Вступительный экзамен по математике
для поступающих в магистратуру МГУ имени М. В. Ломоносова
по направлениям «Математика», «Математика и компьютерные науки»,
«Механика и математическое моделирование»
2021 год

Вариант 2021-07-27

1. Определите тип поверхности второго порядка, заданной уравнением

$$x^2 - 2yz - y^2 + 2x = 0.$$

Решение:
Выделяя полные квадраты, получаем $(x+1)^2 - (y-z)^2 + z^2 = 1$. Таким образом, это однополостный гиперболоид.

2. Для функции $f(x) = (x^2+2x)e^{-x}$ найдите: а) производную, промежутки монотонности и точки локального экстремума; б) вторую производную, участки выпуклости и точки перегиба.

Решение:
а) Производная функции f равна

$$f'(x) = (2 - x^2)e^{-x} = -(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})e^{-x},$$

поэтому эта функция убывает на промежутках $(-\infty; -\sqrt{2}]$ и $[\sqrt{2}; +\infty)$ и возрастает на промежутке $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$; точка $x_1 = -\sqrt{2}$ — точка локального минимума, точка $x_2 = \sqrt{2}$ — точка локального максимума.

б) Вторая производная функции f равна

$$f''(x) = (x^2 - 2x - 2)e^{-x} = (x - 1 - \sqrt{3})(x - 1 + \sqrt{3})e^{-x},$$

поэтому функция f выпукла вниз на промежутках $(-\infty; 1 - \sqrt{3}]$ и $[1 + \sqrt{3}; +\infty)$ и выпукла вверх на промежутке $[1-\sqrt{3}; 1+\sqrt{3}]$; точки $x_{3,4} = 1 \pm \sqrt{3}$ — точки перегиба.

3. Решите систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 1, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 &= 5, \\ x_1 - 9x_2 + 17x_3 &= -1. \end{cases}$$

Решение:
Третье уравнение системы получается, если из первого уравнения, умноженного на 4, вычесть второе уравнение. Поэтому третье уравнение можно исключить. Из первых двух уравнений получаем

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 &= 1 - 4x_3, \\ 3x_1 + x_2 &= 5 + x_3; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 - 2x_2 &= 1 - 4x_3, \\ 7x_2 &= 2 + 13x_3. \end{cases}$$

Отсюда находим $x_2 = \frac{2}{7} + \frac{13}{7}x_3$, $x_1 = \frac{11}{7} - \frac{2}{7}x_3$, x_3 — любое.

Замечания. 1) Ответ может быть записан в другой форме в зависимости от того, какая из неизвестных выбрана свободной (в решении выше это x_3). 2) Систему нельзя решить методом Крамера, так как матрица системы вырождена.

4. Игральный кубик налит свинцом таким образом, что вероятность выпадения каждой грани пропорциональна числу очков на ней. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины, равной числу выпавших очков при бросании кубика.

Решение:
Сумма очков на всех гранях равна $1+2+\ldots+6=21$, поэтому вероятность выпадения k очков равна $p_k=\frac{k}{21}$. Значит, математическое ожидание числа X выпавших очков равно

$$\mathrm{M}X=\sum_{k=1}^{6}p_kx_k=\sum_{k=1}^{6}\frac{k^2}{21}=\frac{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2}{21}=\frac{13}{3},$$

а его дисперсия равна

$$\mathrm{D}X=\sum_{k=1}^{6}p_k(x_k-\mathrm{M}X)^2=\sum_{k=1}^{6}\frac{k(k-\frac{13}{3})^2}{21}=\frac{(\frac{10}{3})^2+2(\frac{7}{3})^2+3(\frac{4}{3})^2+\ldots+6(\frac{5}{3})^2}{21}=\frac{20}{9}.$$

5. Решите дифференциальное уравнение $\left(y^2+4xy-\dfrac{1}{x}\right)dx+\left(2x^2+2xy+\dfrac{1}{y}\right)dy=0.$

Решение:
Пусть $P(x,y)=y^2+4xy-\frac{1}{x}$, $Q(x,y)=2x^2+2xy+\frac{1}{y}$. Поскольку $P'_y=2y+4x=Q'_x$, это уравнение в полных дифференциалах. Поэтому из условия $F'_x=P$ находим

$$F(x,y)=\int\left(y^2+4xy-\frac{1}{x}\right)dx=xy^2+2x^2y-\ln x+\varphi(y),$$

а из условия $F'_y=Q$ получаем $\varphi'(y)=\frac{1}{y}$, откуда $\varphi(y)=\ln y+C_1$. Таким образом, общее решение имеет вид $xy^2+2x^2y+\ln\frac{y}{x}=C$.

6. Разложите функцию $f(z)=\dfrac{z}{z^2-3z+2}$ в ряд Лорана в кольце $1<|z|<2$, $z\in\mathbb{C}$.

Решение:
Имеем

$$f(z)=\frac{z}{(z-1)(z-2)}=\frac{2}{z-2}-\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{1-\frac{z}{2}}-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{z}{2}\Big)^n-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{z}\Big)^n=-\sum_{n=-\infty}^{-1}z^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}z^n,\quad 1<|z|<2.$$

7. Вычислите предел $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\dfrac{1}{n^4+1}+\dfrac{2}{n^4+2^4}+\dfrac{3}{n^4+3^4}+\ldots+\dfrac{n}{n^4+n^4}\right).$

Решение:
Выражение под знаком предела запишем в виде

$$n^2\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^4+n^4}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{(\frac{k}{n})^4+1}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\Big(\frac{k}{n}\Big),$$

где $f(x) = \frac{x}{x^4+1}$, поэтому оно представляет собой равномерную интегральную сумму для функции f на отрезке $[0;1]$ (т. е. соответствующую разбиению отрезка на n равных частей). Следовательно, предел равен

$$\int_0^1 \frac{x}{x^4+1}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2\Big|_0^1 = \frac{\pi}{8}.$$

8. Вычислите криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_L (x^3+2z)\,dx + (y^3+2x)\,dy + (z^3+2y)\,dz,$$

где L — окружность, лежащая в пересечении сферы $x^2+y^2+z^2=1$ и плоскости $x+y+z=0$, положительно ориентированная на верхней стороне плоскости.

Решение:
Применяя формулу Стокса, получаем, что данный интеграл равен

$$\iint\limits_S 2\,dy\wedge dz + 2\,dz\wedge dx + 2\,dx\wedge dy,$$

где S — верхняя сторона части плоскости $x+y+z=0$, лежащей внутри сферы $x^2+y^2+z^2=1$. Она ориентирована с помощью нормали $\vec{n}=\{1,1,1\}$. Поэтому, сводя этот интеграл к двойному, получаем

$$\iint\limits_S 2\,dy\wedge dz + 2\,dz\wedge dx + 2\,dx\wedge dy = \iint\limits_\Omega 6\,dx\,dy = 6\mu(\Omega),$$

где Ω — проекция S на плоскость Oxy, $\mu(\Omega)$ — её площадь. Косинус угла между плоскостями $x+y+z=1$ и $z=0$ равен $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$, поэтому $\mu(\Omega) = \mu(S)\cos\varphi = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$. Следовательно, исходный интеграл равен $6\mu(\Omega) = 2\sqrt{3}\pi$.

Замечание. Возможен способ решения с помощью параметризации кривой L и сведения криволинейного интеграла к определённому.