математическое моделирование»
2022 год

Вариант 2022-06-23

Задача 1

Составьте каноническое уравнение эллипса, расстояние между фокусами которого равно 8, а бóльшая ось равна 10.

Решение. Каноническое уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где a, b — полуоси, $a \geqslant b > 0$. Поскольку бóльшая ось равна 10, то её половина, т. е. бóльшая полуось равна $a = 5$. Расстояние между фокусами $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$ равно $2c = 8$, поэтому $c = 4$.

Поскольку $a^2 = b^2 + c^2$, находим $b = \sqrt{a^2 - c^2} = 3$. Следовательно, искомое каноническое уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Вступительный экзамен по математике
для поступающих в магистратуру МГУ имени М. В. Ломоносова
по направлениям «Математика», «Математика и компьютерные науки»,
«Механика и математическое моделирование»
2022 год

Вариант 2022-06-23

Задача 2

Вычислите предел $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+5}+x\right)$.

Решение. Если $x<0$, то $\sqrt{x^2}=|x|=-x$, поэтому

$$\sqrt{x^2+4x+5}+x=\frac{4x+5}{\sqrt{x^2+4x+5}-x}=\frac{4+\frac{5}{x}}{-\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}-1}.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+5}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{4+\frac{5}{x}}{-\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}-1}=\frac{4}{-2}=-2.$$

Вступительный экзамен по математике
для поступающих в магистратуру МГУ имени М. В. Ломоносова
по направлениям «Математика», «Математика и компьютерные науки»,
«Механика и математическое моделирование»
2022 год

Вариант 2022-06-23

Задача 3

Найдите наименьший модуль комплексного числа z, удовлетворяющего уравнению

$$|z+2| = |z-1-i|.$$

Решение. Пусть $z = x + iy$. Тогда данное условие равносильно следующему:

$$(x+2)^2 + y^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2,$$

или $3x + y + 1 = 0$ (это уравнение серединного перпендикуляра к отрезку между точками -2 и $1+i$ на комплексной плоскости). Искомый наименьший модуль равен расстоянию от начала координат до этой прямой:

$$\rho = \frac{|3 \cdot 0 + 0 + 1|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Вступительный экзамен по математике
для поступающих в магистратуру МГУ имени М. В. Ломоносова
по направлениям «Математика», «Математика и компьютерные науки»,
«Механика и математическое моделирование»
2022 год

Вариант 2022-06-23

Задача 4

Производственная линия изготавливает автомобили. Вероятность того, что готовый автомобиль неисправен, равна 0,02. Перед отправкой на склад готовой продукции каждый автомобиль проходит контроль качества. Вероятность того, что контроль забракует неисправный автомобиль, равна 0,97. Вероятность того, что контроль по ошибке забракует исправный автомобиль, равна 0,05. Найдите вероятность того, что случайно выбранный изготовленный автомобиль будет забракован при контроле качества.

Решение. Ситуация, при которой автомобиль будет забракован на контроле, может сложиться в результате следующих двух событий: 1) автомобиль действительно неисправен и забракован справедливо; 2) автомобиль исправен, но по ошибке забракован.

События «автомобиль исправен» и «автомобиль неисправен» несовместны, причём одно из них непременно происходит. Поэтому по формуле полной вероятности получаем

$$0{,}02 \cdot 0{,}97 + 0{,}98 \cdot 0{,}05 = 0{,}0194 + 0{,}049 = 0{,}0684.$$

Вступительный экзамен по математике
для поступающих в магистратуру МГУ имени М. В. Ломоносова
по направлениям «Математика», «Математика и компьютерные науки»,
«Механика и математическое моделирование»
2022 год

Вариант 2022-06-23

Задача 5

Найдите неопределённый интеграл $\displaystyle\int \frac{x+\sqrt{\operatorname{arctg} 2x}}{4x^2+1}\,dx$.

Решение. Имеем

$$\int \frac{x+\sqrt{\operatorname{arctg} 2x}}{4x^2+1}\,dx = \int \frac{x}{4x^2+1}\,dx + \int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} 2x}}{4x^2+1}\,dx =$$
$$= \frac{1}{8}\int \frac{d\left(4x^2+1\right)}{4x^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} 2x}}{(2x)^2+1}\,d(2x) = \frac{1}{8}\ln\left(4x^2+1\right) +$$
$$+ \frac{1}{2}\int \sqrt{\operatorname{arctg} 2x}\,d(\operatorname{arctg} 2x) = \frac{1}{8}\ln\left(4x^2+1\right) + \frac{1}{3}(\operatorname{arctg} 2x)^{3/2} + C.$$

Вступительный экзамен по математике
для поступающих в магистратуру МГУ имени М. В. Ломоносова
по направлениям «Математика», «Математика и компьютерные науки»,
«Механика и математическое моделирование»
2022 год

Вариант 2022-06-23

Задача 6

Решите дифференциальное уравнение $xy' - 2y = x^5 \ln x$.

Решение. Решим соответствующее однородное уравнение:

$$x\frac{dy}{dx} - 2y = 0, \qquad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{2\,dx}{x}, \qquad \ln|y| = 2\ln|x| + C_1.$$

Таким образом, общее решение однородного уравнения имеет вид $y = Cx^2$, $C = e^{C_1} > 0$. Чтобы найти частное решение, применим метод вариации постоянной, т. е. будем искать решение в виде $y = C(x)x^2$, тогда $y' = C'(x)x^2 + 2xC(x)$, и подставляя в исходное неоднородное уравнение, получаем $C'(x)x^3 = x^5 \ln x$, откуда

$$C(x) = \int x^2 \ln x\,dx = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 + C.$$

Итак, общее решение имеет вид $y = \frac{1}{3}x^5 \ln x - \frac{1}{9}x^5 + Cx^2$, где C — произвольная постоянная.

Вступительный экзамен по математике
для поступающих в магистратуру МГУ имени М. В. Ломоносова
по направлениям «Математика», «Математика и компьютерные науки»,
«Механика и математическое моделирование»
2022 год

Вариант 2022-06-23

Задача 7

Найдите определитель

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

размера 2022×2022.

Решение. Пусть a_n — определитель матрицы данного вида размера $n \times n$. Тогда, раскладывая определитель по первому столбцу (или по первой строке), получаем рекуррентное соотношение

$$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}.$$

Составляя характеристическое уравнение, находим $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, откуда $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Следовательно, $a_n = C_1 + C_2 \cdot 2^n$. Значения C_1, C_2 найдём из условий $a_1 = 3$, $a_2 = 7$. Имеем $C_1 + 2C_2 = 3$, $C_1 + 4C_2 = 7$, откуда $C_1 = -1$, $C_2 = 2$. Таким образом, $a_n = 2^{n+1} - 1$, $a_{2022} = 2^{2023} - 1$.

Вступительный экзамен по математике
для поступающих в магистратуру МГУ имени М. В. Ломоносова
по направлениям «Математика», «Математика и компьютерные науки»,
«Механика и математическое моделирование»
2022 год

Вариант 2022-06-23

Задача 8

Решите в натуральных числах уравнение $3x^2 - 12xy + 13y^2 = 64$.

Решение. Выделяя полный квадрат, приведём уравнение к виду

$$3(x - 2y)^2 + y^2 = 64.$$

Далее рассмотрим случаи:

1) если $x - 2y = 0$, то $y^2 = 64$, значит, $y = 8$, откуда $x = 16$;

2) если $|x - 2y| = 1$, то $y^2 = 61$ — нет решений;

3) если $|x - 2y| = 2$, то $y^2 = 52$ — нет решений;

4) если $|x - 2y| = 3$, то $y^2 = 37$ — нет решений;

5) если $|x - 2y| = 4$, то $y^2 = 16$, значит, $y = 4$, откуда $|x - 8| = 4$, т. е. $x = 12$ или $x = 4$;

6) если $|x - 2y| \geqslant 5$, то $3(x - 2y)^2 \geqslant 75$, поэтому решений нет.

Таким образом, все решения данного уравнения в натуральных числах суть $(4, 4)$, $(12, 4)$, $(16, 8)$.