Вступительный экзамен по математике
для поступающих в магистратуру МГУ имени М. В. Ломоносова
по направлениям «Математика», «Математика и компьютерные науки»,
«Механика и математическое моделирование»
2021 год

Вариант 2021-06-29

1. Найдите $\dfrac{\partial F}{\partial z}$ и $\dfrac{\partial F}{\partial \bar{z}}$, где $F(z) = z^2 + |z|^2$, $z \in \mathbb{C}$.

   Решение:
   Имеем $F(z) = z^2 + |z|^2 = z^2 + z\bar{z}$, поэтому $\dfrac{\partial F}{\partial z} = 2z + \bar{z}$ и $\dfrac{\partial F}{\partial \bar{z}} = z$.

2. Изоморфны ли группы $\mathbb{Z}_{12}/\mathbb{Z}_2$ и $\mathbb{Z}_6$?

   Решение:
   Рассмотрим гомоморфизм $f : \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_6$, заданный по правилу $f(k) = k \mod 6$, $k = 0, 1, \ldots, 11$. Тогда $\ker f = \{0, 6\} \sim \mathbb{Z}_2$, поэтому по теореме о гомоморфизмах $\mathbb{Z}_{12}/\mathbb{Z}_2 \sim \mathbb{Z}_6$.

3. Найдите расстояние от точки $M(3, -1, 0)$ до прямой l, лежащей в пересечении плоскостей $4x + y - 3z = 5$, $-4x + y + 3z = -9$.

   Решение:
   Рассмотрим какую-нибудь точку прямой l, например $M_1(\frac{7}{4}, -2, 0)$. Тогда $\overrightarrow{M_1M} = \{\frac{5}{4}, 1, 0\}$. Направляющий вектор прямой равен $\vec{a} = \frac{1}{2}[\vec{n}_1, \vec{n}_2] = \{3, 0, 4\}$. Следовательно, $[\overrightarrow{M_1M}, \vec{a}] = \{4, -5, -3\}$, и искомое расстояние равно $d = \frac{|[\overrightarrow{M_1M}, \vec{a}]|}{|\vec{a}|} = \sqrt{2}$.

4. Найдите первую квадратичную форму поверхности, заданной параметрически уравнениями $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = 5v$.

   Решение:
   Радиус-вектор поверхности равен $\vec{r} = \vec{r}(u, v) = \{u\cos v, u\sin v, 5v\}$. Следовательно, $\vec{r}_u{}' = \{\cos v, \sin v, 0\}$, $\vec{r}_v{}' = \{-u\sin v, u\cos v, 5\}$. Тогда $E = (\vec{r}_u{}', \vec{r}_u{}') = 1$, $F = (\vec{r}_u{}', \vec{r}_v{}') = 0$, $G = (\vec{r}_v{}', \vec{r}_u{}') = u^2 + 25$, поэтому первая квадратичная форма равна

   $$ds^2 = du^2 + (u^2 + 25)\, dv^2.$$

5. При всех $x > 0$ докажите неравенство $\ln(1 + x) < \dfrac{x}{\sqrt{1 + x}}$.

   Решение:
   Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x}} - \ln(1 + x)$. Её производная равна

   $$f'(x) = \frac{\sqrt{1+x} - \frac{x}{2\sqrt{1+x}}}{1 + x} - \frac{1}{1 + x} = \frac{2 + x - \sqrt{1 + x}}{2(1 + x)^{3/2}}.$$

   При $x > 0$ имеем $\sqrt{1 + x} < 2 + x$, так как $1 + x < 4 + 4x + x^2 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 3 > 0$. Следовательно, $f'(x) > 0$ при $x > 0$, поэтому функция f возрастает при $x > 0$. Значит, $f(x) > f(0) = 0$, откуда следует требуемое.

6. Имеются 4 одинаковые красные плитки размером 1×1 и 8 одинаковых белых плиток размером 1×2. Рассматриваются всевозможные замощения полоски размером 1×13 этими плитками. Какова вероятность того, что в случайно выбранном замощении будет ровно одна красная плитка?

Решение:
Полоска состоит из 13 клеток, поэтому можно задействовать или 1 плитку 1×1 и 6 плиток 1×2, или 3 плитки 1×1 и 5 плиток 1×2.

Если задействована ровно одна плитка 1×1, то число способов уложить все плитки равно числу способов переставить буквы в слове АБББББББ (буквы А соответствуют плиткам 1×1, а буквы Б — плиткам 1×2). Это число способов равно количеству букв в этом слове, т. е. 7.

Если же задействованы три плитки 1×1, то число способов уложить все плитки равно числу способов переставить буквы в слове ААААБББББ. Это число способов равно $\frac{8!}{3!\cdot5!}=7\cdot8=56$. Таким образом, общее число замощений равно $7+56=63$. Поскольку ровно 7 из них содержат одну красную плитку, искомая вероятность равна $\frac{7}{63}=\frac{1}{9}$.

7. Найдите объём тела, лежащего в области $z\geqslant0$ и ограниченного поверхностью

$$\left(x^2+y^2+z^2\right)^2=(x^2-y^2)z.$$

Решение:
В сферических координатах ($x=r\cos\varphi\cos\psi$, $y=r\sin\varphi\cos\psi$, $z=r\sin\psi$) уравнение поверхности имеет вид $r=\cos2\varphi\cos^2\psi\sin\psi$. Поэтому искомый объём равен

$$V=2\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4}d\varphi\int\limits_0^{\pi/2}d\psi\int\limits_0^{\cos2\varphi\cos^2\psi\sin\psi}r^2\cos\psi\,dr=\frac{4}{3}\int\limits_0^{\pi/4}\cos^3 2\varphi\,d\varphi\int\limits_0^{\pi/2}\cos^7\psi\sin^3\psi\,d\psi=$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^1(1-t^2)\,dt\int_0^1(1-u^2)^3u^3\,du=\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{6}+\frac{3}{8}-\frac{1}{10}\right)=\frac{1}{90}.$$

8. Решите систему дифференциальных уравнений $\begin{cases}\dot x=2x-3y,\\ \dot y=-x+e^t.\end{cases}$

Решение:
Дифференцируя первое уравнение, с учётом второго уравнения получаем

$$\ddot x=2\dot x-3\dot y=2\dot x+3x-3e^t.$$

Решим относительно $x=x(t)$ уравнение $\ddot x-2\dot x-3x=-3e^t$. Это линейное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, его характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^2-2\lambda-3=0$, откуда $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=3$. Следовательно, общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид $x=C_1e^{-t}+C_2e^{3t}$. Частное решение неоднородного будем искать в виде $x=Ae^t$. Подставляя его в уравнение, получаем $-4Ae^t=-3e^t$, откуда $A=\frac{3}{4}$. Итак,

$$x(t)=C_1e^{-t}+C_2e^{3t}+\frac{3}{4}e^t,\qquad y(t)=\frac{1}{3}(2x-\dot x)=C_1e^{-t}-\frac{1}{3}C_2e^{3t}+\frac{1}{4}e^t,$$

где C_1,C_2 — произвольные постоянные.