

Вариант 113
вступительный экзамен по МЕХАНИКЕ
для поступающих в магистратуру
механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова
по направлению «Механика и математическое моделирование»

1. Вычислите предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{(x^2 + 1)} - 1}{x^2}.$$

2. Вычислите зависимость скорости материальной точки от времени, движущейся вдоль прямой по закону $x(t) = (\ln t)^{\operatorname{arctg} t}$

3. Из семейства кривых

$$\int \frac{9x^3 + 25x^2 + 14x + 16}{(x + 1)(x - 2)(3x^2 + 2x + 2)} dx.$$

найдите интегральную кривую, проходящую через начало координат.

4. При каких значениях параметра $\gamma > 0$ устойчивое положение равновесия уравнения Ньютона с трением

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} = 1 - x^2$$

будет фокусом на фазовой плоскости (x, \dot{x}) ?

5. Материальная точка движется по плоскости по закону $x(t) = 36 + 75t - 4t^3$, $y(t) = -4t$. Найдите перемещение, пройденный путь и модуль изменения скорости точки за третью секунду после начала движения $t = 0$. Здесь t измеряется в секундах, а x и y — в метрах.

6. С одной и той же наклонной плоскости с одинаковой высоты скатываются без проскальзывания два тела — сплошной диск и обруч одинаковой массы и одинакового радиуса. Сравните скорости этих тел у основания наклонной плоскости.

7. Старый рыбак, на небольшой лодке с мачтой кружил по озеру по гладкой замкнутой траектории с постоянной по модулю скоростью v . Клева практически не было, и рыбак сосредоточил свое внимание на поведении флажка на мачте. За время полного оборота флажок несколько раз показывал на север, несколько раз на восток, а все остальное время — между этими направлениями. Рыбаку сначала показалось это удивительным, но, немного подумав, он пришел к выводу, что такое может быть лишь при единственном варианте величины и направления скорости ветра. Найдите величину и направление скорости ветра.