LXXVII Московская математическая олимпиада
11 класс, второй день

1. Существует ли такой квадратный трёхчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ с целыми коэффициентами и a не кратным 2014, что все числа $f(1)$, $f(2)$, $\ldots$, $f(2014)$ имеют различные остатки при делении на 2014? Ответ обоснуйте.

2. Найдите все такие a и b, что $|a| + |b| \geqslant 2/\sqrt{3}$ и при всех x выполнено неравенство $|a \sin x + b \sin(2x)| \leqslant 1$.

3. Докажите, что для любого натурального n найдётся натуральное число, десятичная запись квадрата которого начинается n единицами, а заканчивается какой-то комбинацией из n единиц и двоек.

4. У повара в подчинении десять поварят, некоторые из которых дружат между собой. Каждый рабочий день повар назначает одного или нескольких поварят на дежурство, а каждый из дежурных поварят уносит с работы по одному пирожному каждому своему недежурящему другу. В конце дня повар узнаёт количество пропавших пирожных. Сможет ли он за 45 рабочих дней понять, кто из поварят дружит между собой, а кто нет?

5. Поверхность выпуклого многогранника $A_1B_1C_1A_2B_2C_2$ состоит из восьми треугольных граней $A_iB_jC_k$, где i, j, k меняются от 1 до 2. Сфера с центром в точке O касается всех этих граней. Докажите, что точка O и середины трёх отрезков A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 лежат в одной плоскости.

Закрытие олимпиады пройдёт в Главном здании МГУ 23.03.2014. Расписание закрытия и предварительные результаты проверки работ см. на сайте http://www.mccme.ru/mmo.

Москва, 15 марта 2014 года

LXXVII Московская математическая олимпиада
11 класс, второй день

1. Существует ли такой квадратный трёхчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ с целыми коэффициентами и a не кратным 2014, что все числа $f(1)$, $f(2)$, $\ldots$, $f(2014)$ имеют различные остатки при делении на 2014? Ответ обоснуйте.

2. Найдите все такие a и b, что $|a| + |b| \geqslant 2/\sqrt{3}$ и при всех x выполнено неравенство $|a \sin x + b \sin(2x)| \leqslant 1$.

3. Докажите, что для любого натурального n найдётся натуральное число, десятичная запись квадрата которого начинается n единицами, а заканчивается какой-то комбинацией из n единиц и двоек.

4. У повара в подчинении десять поварят, некоторые из которых дружат между собой. Каждый рабочий день повар назначает одного или нескольких поварят на дежурство, а каждый из дежурных поварят уносит с работы по одному пирожному каждому своему недежурящему другу. В конце дня повар узнаёт количество пропавших пирожных. Сможет ли он за 45 рабочих дней понять, кто из поварят дружит между собой, а кто нет?

5. Поверхность выпуклого многогранника $A_1B_1C_1A_2B_2C_2$ состоит из восьми треугольных граней $A_iB_jC_k$, где i, j, k меняются от 1 до 2. Сфера с центром в точке O касается всех этих граней. Докажите, что точка O и середины трёх отрезков A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 лежат в одной плоскости.

Закрытие олимпиады пройдёт в Главном здании МГУ 23.03.2014. Расписание закрытия и предварительные результаты проверки работ см. на сайте http://www.mccme.ru/mmo.

Москва, 15 марта 2014 года