

Вариант 111
вступительный экзамен по МАТЕМАТИКЕ
для поступающих в магистратуру
механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова
по направлениям «Математика» и «Математика и компьютерные науки»

1. Найдите предел последовательности и доказать $1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2^2}, 1\frac{1}{2^3}, \dots, 1\frac{1}{2^n}, \dots$

2. Вычислите производную функции $u(x) = (\ln x)^{\arctg x}$

3. Вычислите интеграл

$$\int \frac{9x^3 + 25x^2 + 14x + 16}{(x+1)(x-2)(3x^2 + 2x + 2)} dx.$$

4. При каких значениях действительных параметров a и b . функция $y = e^{-x}$ является устойчивым по Ляпунову решением дифференциального уравнения $y''' + ay'' + by' + y = 0$, но не является асимптотически устойчивым?

5. Найдите формулу общего члена последовательности, заданной рекуррентно

$$a_1 = 2, a_2 = 5, a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}, n > 2.$$

6. Исследуйте на сходимость и на равномерную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^4}{n+x+1} \arctg\left(\frac{x^2}{\sqrt{n}}\right)$$

а) на $E_1 = (0; 1)$;

б) на $E_2 = (1; +\infty)$.

7. Пусть $A = (a_{ij})$ матрица $n \times n$ ранга $n - 1$. Найдите ранг матрицы $\tilde{A} = (A_{ij})$, составленной из алгебраических дополнений до элементов a_{ij} , $i = 1, 2, 3, \dots, n$; $j = 1, 2, 3, \dots, n$.