

Вариант 112
вступительный экзамен по МАТЕМАТИКЕ
для поступающих в магистратуру
механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова
по направлениям «Математика» и «Математика и компьютерные науки»

1. Найдите предел последовательности

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n} - \frac{2}{n} + \frac{3}{n} - \dots + \frac{(-1)^{(n-1)}n}{n} \right|.$$

2. Вычислите производную функции $y(x) = \ln(\cos^2 x + \sqrt{1 + \cos^4 x})$.

3. Вычислите интеграл

$$\int \sin x e^{2x} dx.$$

4. Известно, что функция $y = x + x^4$ является решением однородного дифференциального уравнения $y' = f(y/x)$. Найдите функцию $f(z)$ и решите это уравнение.

5. Найдите формулу общего члена последовательности $\{a_n\}$, заданной рекуррентно:

$$a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + 8n.$$

Ответ обоснуйте.

6. Исследуйте на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \left(\frac{n+1}{3n+2} \right)^n.$$

7. Найдите угол между двумя различными касательными, проведенными из точки с координатами $(1, 2)$ к эллипсу, заданному уравнением

$$x^2 + xy + 2y^2 = 1.$$