ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«ПОКОРИ ВОРОБЬЁВЫ ГОРЫ!»

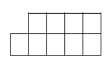
Задания заочного тура по МАТЕМАТИКЕ

2015/2016 учебный год

9 Класс

1. Деревни "Верхние Васюки" и "Нижние Васюки" расположены на берегу реки. Пароход проходит расстояние от Верхних до Нижних Васюков за один час, а катер — за 45 минут. Известно, что скорость катера в стоячей воде в два раза больше скорости парохода (тоже в стоящей воде). Определите, какое время потребуется плоту, чтобы спуститься из Верхних Васюков в Нижние Васюки?

2. Сколькими способами можно разместить числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 в девяти клетках фигуры, изображенной на рисунке, так, чтобы сумма чисел в каждом столбце, начиная со второго, была на 1 больше, чем в предыдущем?



3. Пусть $\Sigma(n)$ обозначает сумму цифр числа n. Найдите наименьшее трехзначное n, такое, что $\Sigma(n) = \Sigma(2n) = \Sigma(3n) = \ldots = \Sigma(n^2)$

4. Сравните числа
$$\left(1+\frac{1}{1755}\right)\left(1+\frac{1}{1756}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2015}\right) \text{ и } \sqrt{\frac{8}{7}}.$$

5. В окружности проведены две взаимно перпендикулярные хорды AC и BD. Найдите радиус окружности, если известно, что $AB = 3$, $CD = 4$.

6. Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе неравенств
$$\begin{cases} x^3 + y^2 - 3y + 1 < 0, \\ 3x^3 - y^2 + 3y > 0. \end{cases}$$

7. Несколько автобусов (больше трех) в начале рабочего дня поочередно выезжают с постоянными и одинаковыми скоростями из одного пункта в другой. По прибытии в конечный пункт каждый из них, не задерживаясь, разворачивается и едет в обратном направлении. Все автобусы делают одинаковое число рейсов туда и обратно, причем первый автобус заканчивает первый рейс позже, чем в первый рейс выезжает последний автобус. Каждый водитель подсчитал, сколько раз в течение дня он встретился с остальными автобусами, и в сумме у всех водителей получилось число 300. Сколько было автобусов и сколько рейсов они совершили?

8. Найдите все значения параметра a, при которых квадратный трёхчлен $\frac{1}{3}x^2 + (a + \frac{1}{2})x + (a^2 + a)$ имеет два корня, сумма кубов которых ровно в 3 раза больше их произведения.

9. Докажите при всех $a, b, > 0$ неравенство

$$a^2 + 5ab + b^2 > 4\sqrt[4]{a^3b^3(a+b)^2}.$$

10. Точка C делит диаметр AB в отношении $AC : BC = 2 : 1$. На окружности выбрана точка P. Определите, какие значения может принимать отношение $\operatorname{tg}\angle PAC : \operatorname{tg}\angle APC$?