Департамент образования города Москвы
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Московское математическое общество
Московский институт открытого образования
Центр педагогического мастерства
Московский центр непрерывного
математического образования

LXXVI

Московская математическая олимпиада

Задачи и решения

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
Москва, 2013

☞ Вопросы, оригинальные решения и иные комментарии по задачам олимпиады просим сообщать жюри по адресу электронной почты mmo@mccme.ru

☞ Материалы данной книги размещены на странице

http://www.mccme.ru/mmo/

и доступны для свободного некоммерческого использования (при перепечатке желательна ссылка на источник).

☞ Председатель оргкомитета LXXVI ММО

академик РАН и РАО *А. Л. Семенов*.

☞ Сборник подготовили:

В. Д. Арнольд, *Е. В. Бакаев*, *А. Г. Банникова*, *А. В. Бегунц*, *Б. Б. Беднов*, *А. С. Бердников*, *М. А. Берштейн*, *А. Д. Блинков*, *Ю. А. Блинков*, *Н. В. Богачев*, *И. И. Богданов*, *П. А. Бородин*, *В. В. Буланкина*, *Т. И. Голенищева-Кутузова*, *Д. В. Горяшин*, *С. А. Дориченко*, *А. А. Заславский*, *Ф. А. Ивлев*, *Т. В. Казицына*, *В. А. Клепцын*, *И. А. Кострикин*, *О. Н. Косухин*, *А. К. Кулыгин*, *Н. М. Курносов*, *А. А. Лопатников*, *С. В. Маркелов*, *Н. Ю. Медведь*, *Г. А. Мерзон*, *И. В. Митрофанов*, *Е. Ю. Нетай*, *И. В. Нетай*, *С. А. Николаев*, *А. А. Пахарев*, *Г. А. Погудин*, *А. А. Полянский*, *М. А. Раскин*, *И. В. Раскина*, *С. Ю. Рыбаков*, *А. С. Трепалин*, *А. А. Флеров*, *Б. Р. Френкин*, *А. В. Хачатурян*, *А. А. Чернов*, *А. В. Шаповалов*, *И. А. Шейпак*, *Д. Э. Шноль*, *И. В. Ященко*.

☞ Рисунки выполнили:

Д. В. Горяшин, *И. В. Нетай*, *В. Ю. Радионов*, *Д. Е. Щербаков*.

☞ Проведение олимпиады и издание книги осуществлены при поддержке

фирмы «НИКС»,
компании «Яндекс»
и фонда «Математические этюды».

6 класс

1. Вася умножил некоторое число на 10 и получил простое число. А Петя умножил то же самое число на 15, но все равно получил простое число. Может ли быть так, что никто из них не ошибся? (*В. А. Клепцын*)

2. Вот ребус довольно простой:
ЭХ вчетверо больше, чем ОЙ.
АЙ вчетверо больше, чем ОХ.
Найди сумму всех четырех.

(*Д. Э. Шноль*)

3. Пес и кот одновременно схватили зубами батон колбасы с разных сторон. Если пес откусит свой кусок и убежит, коту достанется на 300 г больше, чем псу. Если кот откусит свой кусок и убежит, псу достанется на 500 г больше, чем коту. Сколько колбасы останется, если оба откусят свои куски и убегут? (*А. В. Шаповалов*)

4. 13 детей сели за круглый стол и договорились, что мальчики будут врать девочкам, а друг другу говорить правду, а девочки, наоборот, будут врать мальчикам, а друг другу говорить правду. Один из детей сказал своему правому соседу: «Большинство из нас мальчики». Тот сказал своему правому соседу: «Большинство из нас девочки», а он своему соседу справа: «Большинство из нас мальчики», а тот своему: «Большинство из нас девочки» и так далее, пока последний ребенок не сказал первому: «Большинство из нас мальчики». Сколько мальчиков было за столом?

(*А. В. Хачатурян*)

5. Малый и Большой острова имеют прямоугольную форму и разделены на прямоугольные графства. В каждом графстве проложена дорога по одной из диагоналей. На каждом острове эти дороги образуют замкнутый путь, который ни через какую точку не проходит дважды. Вот как устроен Малый остров, где всего 6 графств (рис. 1). Нарисуйте,

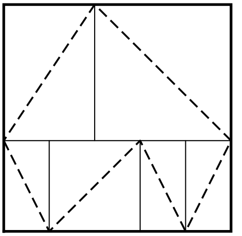

Рис. 1

как может быть устроен Большой остров, если на нем нечетное число графств. Сколько графств у вас получилось?

(*А. В. Шаповалов*)

6. Тридцать три богатыря нанялись охранять Лукоморье за 240 монет. Хитрый дядька Черномор может разделить богатырей на отряды произвольной численности (или записать всех в один отряд), а затем распределить все жалованье между отрядами. Каждый отряд делит свои монеты поровну, а остаток отдает Черномору. Какое наибольшее количество монет может достаться Черномору, если:

а) жалованье между отрядами Черномор распределяет как ему угодно;

б) жалованье между отрядами Черномор распределяет поровну? (*И. В. Раскина, А. В. Хачатурян*)

7 класс

1. См. задачу 3 для 6 класса.

2. В квадрате закрашена часть клеток, как показано на рисунке 2. Разрешается перегнуть квадрат по любой линии сетки, а затем разогнуть обратно. Клетки, которые при перегибании совмещаются с закрашенными, тоже закрашиваются. Можно ли закрасить весь квадрат:

а) за 5 или менее;

б) за 4 или менее;

в) за 3 или менее таких перегибания?

(Если да, впишите в каждую клетку номер сгибания, после которого она будет закрашена впервые, линию сгиба проведите и пометьте той же цифрой. Если нет, докажите это.)

(*Т. И. Голенищева-Кутузова, М. А. Раскин, И. В. Ященко*)

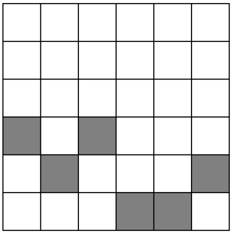

Рис. 2

3. Вокруг стола пустили пакет с семечками. Первый взял 1 семечку, второй — 2, третий — 3 и так далее: каждый следующий брал на одну семечку больше. Известно, что на втором круге было взято в сумме на 100 семечек больше, чем на первом. Сколько человек сидело за столом?

(*А. В. Шаповалов*)

4. Дима увидел в музее странные часы (рис. 3). Они отличаются от обычных часов тем, что на их циферблате нет цифр и вообще непонятно, где у часов верх; да еще секундная, минутная и часовая стрелки имеют одинаковую длину. Какое время показывали часы?

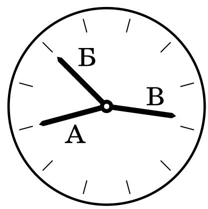

Рис. 3

(Стрелки А и Б на рисунке смотрят ровно на часовые отметки, а стрелка В чуть-чуть не дошла до часовой отметки.) (*Д. Э. Шноль*)

5. Три квадратные дорожки с общим центром отстоят друг от друга на 1 м (рис. 4). Три муравья стартуют одновременно из левых нижних углов дорожек и бегут с одинаковой скоростью: Му и Ра против часовой стрелки, а Вей по часовой. Когда Му добежал до правого нижнего угла большой дорожки, двое других, не успев еще сделать полного круга, находились на правых сторонах своих дорожек, и все трое оказались на одной прямой. Найдите стороны квадратов.

(*А. В. Шаповалов*)

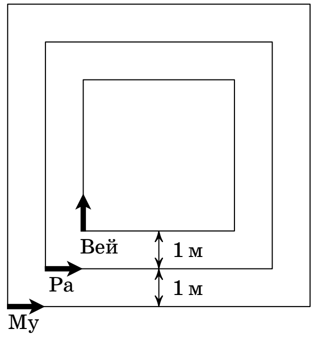

Рис. 4

6. Лиса Алиса и кот Базилио вырастили на дереве 20 фальшивых купюр и теперь вписывают в них семизначные номера. На каждой купюре есть 7 пустых клеток для цифр. Базилио называет по одной цифре «1» или «2» (других он не знает), а Алиса вписывает названную цифру в любую свободную клетку любой купюры и показывает результат Базилио.

Когда все клетки заполнены, Базилио берет себе как можно больше купюр с разными номерами (из нескольких с одинаковым номером он берет лишь одну), а остаток забирает Алиса. Какое наибольшее количество купюр может получить Базилио, как бы ни действовала Алиса?

(*А. В. Шаповалов*)

8 класс

1. Ваня записал несколько простых чисел, использовав ровно по одному разу все цифры от 1 до 9. Сумма этих простых чисел оказалась равной 225. Можно ли, использовав ровно по одному разу те же цифры, записать несколько простых чисел так, чтобы их сумма оказалась меньше?

(*И. А. Шейпак*)

2. Треугольник ABC равнобедренный ($AB = BC$). Точка M — середина стороны AB, точка P — середина отрезка CM, точка N делит сторону BC в отношении $3:1$ (считая от вершины B). Докажите, что $AP = MN$. (*Ю. А. Блинков*)

3. На занятии кружка 10 школьников решали 10 задач. Все школьники решили разное количество задач; каждую задачу решило одинаковое количество школьников. Один из этих десяти школьников, Боря, решил задачи с первой по пятую и не решил задачи с шестой по девятую. Решил ли он десятую задачу? (*Б. Р. Френкин*)

4. По кругу расставили 1000 чисел, среди которых нет нулей, и раскрасили их поочередно в белый и черный цвета. Оказалось, что каждое черное число равно сумме двух соседних с ним белых чисел, а каждое белое число равно произведению двух соседних с ним черных чисел.

Чему может быть равна сумма всех расставленных чисел? (*Б. Р. Френкин*)

5. Будем называть точку плоскости *узлом*, если обе ее координаты — целые числа. Внутри некоторого треугольника с вершинами в узлах лежит ровно два узла (возможно, какие-то еще узлы лежат на его сторонах). Докажите, что прямая, проходящая через эти два узла, либо проходит через одну из вершин треугольника, либо параллельна одной из его сторон. (*А. А. Полянский*)

6. На доске записано целое положительное число N. Два игрока ходят по очереди. За ход разрешается либо заменить число на доске на один из его делителей (отличных от единицы и самого числа), либо уменьшить число на единицу (если при этом число остается положительным). Тот, кто не может сделать ход, проигрывает. При каких N первый игрок может выиграть, как бы ни играл соперник?

(*А. В. Хачатурян*)

9 класс

1. На круглом столе через равные промежутки лежат пирожные. Игорь ходит вокруг стола и съедает каждое третье встреченное пирожное (каждое пирожное может быть встречено несколько раз). Когда на столе не осталось пирожных, он заметил, что последним взял пирожное, которое встретил первым, и прошел ровно 7 кругов вокруг стола. Сколько было пирожных? (*И. А. Кострикин*)

2. В треугольнике ABC, где угол B прямой, а угол A меньше угла C, проведена медиана BM. На стороне AC взята точка L так, что $\angle ABM = \angle MBL$. Описанная окружность треугольника BML пересекает сторону AB в точке N. Докажите, что $AN = BL$. (*А. А. Лопатников*)

3. Про положительные числа a, b, c, d, e известно, что

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = \\ = ab + ac + ad + ae + bc + bd + be + cd + ce + de.$$

Докажите, что среди этих чисел найдутся такие три, что не существует треугольника с такими длинами сторон.

(*И. И. Богданов*)

4. Разрежьте фигуру, изображенную на рисунке 5, на две равные части. (*Ши Вэй Ли*)

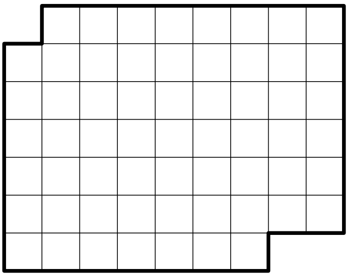

Рис. 5

5. Назовем точку на плоскости *узлом*, если обе ее координаты — целые числа. Дан треугольник с вершинами в узлах, внутри него расположено не меньше двух узлов. Докажите, что среди узлов внутри треугольника можно выбрать такие два узла, что проходящая через них прямая содержит одну из вершин треугольника или параллельна одной из сторон треугольника. (*А. А. Полянский*)

6. Сто мудрецов хотят проехать на электричке из 12 вагонов от первой до 76-й станции. Они знают, что на первой станции в два вагона электрички сядут два контролера. После четвертой станции на каждом перегоне один из контролеров будет переходить в соседний вагон, причем они ходят по очереди. Мудрец видит контролера, только если он в соседнем вагоне или через вагон. На каждой станции каждый мудрец может перебежать по платформе не далее чем на три вагона (например, из 7-го вагона мудрец может добежать до любого вагона с номером от 4 до 10 и сесть в него). Какое максимальное число мудрецов сможет ни разу не оказаться в одном вагоне с контролером, как бы контролеры ни перемещались? (Никакой информации о контролерах, кроме указанной в задаче, мудрец не получает. Мудрецы договариваются о стратегии заранее.) (*И. В. Нетай*)

10 класс

1. Даны два квадратных трехчлена со старшим коэффициентом 1. График одного из них пересекает ось Ox в точ-

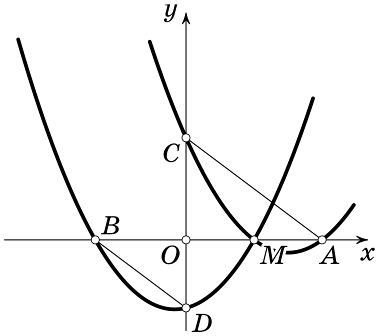

Рис. 6

ках A и M, а ось Oy — в точке C. График другого пересекает ось Ox в точках B и M, а ось Oy — в точке D. (Здесь O — начало координат; точки расположены как на рисунке 6.) Докажите, что треугольники AOC и BOD подобны.

(*А. Д. Блинков, Д. Э. Шноль*)

2. На длинной скамейке сидели мальчик и девочка. К ним по одному подошли еще 20 детей, и каждый из них садился между какими-то двумя уже сидящими. Назовем девочку *отважной*, если она садилась между двумя соседними мальчиками, а мальчика — *отважным*, если он садился между двумя соседними девочками. Когда все сели, оказалось, что мальчики и девочки сидят на скамейке, чередуясь. Сколько из них были отважными? (*Е. В. Бакаев*)

3. Дан правильный $4n$-угольник $A_1A_2\ldots A_{4n}$ площади S, причем $n > 1$. Найдите площадь четырехугольника $A_1A_nA_{n+1}A_{n+2}$. (*Ф. А. Ивлев, С. А. Николаев*)

4. В школе решили провести турнир по настольному теннису между математическими и гуманитарными классами. Команда гуманитарных классов состоит из n человек, команда математических — из m, причем $n \neq m$. Так как стол для игры всего один, было решено играть следующим образом. Сначала какие-то два ученика из разных команд начинают играть между собой, а все остальные участники выстраиваются в одну общую очередь. После каждой игры человек, стоящий в очереди первым, заменяет за столом члена своей команды, который становится в конец очереди.

Докажите, что рано или поздно каждый математик сыграет с каждым гуманитарием.

(*А. С. Бердников, И. В. Митрофанов*)

5. Дана функция $f(x)$, значение которой при любом целом x целое. Известно, что для любого простого числа p существует такой многочлен $Q_p(x)$ степени, не превышающей 2013, с целыми коэффициентами, что $f(n) - Q_p(n)$ делится на p при любом целом n. Верно ли, что существует многочлен $g(x)$ с вещественными коэффициентами такой, что $g(n) = f(n)$ для любого целого n? (*И. И. Богданов*)

6. Пусть I — центр вписанной окружности неравнобедренного треугольника ABC. Через A_1 обозначим середину дуги BC описанной окружности треугольника ABC, не содержащей точки A, а через A_2 — середину дуги BAC. Перпендикуляр, опущенный из точки A_1 на прямую A_2I, пересекает прямую BC в точке A'. Аналогично определяются точки B' и C'.

а) Докажите, что точки A', B' и C' лежат на одной прямой.

б) Докажите, что эта прямая перпендикулярна прямой OI, где O — центр описанной окружности треугольника ABC. (*Ф. А. Ивлев*)

11 класс, первый день

1. Два приведенных квадратных трехчлена имеют общий корень, а дискриминант их суммы равен сумме их дискриминантов. Докажите, что тогда дискриминант хотя бы одного из этих двух трехчленов равен нулю. (*Д. В. Горяшин*)

2. Найдите все пары простых чисел p и q, обладающие следующим свойством: $7p+1$ делится на q, а $7q+1$ делится на p. (*Д. В. Горяшин*)

3. Дан такой выпуклый четырехугольник $ABCD$, что $AB = BC$ и $AD = DC$. Точки K, L и M — середины отрезков AB, CD и AC соответственно. Перпендикуляр, проведенный из точки A к прямой BC, пересекается с перпендикуляром, проведенным из точки C к прямой AD, в точке H. Докажите, что прямые KL и HM перпендикулярны.

(*А. А. Лопатников*)

4. Можно ли так раскрасить все клетки бесконечной клетчатой плоскости в белый и черный цвета, чтобы каждая вертикальная прямая и каждая горизонтальная прямая пересекали конечное число белых клеток, а каждая наклонная прямая — конечное число черных? (*А. А. Лопатников*)

5. Три спортсмена стартовали одновременно из точки A и бежали по прямой в точку B каждый со своей постоянной скоростью. Добежав до точки B, каждый из них мгновенно повернул обратно и бежал с другой постоянной скоростью к финишу в точке A. Их тренер бежал рядом и все время находился в точке, сумма расстояний от которой до участников забега была наименьшей. Известно, что расстояние от A до B равно 60 м и все спортсмены финишировали одновременно. Мог ли тренер пробежать меньше 100 м?

(*Б. Б. Беднов, О. Н. Косухин*)

6. Две команды шахматистов одинаковой численности сыграли матч: каждый сыграл по одному разу с каждым из другой команды. В каждой партии давали 1 очко за победу, $\frac{1}{2}$ — за ничью и 0 — за поражение. В итоге команды набрали поровну очков. Докажите, что какие-то два участника матча тоже набрали поровну очков, если в обеих командах было: а) по 5 шахматистов; б) произвольное равное число шахматистов. (*А. В. Шаповалов*)

11 класс, второй день

1. Два пирата делили добычу, состоящую из пяти золотых слитков, масса одного из которых 1 кг, а другого — 2 кг. Какую массу могли иметь три других слитка, если известно, что какие бы два слитка ни выбрал себе первый пират, второй пират сможет так разделить оставшиеся слитки, чтобы каждому из них досталось золота поровну?

(*П. А. Бородин, Б. Б. Беднов*)

2. Найдите такое значение $a > 1$, при котором уравнение $a^x = \log_a x$ имеет единственное решение. (*Фольклор*)

3. Сравните числа

$$\left(1+\frac{2}{3^3}\right)\left(1+\frac{2}{5^3}\right)\ldots\left(1+\frac{2}{2013^3}\right) \quad \text{и} \quad \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

(*Д. В. Горяшин*)

4. Известно, что всякую треугольную пирамиду, противоположные ребра которой попарно равны, можно так разрезать вдоль трех ее ребер и развернуть, чтобы ее разверткой стал треугольник без внутренних разрезов (рис. 7). Найдется ли еще какой-нибудь выпуклый многогранник, который можно так разрезать вдоль нескольких его ребер и развернуть, чтобы его разверткой стал треугольник без внутренних разрезов? (*О. Н. Косухин*)

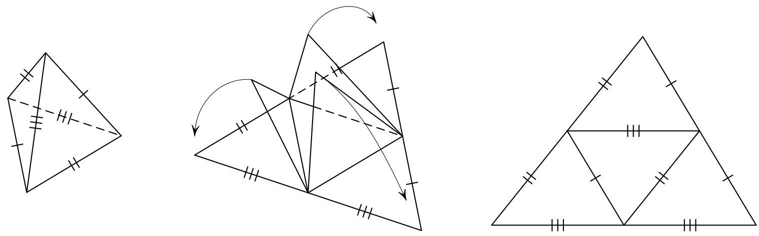

Рис. 7

5. Саша написал по кругу в произвольном порядке не более ста различных натуральных чисел, а Дима пытается угадать их количество. Для этого Дима сообщает Саше в некотором порядке несколько номеров, а затем Саша сообщает Диме в том же порядке, какие числа стоят под указанными Димой номерами, если считать числа по часовой стрелке, начиная с одного и того же числа. Сможет ли Дима заведомо угадать количество написанных Сашей чисел, сообщив

а) 17 номеров;

б) менее 16 номеров? (*О. Н. Косухин*)

6 класс

1. *Ответ*. Да.

Решение. Это могло быть число 0,2. В самом деле, $0{,}2 \times \times 10 = 2$ и $0{,}2 \cdot 15 = 3$ — простые числа.

Комментарий. Можно доказать, что приведенный пример единственный. Пусть Вася получил число p, а Петя — число q. По условию задачи $\frac{p}{10} = \frac{q}{15}$. Отсюда $3p = 2q$. Значит, p — четное простое число, т. е. $p = 2$, $q = 3$, а исходное число $\frac{p}{10} = \frac{q}{15} = 0{,}2$.

2. *Ответ*. 150.

Решение. Цифры Й и Х четные, потому что ЭХ и АЙ делятся на 4. Числа ОЙ и ОХ меньше, чем 25, иначе, будучи умноженными на 4, они перестанут быть двузначными. Значит, О = 2 или О = 1. Рассмотрим первый случай. Число 20 в качестве ОХ или ОЙ не годится, так как 80 кончается на ту же цифру. Не годится и 22 с одинаковыми цифрами. Остается только 24, но числа ОЙ и ОХ должны быть различными.

Итак, О = 1. Число 10 не подходит по той же причине, что и 20. Взяв ОХ = 16, получим АЙ = 64, но тогда А = Х, чего быть не должно. По той же причине ОЙ = 16 также невозможно. Взяв ОХ = 14, найдем АЙ = 56, тогда ОЙ = 16, а это, как мы видели, невозможно. Итак, ОХ и ОЙ могут быть равны только 12 и 18 (в любом порядке), а ЭХ и АЙ тогда равны 48 и 72 соответственно. Находим сумму: $12 + 48 + 18 + 72 = 150$.

Комментарий. Ответ можно получить, не находя самих чисел. Как мы знаем, О = 1, а цифры Й и Х четные. С другой стороны, если к любому четному числу прибавить число, в 4 раза большее, то получится число, делящееся на 10. Следовательно, Й + Х = 10. Тогда ОЙ + ОХ = 10 + 10 + 10 = 30, а сумма всех четырех чисел в пять раз больше, т. е. 150.

3. *Ответ*. 400 г.

Решение. Если два одинаковых пса ухватят колбасу с двух сторон, между ними будет кусок в 300 г. Если два одинаковых кота ухватят колбасу с двух сторон, между ними будет кусок в 500 г (рис. 8).

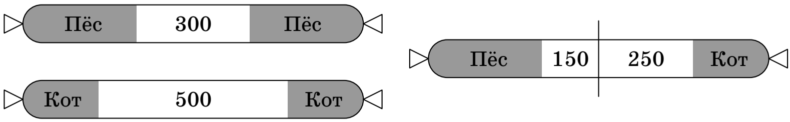

Рис. 8

Видно, что пес откусывает на $(500 - 300) : 2 = 100$ г больше, чем кот. Значит, когда пес и кот откусят свои куски и убегут, останется $300 + 100 = 400$ г колбасы.

Можно рассуждать иначе. Пес собирается откусить от батона на 300 г меньше, чем оставить. Если бы он откусил на 150 г больше, оставив на 150 г меньше, то ему досталась бы ровно половина всей колбасы. Аналогично, коту досталась бы половина всей колбасы, если бы он откусил на 250 г больше, чем собирался. При этом вся колбаса была бы съедена, поэтому остаток весит $150 + 250 = 400$ г.

Комментарий. Задачу можно решить и алгебраически (см. решения задач для седьмого класса).

4. *Ответ*. 7.

Решение. Понятно, что за столом были и мальчики, и девочки. Посмотрим, как сидели дети. За группой сидящих рядом мальчиков следует группа девочек, затем снова мальчики, снова девочки и так далее (группа может состоять и из одного человека). Группы мальчиков и девочек чередуются, поэтому их четное число. Неверные утверждения звучали на переходах от группы к группе, то есть их тоже четное число. Так как утверждений «большинство из нас мальчики» прозвучало семь, то неверны шесть утверждений «большинство из нас девочки», и групп тоже было шесть.

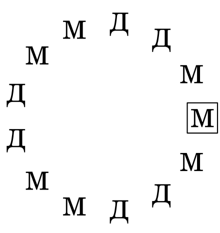

Рис. 9

Чередование верных и неверных утверждений означает, что в группах было по двое детей. Лишь сидящие рядом первый и последний ребенок сказали одно и то же, поэтому в их группе три человека. Это мальчики, так как их большинство. Всего за столом сидели $2 + 2 + 2 = 6$ девочек и $2 + 2 + 3 = 7$ мальчиков.

На рисунке 9 показано, как именно ребята сидели за столом. Первый говорящий обведен в рамочку.

5. *Ответ*. На рисунке 10 приведен пример для 9 графств.

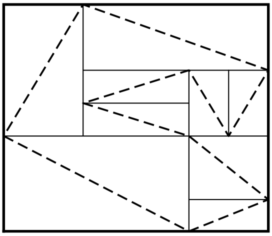

Рис. 10

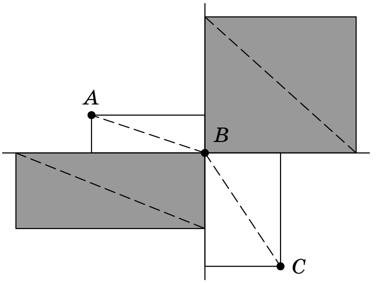

Рис. 11

Комментарий. Покажем, что для 7 графств (или меньше) примера не существует, заодно указав свойство, характерное для всех таких примеров.

Все дороги можно поделить на два типа: одни дороги соединяют левый верхний угол графства с правым нижним, а другие — левый нижний с правым верхним. Если бы при прохождении замкнутого пути дороги разных типов всегда чередовались, их общее количество было бы четным (совсем как групп мальчиков и девочек в предыдущей задаче). На Большом острове, где число графств нечетно, обязательно, стало быть, будут две дороги одного типа подряд.

Пусть, например, подряд идут дороги AB и BC одного типа (рис. 11). Помимо графств, в которых они проведены, к вершине B примыкают еще два, закрашенных серым цветом. Дороги в этих графствах по условию не проходят через точку B. Проведем их.

Теперь на рисунке четыре дороги. Чтобы всего их было семь, нужно тремя отрезками соединить их в единую цепь. Для этого придется соединять отрезком какие-то два конца дорог в «серых графствах», а это невозможно.

6. *Ответ*. а) 31 монета; б) 30 монет.

Решение. С каждого отряда в N богатырей Черномор получит в лучшем случае $N-1$ монету, так как остаток меньше делителя. Значит, всего он получит не более чем $33-K$ монет, где K — число отрядов. Получит ли Черномор 32 монеты, если отряд всего один? Нет, так как $240:33=7$ (ост. 9), так что Черномору достанется лишь 9 монет. Он может попытаться получить 31 монету, разделив богатырей на два отряда.

Если (пункт а) деньги делить не обязательно поровну, то это вполне можно сделать. Например, пусть в первом отряде 32 богатыря, а во втором всего один. Тогда можно дать первому отряду 63 монеты (из которых Черномор и получит 31), а остальные 177 монет отдать единственному богатырю из второго отряда. Есть и много других способов дележа.

Однако если (пункт б) деньги делить поровну, то так сделать не удастся. Чтобы показать это, конечно, можно перебрать все варианты разделения богатырей на два отряда, но можно поступить проще. Если, выдав отряду в N человек 120 монет, Черномор рассчитывает получить $N-1$ монету, то число 121 должно делиться на N. Однако 121 делится только на 1, 11 и 121, а из двух таких чисел невозможно сложить 33.

А вот получить в пункте б) 30 монет удастся, если поделить богатырей на три отряда и выдать каждому отряду по $240:3=80$ монет. Численность каждого отряда должна быть делителем числа $80+1=81$. Из трех делителей числа 81 сложить 33 можно: $33=27+3+3$. Проверим: с отрядов из трех человек Черномор получит по 2 монеты, а с отряда в 27 человек — 26 монет, всего $26+2+2=30$.

7 класс

1. *Ответ*. 400 г.

Решение. См. решения задачи 3 для 6 класса.

Задачу можно решить и алгебраически. Пусть пес собирается откусить на d грамм больше, чем кот, а кусок между псом и котом весит x грамм. По условию

$$\begin{cases} x-d=300, \\ x+d=500. \end{cases}$$

Значит,

$$(x-d)+(x+d)=300+500,$$

то есть $2x=800$, а $x=400$.

2. *Ответ*. Можно (даже за 3 перегибания).

Решение. Можно, например, закрасить двумя вертикальными перегибаниями всю нижнюю половину доски, после чего закрасить верхнюю половину одним горизонтальным перегибанием — см. рис. 12. (Есть и другие решения.)

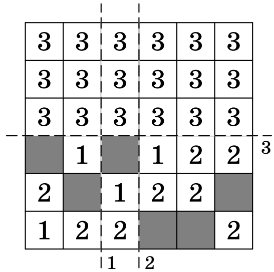

Рис. 12

Комментарий. Закрасить все клетки за 2 перегибания нельзя. Действительно, при каждом перегибании количество клеток увеличивается не более чем в 2 раза. Вначале закрашенных клеток 6; значит, после двух перегибаний будет закрашено не более $6 \cdot 2 \cdot 2 = 24$ клеток из 36.

3. *Ответ*. 10 человек.

Решение. Пусть за столом сидело n человек. Тогда первый на втором круге взял $n+1$ семечку, второй $n+2$ — и вообще каждый взял на n семечек больше, чем на первом. Все вместе на втором круге взяли на $n \cdot n = n^2$ больше семечек, чем на первом. Так как $n^2 = 100$, то $n = 10$.

4. *Ответ*. Без десяти пять.

Решение. Подумаем, какая из стрелок часовая. Если бы часовая стрелка смотрела ровно на часовую отметку, минутная и секундная стрелка смотрели бы ровно на отметку «12» — но на картинке нет совпадающих стрелок. Значит, часовая стрелка — стрелка В.

Оставшиеся 2 стрелки указывают ровно на часовые отметки, поэтому сейчас сколько-то часов и целое число минут — в частности, секундная стрелка указывает на 12.

Если секундная стрелка — стрелка А, то на часах немного меньше семи часов (судя по часовой стрелке), а с другой стороны — сейчас на 10 минут больше, чем сколько-то часов (судя по минутной). Так быть не может.

Если же секундная стрелка — стрелка Б, то на часах около пяти часов (судя по часовой стрелке), а судя по минутной стрелке — на 10 минут меньше, чем сколько-то часов. Значит, на часах без десяти пять.

5. *Ответ*. 4 м, 6 м, 8 м.

Решение. Длины сторон двух соседних дорожек отличаются на 2 м (рис. 13). Поэтому в момент, когда Му добежал до угла, Ра пробежал по правой стороне дорожки 2 м

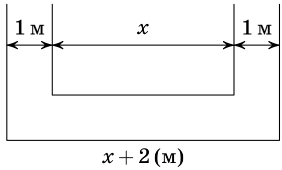

Рис. 13

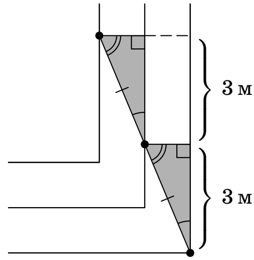

Рис. 14

и находился на расстоянии $2 + 1 = 3$ м от «нижней» стороны внешней дорожки. Поскольку Ра находится посредине между Му и Веем, Вей в этот момент находится на вдвое большем расстоянии от этой стороны, 6 м (так как два выделенных на рисунке 14 прямоугольных треугольника равны по гипотенузе и углам). То есть Вею остается еще пробежать по боковой стороне $6 - 1 - 1 = 4$ м.

Но если бы Вей бежал против часовой стрелки, то он пробежал бы всю нижнюю сторону и еще 4 м по правой стороне (так как эта сторона на 4 м короче стороны внешнего квадрата), т. е. оказался бы в той же точке. Раз Вей попадает в одну и ту же точку, двигаясь и по часовой стрелке, и против часовой стрелки, эта точка — правый верхний угол квадрата. То есть сторона этого квадрата равна 4 м. Соответственно, стороны двух других квадратов равны $4 + 2 = 6$ м и $6 + 2 = 8$ м.

6. *Ответ*. 2.

Решение. Две купюры Базилио всегда может получить: он знает место, куда должна быть вписана самая последняя цифра, и называет ее так, чтобы она отличалась от цифры на таком же месте у какой-нибудь другой купюры. Тогда у этих двух купюр номера будут разные, и кот сможет их взять.

Покажем, как Алиса может добиться, чтобы разных номеров было не больше двух. Она располагает купюры одну над другой, чтобы клетки для цифр образовали таблицу.

Когда кот называет единицу, Алиса вписывает ее в самый левый столбец, где есть свободная клетка (в любую из клеток), а когда кот называет двойку — в самый правый.

Если в какой-то столбец начали попадать и единицы, и двойки, то все остальные столбцы уже заполнены: слева — единицами, справа — двойками. Значит, будет максимум один столбец, куда попадут и единицы, и двойки. Поэтому если номера и отличаются, то только цифрой в этом столбце. Но так как цифр только две, то и разных номеров не больше двух.

$$
\begin{array}{ccccccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\
1 & 1 & 1 & \boxed{} & 2 & 2 & 2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
1 & 1 & 1 & \boxed{} & 2 & 2 & 2 \\
1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2
\end{array}
$$

8 класс

1. *Ответ*. Да, можно получить сумму 207. Например, $207 = 2 + 3 + 5 + 41 + 67 + 89$, $207 = 2 + 3 + 5 + 47 + 61 + 89$ или $207 = 2 + 5 + 7 + 43 + 61 + 89$.

Комментарии. 1. Все четные цифры, кроме цифры «2», должны стоять в разряде десятков (иначе соответствующее число не будет простым). Сумма будет наименьшей, если все остальные числа будут стоять в разряде единиц; можно показать, что в остальных случаях сумма будет не меньше 225.

2. Других примеров нет (доказывать это от участников не требовалось; достаточно было привести один пример).

2. *Решение*. Пусть M' — середина стороны BC, точка N' делит сторону AB в отношении $3:1$, считая от вершины B (рис. 15). Ясно, что $MN = M'N'$ (так как треугольники BMN и $BM'N'$ равны).

Теперь достаточно доказать, что четырехугольник $APM'N'$ — параллелограмм. Но действительно, его противоположные стороны PM' и AN' равны и параллельны: отрезок $M'P$ является средней линией треугольника CBM, поэтому он параллелен отрезку BM и равен его половине — т. е. отрезку AN'.

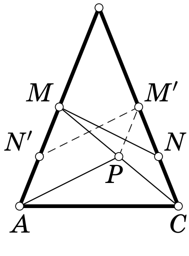

Рис. 15

3. *Ответ*. Да.

Решение. Если бы школьников было 11 и они решили разное количество задач, то были бы реализованы все возможные варианты (от 0 до 10 задач) и всего было бы решено $0+1+\ldots+10=55$ задач. Так как школьников десять, то отсутствует один из вариантов, и количество решений равно $55-x$, где x — целое число от 0 до 10.

Поскольку каждая из 10 задач решена одинаковым количеством школьников, количество решений всех задач кратно 10. Поэтому $x=5$, то есть нет школьника, решившего ровно 5 задач. Так как Боря решил задачи с первой по пятую, он решил еще хотя бы одну задачу, и это может быть только десятая.

4. *Ответ*. 375.

Первое решение. Пусть стоящие по кругу числа суть a_1, a_2, ..., a_{1000}, причем черные числа имеют нечетные номера, а белые — четные. Тогда $a_4=a_3-a_2=a_3-a_1a_3=a_3(1-a_1)$. В то же время $a_4=a_3a_5$. Поскольку числа ненулевые, отсюда следует, что $a_5=1-a_1$, т. е. $a_1+a_5=1$. Аналогично, сумма любых двух черных чисел, номера которых отличаются на 4, равна 1. Все черные числа разбиваются на такие пары, количество этих пар равно 250, поэтому сумма всех черных чисел равна 250.

Теперь подсчитаем сумму черных чисел по-другому:

$$a_1+a_3+\ldots+a_{999}=(a_{1000}+a_2)+(a_2+a_4)+\ldots=$$
$$=2(a_2+a_4+\ldots),$$

т. е. сумма черных чисел равна удвоенной сумме белых. Значит, сумма белых чисел равна 125, а общая сумма равна $250+125=375$.

Второе решение. Обозначим два соседних черных числа через a и b и начнем выписывать стоящие по кругу числа, начиная с a:

$$a,\ ab,\ b,\ (1-a)b,\ 1-a,\ (1-a)(1-b),\ 1-b,\ a(1-b),\ a,\ ab,\ \ldots$$

Получаем, что последовательность периодична с периодом 8. Остается заметить, что сумма чисел на каждом из периодов равна 3. А всего периодов 125. Значит, сумма равна $125\cdot 3=375$.

Комментарий. Из второго решения видно, что такие расстановки чисел действительно существуют: можно взять произвольные a и b (не равные 0 и 1) и продолжить последовательность, как в решении. В частности, можно взять $a = b = 1/2$, тогда получится пример, в котором все черные числа равны $1/2$, а все белые равны $1/4$.

5. *Комментарий.* Не стоит думать, что такие два узла обязательно соседние по стороне или диагонали — см., например, рис. 16 (вообще эти два узла могут находиться на сколь угодно большом расстоянии).

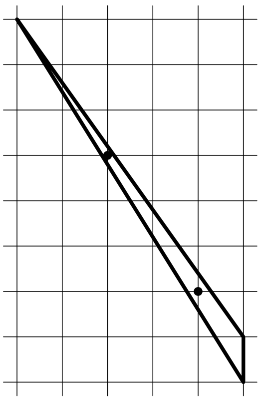

Рис. 16

Решение. Проведем через эти два узла, X и Y, прямую. Если она не проходит ни через одну из вершин треугольника, то она пересекает ровно две его стороны. Пусть она не пересекает сторону AB.

Первый способ. Предположим, что продолжение отрезка XY за точку X пересекает продолжение стороны AB за точку A (рис. 17). Построим параллелограмм $AXYZ$ (другими словами, сдвинем точку A на вектор XY). Так как три из вершин этого параллелограмма лежат в узлах, то и его четвертая вершина, Z, является узлом[1] — еще одним узлом, лежащим

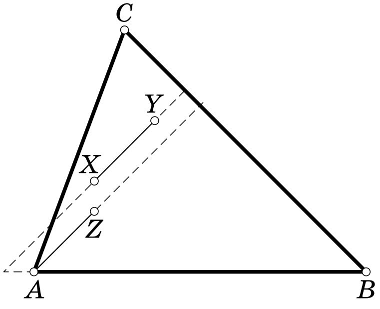

Рис. 17

[1]Действительно, если узел A имеет координаты (a_1, a_2), узел X — (x_1, x_2), а узел Y — $(x_1 + d_1, x_2 + d_2)$, то узел Z имеет координаты $(a_1 + d_1, a_2 + d_2)$.

внутри треугольника ABC. Полученное противоречие доказывает, что прямая XY параллельна прямой AB.

(Точка Z лежит внутри треугольника, поскольку из всех отрезков внутри треугольника, параллельных данному, наибольшую длину имеет отрезок, один конец которого совпадает с вершиной, а другой лежит на противоположной стороне.)

Второй способ. Напомним *формулу Пика*[1]: площадь произвольного многоугольника с вершинами в узлах равна $i + \frac{b}{2} - 1$, где i — число узлов внутри многоугольника, а b — на его границе (включая вершины).

Так как внутри треугольников AXB и AYB нет узлов (действительно, если бы узел Y лежал внутри треугольника AXB, то прямая XY пересекала бы сторону AB), из формулы Пика видно, что они имеют равные площади. Значит, вершины X и Y находятся на равных расстояниях от прямой AB, т. е. прямая XY параллельна прямой AB (рис. 18).

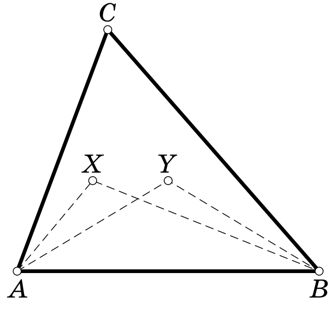

Рис. 18

Третий способ (набросок). Рассмотрим среди прямых, параллельных XY и проходящих через узлы решетки, две ближайшие к прямой XY. Можно показать, что если треугольник не содержит других узлов, то он лежит в полосе между этими двумя прямыми. Поэтому либо одна из вершин треугольника лежит на прямой XY, либо на одной из границ полосы лежат две вершины треугольника (то есть прямая XY параллельна одной из сторон треугольника).

[1] Подробнее о ней можно прочитать в статьях [1, 2].

Литература. [1] *Н. Б. Васильев*. Вокруг формулы Пика // Квант. — 1974. — № 12. — С. 39—43.

[2] *А. Кушниренко*. Целые точки в многоугольниках и многогранниках // Квант. — 1977. — № 4. — С. 13—20.

6. *Ответ*. При $N=2$, $N=17$, а также при всех составных N, кроме $N=16$, $N=34$ и $N=289$.

Решение. Будем называть число *выигрышным*, если для соответствующего N выигрывает первый, и *проигрышным*, если второй. Число является выигрышным тогда и только тогда, когда *существует* ход из него в проигрышное число, а проигрышным — тогда и только тогда, когда *любой* ход из него ведет в выигрышное число[1].

Пользуясь этим утверждением, можно, рассматривая натуральные числа последовательно, выяснить про любое конкретное число, является оно выигрышным или проигрышным: число 1 проигрышное, число 2 выигрышное, число 3 прогрышное (так как единственный ход ведет из него в выигрышное число 2), число 4 выигрышное (так как из него есть ход в проигрышное число 3) и так далее:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	…
П	В	П	В	П	В	П	В	В	В	П	В	П	В	П	…

При взгляде на эту таблицу возникает гипотеза, что все составные числа являются выигрышными, а все простые (кроме, конечно, 2) являются проигрышными — тем более что как раз из любого составного числа существует ход в простое, а из любого простого числа, большего 3, можно пойти только в составное.

Но если составное число является, например, степенью двойки, то никакого хода из него в проигрышное простое число может не быть. И если для числа 4 есть ход в проигрышное простое число 3, а для числа 8 — в 7, то число 16 уже является проигрышным — а следовательно, простое число 17 является выигрышным. Дальше число 34 является хоть и составным, но проигрышным (все три хода из него — в 2, в 17 и в 33 — ведут в выигрышные числа) —

[1]Это совершенно общее утверждение о выигрышных и проигрышных позициях в равноправной игре. Прочитать об этом подробнее можно, например, в брошюре [1].

и априори неясно, будет ли количество таких исключений конечным или бесконечным.

Тем не менее, докажем, что 2 и 17 — единственные выигрышные простые числа. Предположим, что это не так, и рассмотрим следующее выигрышное простое число p. В таком случае $p-1$ — проигрышное составное число, поэтому среди делителей числа $p-1$ не может быть проигрышных простых чисел, т. е. $p-1=2^n\cdot 17^k$. Но

- если $p-1=2^n\cdot 17^k$ $(n,\, k>1)$, то от $p-1$ можно перейти к 34 и выиграть;
- если $p-1=2^n$, то от $p-1$ можно перейти к 16 и выиграть;
- наконец, случай $p-1=17^k$ невозможен, так как число $p-1$ четно.

Осталось разобраться с составными числами. Если составное число N имеет простой делитель p, отличный от 2 и 17, то из него есть ход в проигрышное число p, т. е. число N является выигрышным. Если же $N=2^n\cdot 17^k$, то

- если $N=2\cdot 17=34$, то число N проигрышное;
- если $N=2^n\cdot 17^k$ $(n,\, k>1)$, то от N можно перейти к 34 и выиграть;
- случаи $N=2^n$ $(n\leqslant 4)$ разобраны в таблице выше;
- если $N=2^n$ $(n>4)$, то от N можно перейти к 16 и выиграть;
- если $N=17^2=289$, то число N проигрышное;
- если $N=17^k$ $(k>2)$, то от N можно перейти к 17^2 и выиграть.

Итак, мы получили заявленный перед решением ответ.

Литература. [1] *А. Шень*. Игры и стратегии с точки зрения математики. — М.: МЦНМО, 2008.

9 класс

1. *Ответ*. 9.

Решение. Заметим, что если бы на столе было одно пирожное, то Игорь прошел бы два полных круга. Будем считать, что Игорь начинает отсчет кругов с пирожного. Если бы пирожных было 4, Игорь прошел бы ровно пять кругов (см. рисунок). Пусть число пирожных на столе делится на три. Тогда за первый круг Игорь съедает каждое третье пирожное и возвращается в исходное положение. Таким образом, после одного круга пирожных становится $2/3$ от того количества, что было на столе. Значит, если бы пирожных было 6, Игорь прошел бы ровно шесть кругов, и если бы пирожных было 9, Игорь прошел бы ровно семь кругов, как в условии задачи.

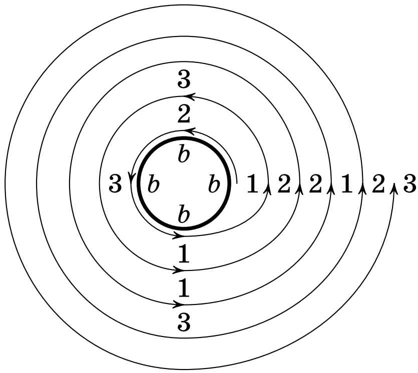

Рис. 19

Покажем, что ответ в задаче единственный. Если пирожных больше девяти, то Игорь пройдет какое-то расстояние до того, как пирожных останется ровно 9, после чего дойдет до ближайшего пирожного и сделает ровно семь кругов. Значит, всего он прошел больше семи кругов. Если же пирожных меньше девяти, а именно k, то пусть Игорь начинает с пирожного A. Расставим на стол еще $9-k$ пирожных, двигаясь против хода Игоря: первое — в промежутке между A и следующим пирожным, каждое следующее — через два пирожных от предыдущего. Тогда если Игорь начинает за два пирожных до последнего поставленного пирожного, то он сделает ровно девять кругов, а через $9-k$ съеденных пирожных он дойдет до пирожного A. Значит, если пирожных $k<9$, то и кругов он сделает меньше семи.

2. *Первое решение.* 1) Так как BM — медиана в прямоугольном треугольнике, то $BM=CM=AM$ (рис. 20). Значит, треугольник AMB равнобедренный, т. е. $\angle ABM = \angle BAM$ и $AM=BM$.

2) По условию $\angle ABM = \angle MBL$, значит, $\angle MAN = \angle MBL$.

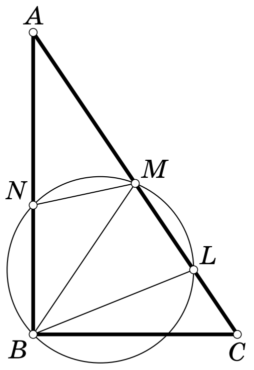

Рис. 20

3) Во вписанном четырехугольнике $BLMN$ сумма углов MNB и MLB равна 180°. Также сумма углов MNA и MNB равна 180°, так как они смежные. Значит, $\angle MNA = \angle MLB$.

4) Таким образом, треугольники AMN и BML равны по двум углам и стороне. Значит, $AN = BL$ как соответствующие стороны этих треугольников.

Второе решение. 1) Так как BM — медиана в прямоугольном треугольнике, то $BM = CM = AM$. Значит, треугольник AMB равнобедренный, т. е. $\angle ABM = \angle BAM$ и $AM = BM$.

2) Во вписанном четырехугольнике $BLMN$ углы $\angle NBM$ и $\angle NLM$ опираются на одну дугу, а значит, они равны. Поэтому $\angle NLM$ и $\angle NAL$ также равны. Значит, треугольник ANL равнобедренный и $AN = LN$.

3) Из предыдущего пункта следует, что $\angle ANL = 180^\circ - 2\angle NAM$, следовательно, $\angle BNL = 2\angle BAM$ как смежный. По условию $\angle NBL = 2\angle NBM$, значит, $\angle BNL = \angle NBL$. Поэтому треугольник NLB равнобедренный, т. е. $NL = BL$.

4) Из пунктов 2 и 3 следует, что $AN = LN = BL$.

3. *Решение.* Допустим, что для каждых трех из этих чисел существует треугольник с такими длинами сторон. Тогда имеют место неравенства $a < b + c$, $b < c + d$, $c < d + e$, $d < e + a$ и $e < a + b$. Поскольку числа a, b, c, d, e положительные, из этих неравенств следуют неравенства $a^2 < ab + ac$, $b^2 < bc + bd$, $c^2 < cd + ce$, $d^2 < de + ad$ и $e^2 < ae + be$. Складывая, получаем

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 < \\ < ab + ac + ad + ae + bc + bd + be + cd + ce + de.$$

Мы пришли к противоречию.

Комментарий. Похожим образом можно решить более сложную задачу.

Про положительные числа a, b, c, d, e известно, что

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = ab + ac + ad + ae + bc + bd + be + cd + ce + de.$$

Докажите, что всегда найдутся по крайней мере шесть троек из этих чисел, для каждой из которых не существует треугольника с такими длинами сторон.

Предлагаем читателю самостоятельно решить эту задачу.

4. *Ответ*. См. рис. 21.

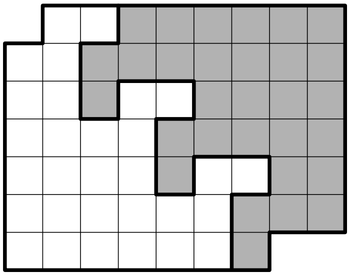

Рис. 21

Комментарий. Попробуем разрезать прямоугольник по линиям сетки. Тогда угловые клетки прямоугольника должны быть в разных частях и соответствовать друг другу. Перевести одну из этих клеток в другую можно либо поворотом на 90°, либо скользящей симметрией. Непосредственной проверкой убеждаемся, что первый способ не позволяет получить нужного разрезания, а второй приводит к разрезанию на рисунке.

5. *Первое решение*. Возьмем два узла X и Y внутри треугольника и проведем через них прямую s. Если эта прямая параллельна одной из сторон треугольника, либо проходит через одну из вершин треугольника, то все доказано. Иначе проведем через каждую вершину треугольника прямую, параллельную s. Получится, что никакие из этих трех прямых не совпадают. Одна из этих прямых лежит с одной стороны от s, вторая и третья — с другой, так как если бы все три прямые оказались с одной стороны от s, то узлы X и Y не могли бы лежать в треугольнике. Обозначим вершины треугольника и проходящие через них прямые таким образом, чтобы вершина A и проходящая через нее прямая a были с одной стороны от s, вершины B и C с проходящими через них прямыми b и c — соответственно с другой, причем прямая b ближе к прямой s, чем прямая c. Пусть K — точка пересечения прямой s и стороны AB, L — точка пересечения прямой s и стороны AC, M — точка пересечения прямой b и стороны AC. Заметим, что отрезок BM длиннее отрезка KL, при этом X и Y лежат на отрезке KL.

Теперь обратим внимание на следующий факт. Пусть X, Y и Z — узлы, а $XYZW$ — параллелограмм. Тогда W — тоже узел. Действительно, пусть у X координаты (x_1, x_2), у Y координаты (y_1, y_2), у Z координаты (z_1, z_2), тогда у W координаты $(x_1 + z_1 - y_1, x_2 + z_2 - y_2)$. Значит, если $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$ — целые, то и координаты W целые.

Отложим от B на луче BM отрезок, равный отрезку XY. Мы получим точку Z на отрезке BM. Поскольку отрезок BM параллелен отрезку XY, то $XYBZ$ либо $YXBZ$ — параллелограмм, а, значит, Z — узел внутри треугольника.

Для определенности пусть $XYBZ$ — параллелограмм (иначе поменяем местами обозначения X и Y). Отметим на луче BY точку Y' такую, что $BY' = 2BY$, а на луче BZ — точку Z' такую, что $BZ' = 2BZ$. Точки Y' и Z' — узлы, так как $YY'ZX$ и $ZZ'YX$ — параллелограммы. Треугольники YBZ, XZZ' и $Y'YX$ равны, так как их соответствующие стороны равны и параллельны. Значит, углы $Y'XY$ и $XZ'Z$ равны, следовательно, точки Y', X и Z' лежат на одной прямой, причем точка X лежит на отрезке $Y'Z'$. Но точка X лежит с той же стороны от прямой AC, что и B. Значит, хотя бы одна из точек Y' и Z' лежит с той же стороны от прямой AC, что и B (иначе весь отрезок $Y'Z'$ лежал бы с другой стороны). Если эта точка — Y', то выбираем узлы Y' и Y внутри треугольника, и прямая, проходящая через них, проходит через вершину B. Иначе эта точка — Z', тогда выбираем узлы Z' и Z внутри треугольника, и прямая, проходящая через них, проходит через вершину B.

Второе решение. Рассмотрим данный треугольник ABC и узел X внутри него. Через X проведем три прямые, параллельные сторонам треугольника. Таким образом, треугольник ABC разбивается на три треугольника и три параллелограмма (рис. 22). Каждый из оставшихся узлов внутри треугольника может быть либо на одной из трех проведенных прямых, либо в одном из трех треугольников, либо в одном из трех параллелограммов, при этом в $\triangle ABC$ есть еще хотя бы один узел Z. Разберем эти случаи.

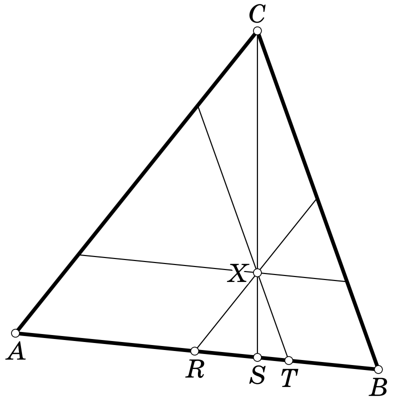

Рис. 22

Если Z лежит на одной из трех прямых, то прямая XZ параллельна одной из сторон по построению.

Допустим, Z лежит в одном из параллелограммов. Проведем через Z три прямые, параллельные сторонам треугольника. Тогда X относительно Z лежит в одном из трех треугольников. Заменой обозначений X и Z приходим к следующему случаю.

Допустим, Z лежит внутри одного из треугольников, скажем, TRX (для других двух — аналогично). Обозначим точку пересечения CX и AB буквой S. Имеет место один из следующих двух случаев.

- $CX \geqslant XS$. Тогда вектор $\overrightarrow{XZ}$ целочисленный, и обе точки $Z' = C + \overrightarrow{XZ}$ и $Z'' = C + 2\overrightarrow{XZ}$ лежат внутри ABC. Обе эти точки являются узлами, так что пара (Z', Z'') — искомая.
- $CX < XS$. Тогда вектор $\overrightarrow{CX}$ целочисленный, и узел $Z''' = X + \overrightarrow{CX}$ лежит внутри $\triangle ABC$. В этом случае подходит пара узлов (X, Z''').

Таким образом, при любом расположении узла Z в $\triangle ABC$ мы построили искомую пару узлов.

6. *Ответ*. 82 мудреца.

Решение. По принципу Дирихле есть хотя бы два вагона, в каждом из которых хотя бы 9 мудрецов, иначе всего их не более чем $9+8\cdot 11=97<100$. Значит, контролеры смогут сразу же поймать 18 мудрецов.

Покажем, что все мудрецы, кого не получится поймать сразу, не будут пойманы никогда. После появления контролеров до их первого хода каждый мудрец имеет три возможности перебежать в другой вагон. Назовем вагон «*хорошим*» в момент начала ходов контролеров, если в нем и в соседних с ним вагонах нет контролеров. Независимо от того, с какого контролера начались ходы, в «хорошем» вагоне мудрец не будет пойман в первый ход контролеров.

Допустим, мудрец находится в первой половине электрички (для второй половины рассуждения симметричны) в вагоне $k\neq 1$. Тогда мудрец может действовать следующим образом.

- Если мудрец может остаться на месте (то есть в соседних вагонах нет контролеров), то остается. Допустим, это не так.
- Смотрим, есть ли контролер в вагоне $k+2$. Если есть, то с помощью перебежек $k\to k+3\to k+4$ можно оказаться в хорошем вагоне. Допустим, в вагоне $k+2$ нет контролера.
- Переместимся в вагон $k+2$ и посмотрим, есть ли контролер в одном из двух следующих вагонов. Если в обоих нет, то хорош вагон $k+3$, если есть в $k+3$, перебежим в $k+5$, иначе перебежим $k+2\to k+5\to k+6$.

Теперь допустим, что изначально мы в вагоне 1. Тогда оказываться в хорошем вагоне можно следующим образом.

- Если в вагоне 2 есть контролер, то мы можем действовать аналогично предыдущей ситуации для $k=1$, так как мы бежали только вперед. Тогда предположим, что контролера во втором вагоне нет.
- Перебежим во второй вагон. Если в третьем нет контролеров, то второй вагон нас устроит. Допустим, что в третьем вагоне есть контролер. Посмотрим на четвертый.
- Если есть, то перебегаем $2\to 5\to 6$. Допустим, нет.
- Тогда перебегаем в 4. Посмотрим на следующие два. Если нет, то идем в 5, если есть только в 5 — идем в 7, а если есть только в 6, то возвращаемся в 1.

Заметим, что мы использовали не более трех перебежек. И оказаться в крайнем вагоне мы могли только в случае, если мы — в 1, контролеры — в 3, 6, или для $k=6$ мы — в 12, тогда контролеры — в 10, 7 или 10, 5. В последнем случае рассмотрим симметричную ситуацию, в которой мы — в вагоне 1, а контролеры — в 3, 6 или 3, 8. Это замечание нам понадобится.

Теперь изучим, что делать, когда контролеры начнут ходить. Назовем *активным* контролера, который будет следующим ходить и, соответственно, *пассивным* того, что только что ходил. Если мудрец видит контролера, то он знает, является ли тот активным или пассивным: во время всего перегона этот мудрец находился k-м вагоне и наблюдал вагоны с $k-2$ по $k+2$. Если в его поле зрения появился контролер или контролер совершил перемещение по вагонам, то он был активным перед прошлым перегоном, а значит, теперь будет пассивным. Если он не совершал перемещения, то будет активным.

Допустим, рассматриваемый мудрец находится не в крайних вагонах.

- Допустим, мудрец не в вагонах 2, 11. Тогда ему видно 5 вагонов, перемещаться нельзя разве что в 4 (три из-за активного и один из-за пассивного). Тогда можно перебежать в пятый. Так и сделаем, если этот вагон — не 1-й и не 12-й. В этом случае заметим, что мудрец находится в вагоне 3 либо 10, а контролеры — оба в соседних с ним вагонах, и мудрец может перебежать через 2 вагона в вагон 6 либо 7, точно не попав в опасный вагон.
- Допустим, мудрец находился в вагоне 2. Ему видно 4 вагона. Если среди них нет безопасного, то безопасен вагон 5, куда он и перебежит. Пусть есть безопасный.
- Если безопасен не первый, то перебежим туда. Допустим, только первый. Если видно двух контролеров, то они в 3, 4, и можно перебежать в 5 или остаться в 2. Допустим, видно только одного контролера. Тогда он в вагоне 3.
- Сначала надо перебежать в первый вагон, потом после хода активного контролера перебежать туда, где был он, а именно, в вагон 3. Заметим, что этот вариант предписывает действия на два хода.

Заметим, что в результате выполнения каждого из вариантов мы оказываемся не в вагоне 1. Это могло случиться только при изначальном расположении, так что контролеры расположены в 3, 6 или 3, 8. Тогда мудрецу стоит подождать хода контролера на позиции 3 и тогда сразу перебежать на его место. Второй контролер в это время будет активен и сможет находиться в 5, 6, 7, 8, 9. А для начального расположения не в крайнем вагоне перебежки мудреца уже разобраны.

Таким образом, любой мудрец, не попавшийся контролерам сразу, не попадется вообще. А чтобы изначально было поймано не больше 18 мудрецов, мудрецы должны расположиться не более чем по 9 человек в каждый вагон, то есть по 8 в восьми вагонах и по 9 — еще в четырех.

10 класс

1. Обозначим координаты точек: $M(x_0, 0)$, $A(x_1, 0)$, $B(x_2, 0)$. Старшие коэффициенты обоих трехчленов равны 1, корни первого равны x_0 и x_1, корни второго — x_0 и x_2, следовательно, сами трехчлены равны $(x-x_0)(x-x_1)$ и $(x-x_0)(x-x_2)$ соответственно. Ордината точки C равна значению первого трехчлена в нуле, значит, равна x_0x_1. Аналогично, ордината точки D равна x_0x_2. Теперь заметим, что

$$\frac{AO}{BO} = \frac{|x_1|}{|x_2|} = \frac{|x_0x_1|}{|x_0x_2|} = \frac{CO}{DO},$$

также $\angle AOC = 90^\circ = \angle BOD$, следовательно, треугольники AOC и BOD подобны по двум сторонам и углу между ними.

2. *Первое решение*. Посмотрим на количество пар сидящих рядом мальчика с девочкой. Изначально оно равно 1. Заметим, что если мальчик сел между двумя мальчиками, то количество таких пар не изменилось. Если же он сел между мальчиком и девочкой, то он одну такую пару «разрушил» и одну «создал», то есть опять же количество таких пар не изменилось. И только в случае, если мальчик был отважным, он увеличивает количество таких пар на две. Аналогичные рассуждения можно провести и для девочек. Так как в конце у нас таких пар 21, то отважных детей было $(21-1)/2 = 10$.

Второе решение. Решим задачу методом индукции. А именно, будем доказывать, что если к скамейке подошло $2n$ человек и после этого дети на скамейке чередуются, то среди пришедших было ровно n отважных. База для $n=0$ очевидна. Переход от n к $n+1$. Без ограничения общности можно считать, что последней севшей на скамейку была девочка. Она, очевидно, села между двумя мальчиками — иначе в конце были бы две девочки, сидящие рядом. Заметим, что тот из этих двух мальчиков, что пришел позже, не является отважным. Также понятно, что, если бы он не пришел, то отважность (или неотважность) остальных детей, кроме последней девочки, не изменилась бы. Действительно, она могла измениться лишь у тех, кто сел рядом с ним; но с одной стороны от него никто не садился, а у садящихся с другой стороны вместо него соседом был бы другой мальчик.

Итак, можно считать, что этот мальчик пришел предпоследним; тогда перед его приходом дети на скамейке также чередовались. По предположению индукции среди этих детей было ровно n отважных. Добавив к ним нашу последнюю девочку, получаем $n+1$, что и требовалось. По условию пришло 20 детей, значит, среди них $20/2=10$ отважных.

3. *Ответ.* $\dfrac{S}{2n}$.

Во всех трех решениях мы будем пользоваться следующими свойствами. Обозначим центр нашего многоугольника через O. Тогда площадь всего многоугольника равна

$$S(OA_1A_2)+S(OA_2A_3)+\ldots+S(OA_{4n-1}A_{4n})+S(OA_{4n}A_1)= \\ =4nS(OA_1A_2),$$

где через $S(P)$ мы обозначили площадь многоугольника P. То есть, если обозначить площадь треугольника вида OA_iA_{i+1} через x, имеем $S=4nx$, иными словами, $x=\dfrac{S}{4n}$. Покажем, что площадь искомого четырехугольника равна $2x=2\cdot\left(\dfrac{S}{4n}\right)=\dfrac{S}{2n}$.

Первое решение. A_1 и A_{2n+1} — противоположные вершины многоугольника. Следовательно, диагональ A_1A_{2n+1} про-

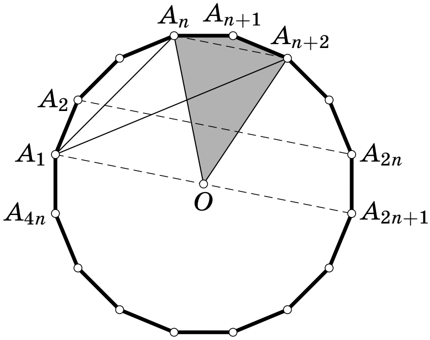

Рис. 23

ходит через O (рис. 23). Очевидно, что

$$A_1A_{2n+1} \parallel A_2A_{2n} \parallel A_3A_{2n-1} \parallel \ldots \parallel A_{1+(n-1)}A_{2n+1-(n-1)} = \\ = A_nA_{n+2}.$$

Значит, площади треугольников $A_1A_nA_{n+2}$ и OA_nA_{n+2} равны, так как у них совпадают основания и высоты. Отсюда имеем, что

$$S(A_1A_nA_{n+1}A_{n+2}) = S(A_1A_nA_{n+2}) + S(A_nA_{n+1}A_{n+2}) = \\ = S(OA_nA_{n+2}) + S(A_nA_{n+1}A_{n+2}) = S(OA_nA_{n+1}A_{n+2}) = \\ = S(OA_nA_{n+1}) + S(OA_{n+1}A_{n+2}) = 2S(OA_nA_{n+1}) = 2x,$$

что и требовалось.

Второе решение. Легко заметить, что $\triangle A_1A_{n+1}A_{n+2} = \triangle A_1A_{3n}A_{3n+1}$ (рис. 24). Значит,

$$S(A_1A_nA_{n+1}A_{n+2}) = S(A_1A_{n+1}A_n) + S(A_1A_{3n}A_{3n+1}).$$

Пусть длина стороны многоугольника равна a. Заметим, что стороны $A_{n+1}A_n$ и $A_{3n+1}A_{3n}$ противоположны и, следовательно, параллельны. Отсюда по формуле площади треугольника получаем, что

$$S(A_1A_{n+1}A_n) + S(A_1A_{3n}A_{3n+1}) = \\ = \frac{A_{n+1}A_n \cdot h_1}{2} + \frac{A_{3n+1}A_{3n} \cdot h_2}{2} = \frac{a \cdot (h_1 + h_2)}{2},$$

где h_1 и h_2 — длины высот треугольников $A_1A_{n+1}A_n$ и $A_1A_{3n+1}A_{3n}$, проведенных из вершины A_1. Но сумма $h_1 + h_2$

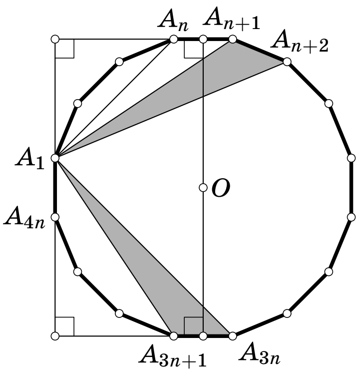

Рис. 24

равна расстоянию между прямыми $A_{n+1}A_n$ и $A_{3n+1}A_{3n}$. Следовательно,

$$S(A_1A_{n+1}A_n) + S(A_1A_{3n}A_{3n+1}) = \\ = S(OA_{n+1}A_n) + S(OA_{3n}A_{3n+1}) = 2x,$$

так как сумма высот из точки O до сторон $A_{n+1}A_n$ и $A_{3n+1}A_{3n}$ такая же, как у точки A_1.

Третье решение. Посчитаем площадь этого четырехугольника по формуле

$$S' = \frac{1}{2}A_1A_{n+1} \cdot A_nA_{n+2} \cdot \sin\angle(A_1A_{n+1}, A_nA_{n+2}),$$

где $\angle(A_1A_{n+1}, A_nA_{n+2})$ — угол между его диагоналями. Впишем правильный $4n$-угольник в окружность радиуса R с центром O. Теперь все стороны и диагонали четырехугольника суть хорды окружности. Получаем, что

$$A_1A_{n+1} = 2R\sin\frac{\angle A_1OA_{n+1}}{2} = 2R\sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}R,$$

$$A_nA_{n+2} = 2R\sin\frac{\angle A_nOA_{n+2}}{2} = 2R\sin\frac{\pi}{2n},$$

$$\sin\angle(A_1A_{n+1}, A_nA_{n+2}) = \sin\frac{\angle A_1OA_n + \angle A_{n+1}OA_{n+2}}{2} = \\ = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Значит,

$$S' = R^2\sin\frac{\pi}{2n} = 2\left(\frac{1}{2}R\cdot R\cdot\sin\frac{\pi}{2n}\right) = 2x.$$

4. *Первое решение*. Представим, что после выхода из-за стола школьники начинают выстраиваться во вторую новую очередь. Когда люди в первой очереди кончатся, начнут играть люди из второй очереди в том порядке, в котором они в ней стоят. Заметим, что если в первой очереди на первом месте стоял математик, то и во второй на первом месте будет математик (тот, который выйдет из-за стола, когда первый начнет играть), если вторым был гуманитарий — то и во второй тоже гуманитарий, и т. д. Другими словами, группы идущих подряд математиков и гуманитариев имеют ту же численность и чередуются в той же последовательности. Пронумеруем отдельно гуманитариев и отдельно математиков в первой очереди в том порядке, в котором они в ней стоят (тем, кто изначально играет за столом, дадим нулевые номера). Тогда во второй очереди номер каждого ученика будет на 1 меньше, чем номер того, кто был на его месте в первой очереди. Действительно, например, когда i-й математик начнет игру, на его место во второй очереди встанет $(i-1)$-й, который играл перед ним. Перед первой игрой человека из второй очереди за столом будут играть последний гуманитарий с последним математиком. Таким образом, номера математиков и гуманитариев сместились по кругу на 1 (все номера уменьшились на один, кроме нулевых, которые стали номерами $n-1$ и $m-1$ для гуманитариев и математиков соответственно). Это произошло через $(n+m-2)$ игры.

Теперь представим, что конец очереди на самом деле тоже располагается около стола. Получается, что школьники стоят по кругу, и когда новый игрок подходит к столу, выходящий из-за стола сразу становится в конец (фактически не отходя от стола). Выберем какого-нибудь математика «М» и гуманитария «Г». Посчитаем, сколько кругов они «пройдут» за $k=(n+m-2)nm$ игр (то есть за nm кругов). С учетом предыдущего виденья процесса, понятно, что каждый математик за m кругов побывает за столом $m-1$ раз (так как нумерация математиков сместится на 1 ровно m раз, то есть он «отстанет» ровно на 1 круг). Аналогично, каждый гуманитарий за n кругов побывает за столом $n-1$ раз. То есть М за k кругов пройдет через стол $n(m-1)$ раз, а Г — $m(n-1)$. Так как $n \neq m$, то $n(m-1) \neq m(n-1)$. Значит, когда-то один из них «обгонял» другого. Но «место для обгона» есть только за столом. Значит, М и Г сыграют, что и требовалось доказать.

Второе решение. Пусть $М_1$, $Г_1$ — математик и гуманитарий, играющие в первой встрече, $М_2, \ldots, М_m$, $Г_2, \ldots, Г_n$ — остальные математики и гуманитарии, занумерованные в порядке очереди. Разделим клетчатую плоскость на прямоугольники размера $m \times n$, и в каждом таком прямоугольнике будем закрашивать клетку на пересечении i-й сверху строки и j-го слева столбца, когда $М_i$ сыграет с $Г_j$.

Тогда сначала будут закрашены левые верхние клетки всех прямоугольников, а после каждой новой игры — правые или нижние соседи клеток, закрашенных перед этим. Так как в $(m+n-1)$-й игре будут играть последний гуманитарий с последним математиком, то после $m+n-1$ игры верхняя левая клетка каждого прямоугольника будет соединена цепочкой закрашенных клеток с правой нижней. Заметим теперь, что в $(m+n-1)$-й игре $М_m$ встречается с $Г_n$, а структура очереди оказывается такой же, как в первой игре (то есть группы идущих подряд математиков и гуманитариев имеют ту же численность и чередуются в той же последовательности). Поэтому клетка, закрашиваемая на шаге $m+n-2+k$, будет верхним левым соседом клетки, закрашенной на шаге k. А значит, можно считать, что вместе с каждой клеткой закрашивается и вся проходящая через нее диагональ.

Занумеруем диагонали слева направо так, чтобы диагональ, проходящая через левую верхнюю вершину одного из прямоугольников, получила номер 1. Тогда, соединяя левый верхний и правый нижний углы этого прямоугольника, мы заведомо закрасим все диагонали с номерами от 1 до $|m-n|$. Кроме того, если диагональ с номером k закрашена, то закрашены также диагонали $k \pm m$, $k \pm n$, а значит, и $k \pm \text{НОД}(m,\ n)$. Поскольку $\text{НОД}(m,\ n) \leqslant |m-n|$, то закрашена будет вся плоскость, что равносильно утверждению задачи.

5. *Первое решение*. Докажем индукцией по k более общий факт: если в условиях задачи для каждого p многочлен $Q_p(x)$ имеет степень, не бо́льшую k, то $f(x)$ в целых точках совпадает с некоторым многочленом, степень которого тоже не больше k.

Б а з а: $k=0$. В этом случае нам известно, что для каждого простого p существует такая константа Q_p, что $f(x)-Q_p$ делится на p при любом целом x. Но тогда

$$(f(x)-Q_p)-(f(y)-Q_p)=f(x)-f(y)$$

делится на p при любых целых x и y и любом простом p. Но такое может быть, только если $f(x)=f(y)$, то есть $f(x)$ постоянна при целых числах. База доказана.

П е р е х о д от k к $k+1$. Для функции $h(x)$ обозначим через $\Delta h(x)$ функцию, равную $h(x+1)-h(x)$. Нам понадобятся две леммы.

Л е м м а 1. Если $h(x)$ — многочлен степени не более m, то $\Delta h(x)$ — многочлен степени не более[1] $m-1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Степени многочленов $h(x+1)$ и $h(x)$ равны, также равны их старшие коэффициенты. Поэтому степень многочлена $h(x+1)-h(x)$ меньше степени многочлена $h(x)$.

Л е м м а 2. Если $\Delta h(x)$ в целых точках совпадает с многочленом степени не более $m-1$, то $h(x)$ в целых точках совпадает с многочленом степени не более m.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем это индукцией по m. База: $m=1$. Если $\Delta h(x)$ равно константе c в целых точках, то $h(x)=h(0)+cx$ при всех целых x. Переход от m к $m+1$. Пусть $\Delta h(x)$ в целых точках совпадает с многочленом степени не более m и коэффициентом при x^m, равным a (возможно, нулевым). Тогда обозначим через $h_0(x)$ функцию

$$h(x)-\frac{a}{m+1}\,x(x-1)(x-2)\ldots(x-m+1)(x-m).$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}\Delta h_0(x)=h_0(x+1)-h_0(x)=\\ =\Delta h(x)-ax(x-1)(x-2)\ldots(x-m+1)\end{aligned}$$

и равно многочлену степени не более $m-1$ в целых точках. Следовательно, по предположению индукции, $h_0(x)$ в целых точках совпадает с многочленом степени не более m.

[1]На самом деле степень $h(x)$ ровно на один больше степени $\Delta h(x)$.

Так как $h(x) - h_0(x)$ — многочлен степени не более $m+1$, то и $h(x)$ в целых точках совпадает с многочленом степени не более $m+1$. Переход доказан.

Итак, вернемся к доказательству перехода в основной задаче. Нетрудно видеть, что функция $\Delta f(x)$ удовлетворяет условию предположения индукции, так как $\Delta f(x) - \Delta Q_p(x)$ делится на p при любом целом x, а $\Delta Q_p(x)$ — многочлен степени не выше $k-1$ по лемме 1. Следовательно, $\Delta f(x)$ совпадает в целых точках с многочленом степени не выше $k-1$. Отсюда по лемме 2 заключаем, что $f(x)$ совпадает в целых точках с многочленом степени не выше k. Переход доказан.

Второе решение. Попробуем приблизиться к решению задачи: найдем многочлен $f_0(x)$ степени не выше 2013, который совпадает с $f(x)$ в точках 1, 2, ..., 2014. Такой многочлен известен и называется *интерполяционным многочленом Лагранжа*, в нашем случае он задается формулой

$$f_0(x) = f(1) \cdot \frac{(x-2)(x-3)\ldots(x-2014)}{(1-2)(1-3)\ldots(1-2014)} + \\ + f(2) \cdot \frac{(x-1)(x-3)(x-4)\ldots(x-2014)}{(2-1)(2-3)(2-4)\ldots(2-2014)} + \ldots \\ \ldots + f(i) \cdot \frac{(x-1)\ldots(x-(i-1))(x-(i+1))\ldots(x-2014)}{(i-1)\ldots(i-(i-1))(i-(i+1)\ldots(i-2014)} + \ldots \\ \ldots + f(2014) \cdot \frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-2013)}{(2014-1)(2014-2)\ldots(2014-2013)}.$$

Видно, что в выражении для $f_0(i)$ равны нулю все слагаемые суммы, кроме i-го, которое, в свою очередь, равно $f(i)$. Поэтому многочлен $f_0(x)$ удовлетворяет желаемым требованиям. (Про многочлен Лагранжа см., например, [1].)

Для краткости положим $c = (2013!)^2$. Тогда коэффициенты многочлена $cf_0(x)$ — целые числа. Пусть p — простое число, большее c. Тогда многочлен $cQ_p(x) - cf_0(x)$ имеет степень не выше 2013 и имеет 2014 различных корней по модулю p — это числа 1, 2, ..., 2014 (поскольку

$$cQ_p(i) - cf_0(i) = c(Q_p(i) - f(i))$$

при $1 \leqslant i \leqslant 2014$). Поэтому этот многочлен тождественно равен нулю по модулю p. Значит, число

$$c(f(x) - Q_p(x)) + (cQ_p(x) - cf_0(x)) = cf(x) - cf_0(x)$$

делится на любое достаточно большое простое p при любом целом x. Следовательно, $f(x)=f_0(x)$ при всех целых x.

Литература. [1] *Н. Б. Алфутова, А. В. Устинов*. Алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических школ. — М.: МЦНМО, 2009.

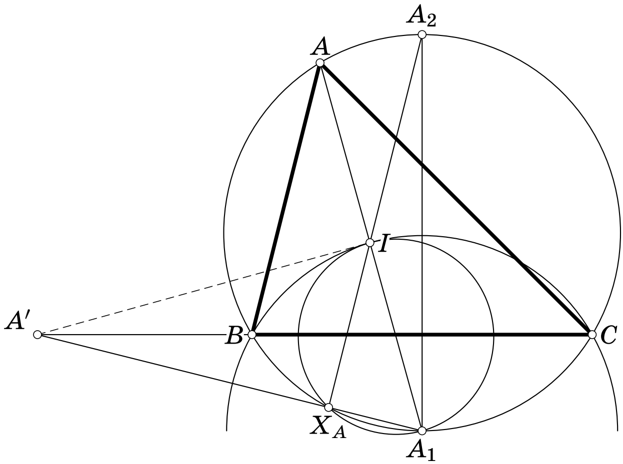

Рис. 25

6. *Первое решение*. Обозначим точку пересечения прямой A_1A' с прямой A_2I через X_A, а описанную окружность $\triangle ABC$ через ω (рис. 25). По условию $\angle A_2X_AA_1=90°$. Так как A_2A_1 — диаметр ω, точка X_A лежит на ω. Рассмотрим теперь описанные окружности треугольников ABC, BIC и IX_AA_1. Радикальная ось[1] первой и второй окружностей есть прямая BC, а первой и третьей — X_AA_1 (это прямые, содержащие общие хорды этих окружностей). Значит, радикальным центром[2] всех этих трех окружностей является

[1] *Степенью точки* P относительно окружности ω с центром в точке O и радиусом R называется величина $|OP|^2-R^2$. *Радикальной осью* двух окружностей называется ГМТ, степени которых относительно обеих окружностей равны.

[2] *Радикальным центром* трех окружностей называется точка, степень которой относительно всех трех окружностей одинакова. Подробнее о свойствах степени точки, радикальных осях и радикальном центре можно прочитать, например, в книгах [1, 2].

точка A'. Заметим, что

$$\angle IBA_1 = \angle IBC + \angle CBA_1 = \angle IBA + \angle A_1AC = \\ = \angle IBA + \angle BAA_1 = \angle BIA_1.$$

Следовательно, $A_1I = A_1B = A_1C$, или, иными словами, точка A_1 является центром описанной окружности треугольника[1] BIC. Так как угол IX_AA_1 прямой, то IX_A — диаметр описанной окружности треугольника A_1IX_A. Следовательно, описанные окружности треугольников BIC и X_AIA_1 касаются в точке I. Значит, касательная к этим окружностям, проведенная в точке I, проходит через A'. Причем по свойству степени точки A' относительно описанной окружности $\triangle BIC$ верно

$$A'I^2 = A'B \cdot A'C.$$

Рассмотрим ω и точку I, как вырожденную в точку окружность. Из последнего равенства следует, что точка A' лежит на радикальной оси этих двух окружностей. По аналогичным причинам на этой радикальной оси лежат и точки B' и C'. Так как радикальная ось двух окружностей — прямая, то все эти три точки лежат на одной прямой, перпендикулярной линии центров этих окружностей, то есть прямой OI.

Второе решение (только для пункта а)[2]. Обозначим через A_0, B_0 и C_0 соответственно основания биссектрис углов A, B и C треугольника. Пусть X_A — точка пересечения A_1A' с A_2I, ω — описанная окружность треугольника ABC. Так как $\angle A_1X_AA_2 = 90^\circ$ по условию, а A_1A_2 — диаметр ω, получаем, что X_A лежит на ω.

Для того, чтобы доказать, что точки A', B', C' лежат на одной прямой, по теореме Менелая необходимо и достаточно показать, что

$$\frac{\overrightarrow{BA'}}{\overrightarrow{A'C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB'}}{\overrightarrow{B'A}} \cdot \frac{\overrightarrow{AC'}}{\overrightarrow{C'B}} = -1.$$

---

[1]Этот факт иногда называют *леммой о трезубце*.

[2]В решении используются понятие двойного отношения четырех точек и его свойства. Подробнее о них можно узнать, например, в книгах [1, 3, 4].

По теореме Чевы для биссектрис треугольника верно

$$\frac{\overrightarrow{BA_0}}{\overrightarrow{A_0C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_0}}{\overrightarrow{B_0A}} \cdot \frac{\overrightarrow{AC_0}}{\overrightarrow{C_0B}} = 1.$$

Перемножив эти два равенства, сведем задачу к тому, что нам надо доказать равенство

$$\frac{\overrightarrow{BA'}}{\overrightarrow{A'C}} \cdot \frac{\overrightarrow{BA_0}}{\overrightarrow{A_0C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB'}}{\overrightarrow{B'A}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_0}}{\overrightarrow{B_0A}} \cdot \frac{\overrightarrow{AC'}}{\overrightarrow{C'B}} \cdot \frac{\overrightarrow{AC_0}}{\overrightarrow{C_0B}} = \\ = (BC, A'A_0) \cdot (CA, B'B_0) \cdot (AB, C'C_0) = -1$$

(здесь (XY, PQ) — двойное отношение четверки точек X, Y, P, Q). Спроецируем двойное отношение точек $(BC, A'A_0)$ сначала с прямой BC из точки A_1 на ω, затем из точки I с ω на саму себя. Получим, что

$$(BC, A'A_0) = (BC, X_A A) = (B_1C_1, A_2A_1).$$

Без ограничения общности можно считать, что $AB > BC > CA$, и, следовательно, точки A, A_2, C_1, B_2, B, A_1, C_2, C, B_1 идут на ω в указанном порядке. Распишем наше равенство:

$$(BC, A'A_0) \cdot (CA, B'B_0) \cdot (AB, C'C_0) = \\ = (B_1C_1, A_2A_1) \cdot (C_1A_1, B_2B_1) \cdot (A_1B_1, C_2C_1) =$$

$$= \frac{\dfrac{\sin\angle(\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AA_2})}{\sin\angle(\overrightarrow{AC_1}, \overrightarrow{AA_2})}}{\dfrac{\sin\angle(\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AA_1})}{\sin\angle(\overrightarrow{AC_1}, \overrightarrow{AA_1})}} \cdot \frac{\dfrac{\sin\angle(\overrightarrow{AC_1}, \overrightarrow{AB_2})}{\sin\angle(\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{AB_2})}}{\dfrac{\sin\angle(\overrightarrow{AC_1}, \overrightarrow{AB_1})}{\sin\angle(\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{AB_1})}} \cdot \frac{\dfrac{\sin\angle(\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{AC_2})}{\sin\angle(\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AC_2})}}{\dfrac{\sin\angle(\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{AC_1})}{\sin\angle(\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AC_1})}} =$$

$$= -1 \cdot \frac{\sin\angle(\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AA_2})}{\sin\angle(\overrightarrow{AC_1}, \overrightarrow{AA_2})} \cdot \frac{\sin\angle(\overrightarrow{AC_1}, \overrightarrow{AB_2})}{\sin\angle(\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{AB_2})} \cdot \frac{\sin\angle(\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{AC_2})}{\sin\angle(\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AC_2})} = \\ = -1 \cdot \frac{\sin\frac{\angle C}{2}}{\sin\frac{\angle B}{2}} \cdot \frac{-\sin\frac{\angle A}{2}}{\sin\frac{\angle C}{2}} \cdot \frac{-\sin\frac{\angle B}{2}}{\sin\frac{\angle A}{2}} = -1,$$

что и требовалось. В последнем равенстве мы воспользовались тем, что $\angle A_1AB_2 = \angle C/2$ и аналогичными этому равенствами. Это равенство можно получить из того, что

$$\angle A_1AB_2 = \angle B_1AB_2 - \angle B_1AA_1 = 90^\circ - \angle B_1AC - \angle CAA_1 = \\ = (\angle A + \angle B + \angle C)/2 - \angle B/2 - \angle A/2 = \angle C/2.$$

Литература. [1] *В. В. Прасолов.* Задачи по планиметрии. — М.: МЦНМО, 2007.

[2] *Я. П. Понарин.* Элементарная геометрия. Том 1. Планиметрия. — М.: МЦНМО, 2008.

[3] *А. А. Заславский.* Геометрические преобразования. — М.: МЦНМО, 2003.

[4] Математика в задачах. Сборник материалов выездных школ команды Москвы на Всероссийскую математическую олимпиаду. — М.: МЦНМО, 2009.

11 класс, первый день

1. *Первое решение.* Пусть a — общий корень описанных квадратных трехчленов. Тогда их можно представить в виде $(x-a)(x-b)$ и $(x-a)(x-c)$, а их сумма равна

$$(x-a)(x-b)+(x-a)(x-c)=(x-a)(2x-b-c)= \\ =2(x-a)\left(x-\frac{b+c}{2}\right).$$

Заметим, что дискриминант квадратного трехчлена αx^2+ $+\beta x+\gamma$ с корнями x_1, x_2 равен

$$\beta^2-4\alpha\gamma=\alpha^2\left(\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2-4\frac{\gamma}{\alpha}\right)= \\ =\alpha^2((x_1+x_2)^2-4x_1x_2)=\alpha^2(x_1-x_2)^2.$$

Следовательно, по условию задачи

$$(a-b)^2+(a-c)^2=4\left(a-\frac{b+c}{2}\right)^2=\big((a-b)+(a-c)\big)^2= \\ =(a-b)^2+2(a-b)(a-c)+(a-c)^2,$$

откуда $(a-b)(a-c)=0$. Значит, $a=b$ или $a=c$, что означает равенство нулю дискриминанта первого или второго трехчлена соответственно.

Второе решение. Пусть $x^2+p_1x+q_1$, $x^2+p_2x+q_2$ — заданные в условии задачи квадратные трехчлены, $D_1=p_1^2-$ $-4q_1$ и $D_2=p_2^2-4q_2$ — их дискриминанты. Тогда дискриминант их суммы

$$2x^2+(p_1+p_2)x+(q_1+q_2)$$

равен

$$D=(p_1+p_2)^2-8(q_1+q_2).$$

По условию, $D_1+D_2=D$, следовательно,

$$p_1^2+p_2^2-4q_1-4q_2=p_1^2+2p_1p_2+p_2^2-8q_1-8q_2,$$

откуда $p_1p_2=2(q_1+q_2)$.

Пусть теперь x_0, x_1 — корни первого трехчлена, x_0, x_2 — корни второго. По теореме Виета

$$p_1=-(x_0+x_1),\quad p_2=-(x_0+x_2),\quad q_1=x_0x_1,\quad q_2=x_0x_2.$$

Поэтому

$$(x_0+x_1)(x_0+x_2)=2(x_0x_1+x_0x_2);$$
$$x_0^2+x_0x_1+x_0x_2+x_1x_2=2x_0x_1+2x_0x_2;$$
$$x_0^2-x_0x_1-x_0x_2+x_1x_2=0;$$
$$(x_0-x_1)(x_0-x_2)=0.$$

Итак, $x_0=x_1$ или $x_0=x_2$, т. е. $D_1=0$ или $D_2=0$ соответственно.

Третье решение. Пусть снова $x^2+p_1x+q_1$, $x^2+p_2x+q_2$ — заданные квадратные трехчлены, D_1 и D_2 — их дискриминанты, D — дискриминант их суммы. Так же как и в предыдущем решении, из условия $D_1+D_2=D$ получаем равенство $p_1p_2=2(q_1+q_2)$. Тогда

$$D=(p_1+p_2)^2-8(q_1+q_2)=(p_1+p_2)^2-4p_1p_2=(p_1-p_2)^2.$$

Используем теперь условие о том, что у трехчленов есть общий корень. Это означает, что для некоторой расстановки знаков $+$ и $-$ вместо знаков $\pm$ верно равенство

$$\frac{-p_1\pm\sqrt{D_1}}{2}=\frac{-p_2\pm\sqrt{D_2}}{2};$$
$$p_1-p_2=\pm\sqrt{D_1}\pm\sqrt{D_2}.$$

Возведем последнее равенство в квадрат:

$$D=(p_1-p_2)^2=(\pm\sqrt{D_1}\pm\sqrt{D_2})^2=D_1+D_2\pm2\sqrt{D_1D_2}.$$

Снова учитывая условие $D_1+D_2=D$, получим $\sqrt{D_1D_2}=0$, откуда $D_1=0$ или $D_2=0$.

Четвертое решение. Заметим, что дискриминант приведенного квадратного трехчлена $f(x)=x^2+px+q$ не меняется при сдвиге переменной, т. е. при замене x на $x+h$. Действительно, дискриминант трехчлена

$$f(x+h)=(x+h)^2+p(x+h)+q=x^2+(2h+p)x+(h^2+ph+q)$$

равен

$$(2h+p)^2-4(h^2+ph+q)=$$
$$=4h^2+4ph+p^2-4h^2-4ph-4q=p^2-4q,$$

т. е. дискриминанту трехчлена $f(x)$. Значит, можно считать, что общим корнем заданных в условии квадратных трехчленов является $x_0=0$. Тогда трехчлены имеют вид x^2+p_1x, x^2+p_2x, а их сумма равна $2x^2+(p_1+p_2)x$. По условию их дискриминанты связаны равенством $(p_1+p_2)^2=p_1^2+p_2^2$, откуда $2p_1p_2=0$, что и означает равенство нулю p_1 или p_2, а значит, и дискриминанта одного из трехчленов.

2. *Ответ*. 2 и 3, 2 и 5, 3 и 11.

Первое решение. Без ограничения общности будем считать, что $p\leqslant q$. По условию задачи найдутся такие натуральные числа k и l, что $7p+1=kq$ и $7q+1=lp$. Тогда

$$kq=7p+1\leqslant 7q+1,$$

поэтому $(k-7)q\leqslant 1$, а значит, $k\leqslant 7$. Заметим, что

$$klp=k(7q+1)=49p+7+k,$$

откуда $k+7=(kl-49)p$. Следовательно, $p\leqslant k+7\leqslant 14$. Поэтому p может принимать лишь значения 2, 3, 5, 7, 11 или 13. Тогда $7p+1$ принимает соответственно значения $15=3\cdot 5$, $22=2\cdot 11$, $36=2^2\cdot 3^2$, $50=2\cdot 5^2$, $78=2\cdot 3\cdot 13$ или $92=2^2\cdot 23$. Проверкой простых делителей перечисленных значений $7p+1$ убеждаемся, что условию задачи удовлетворяют лишь пары 2 и 3, 2 и 5, 3 и 11.

Комментарий. Доказать оценку $p\leqslant 14$ можно и другим способом. Поскольку

$$(7p+1)(7q+1)=49pq+7p+7q+1=klpq,$$

число $7p+7q+1$ делится на pq, значит,

$$7p+7q+1\geqslant pq,\qquad \frac{7}{p}+\frac{7}{q}+\frac{1}{pq}\geqslant 1.$$

Предполагая, что $q\geqslant p\geqslant 15$, приходим к противоречию:

$$1\leqslant \frac{7}{p}+\frac{7}{q}+\frac{1}{pq}\leqslant \frac{7}{15}+\frac{7}{15}+\frac{1}{225}=\frac{14\frac{1}{15}}{15}<1.$$

Второе решение. Рассмотрим сначала случай, когда одно из простых чисел p, q четно, т. е. равно 2. Поскольку $7\cdot 2+1=15=3\cdot 5$, в этом случае получаем две пары решений: 2 и 3, 2 и 5.

Пусть теперь каждое из чисел p, q нечетно. Тогда для некоторых натуральных чисел a, b справедливы равенства

$$7p+1=2aq \quad \text{и} \quad 7q+1=2bp.$$

Следовательно,

$$7(7p+1)=14aq=2a(2bp-1),$$

откуда

$$p=\frac{2a+7}{4ab-49}.$$

Аналогичным образом, получаем

$$q=\frac{2b+7}{4ab-49}.$$

Знаменатель каждой этих дробей должен быть положителен, поэтому $ab>\dfrac{49}{4}$, т. е. $ab\geqslant 13$. С другой стороны, $p\geqslant 3$, поэтому $2a+7\geqslant 3(4ab-49)$, т. е. $12ab-2a\leqslant 154$, или $6ab-$ $-a\leqslant 77$.

Если $ab\geqslant 14$, то $84-a\leqslant 6ab-a\leqslant 77$, откуда $a\geqslant 7$. Аналогично $b\geqslant 7$, а тогда имеем

$$77\geqslant a(6b-1)\geqslant 7(6\cdot 7-1)=287$$

и получаем противоречие.

Остается лишь вариант $ab=13$, т. е. $a=1$, $b=13$ или наоборот. В этом случае $4ab-49=4\cdot 13-49=3$ и находим еще одну пару простых чисел, удовлетворяющую условию задачи: $\dfrac{2\cdot 1+7}{3}=3$ и $\dfrac{2\cdot 13+7}{3}=11$.

Третье решение. Заметим, что пары простых чисел 2 и 3, 2 и 5 удовлетворяют условию задачи. Остальные пары решений таковы, что p, $q\geqslant 3$. Тогда числа $7p+1$ и $7q+1$ четные и делятся на нечетные q и p соответственно: $7p+1=2aq$, $7q+1=2bp$. Поэтому

$$4ab=2a\cdot 2b=\frac{7p+1}{q}\cdot\frac{7q+1}{p}=49+\frac{7}{p}+\frac{7}{q}+\frac{1}{pq}.$$

Следовательно,

$$49<4ab\leqslant 49+\frac{7}{3}+\frac{7}{3}+\frac{1}{9}<56,$$

а значит, число $4ab$ делится на 4 и удовлетворяет неравенствам $49 < 4ab < 56$. Отсюда $4ab = 52$, т. е. $ab = 13$. Если $a = 1$, $b = 13$, то получаем

$$7p + 1 = 2q, \quad 7q + 1 = 26p,$$

поэтому

$$49p + 7 = 14q = 52p - 2,$$

так что

$$p = 9/3 = 3, \quad q = \frac{7 \cdot 3 + 1}{2} = 11.$$

Для $a = 13$, $b = 1$ аналогично находим пару $p = 11$, $q = 3$, получающуюся из предыдущей перестановкой значений p и q.

3. *Первое решение*. Обозначим основание перпендикуляра из точки A на BC через S, а основание перпендикуляра

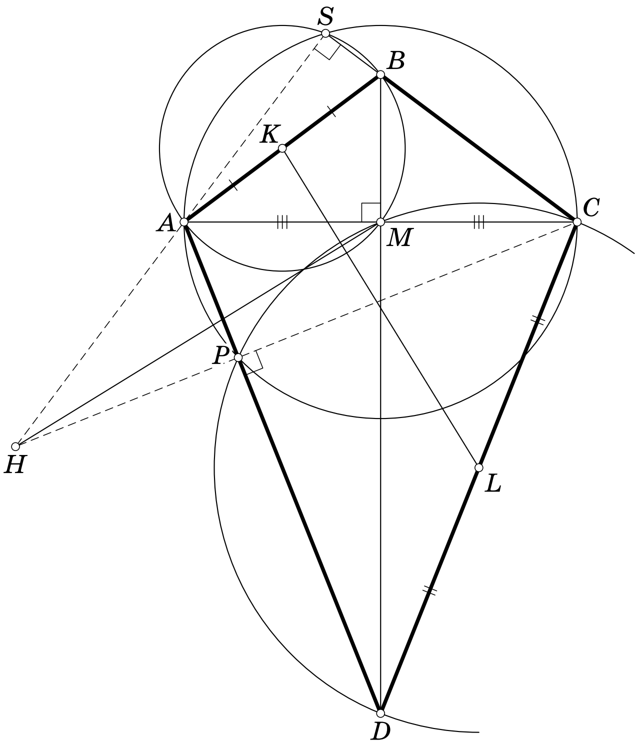

Рис. 26

из точки C на AD — через P (рис. 26). Заметим, что точки A, S, C и P лежат на одной окружности с диаметром AC, так как $\angle ASC = \angle APC = 90°$. Аналогично замечаем, что точки A, B, S и M лежат на одной окружности с диаметром AB и центром K, а точки D, M, C, P лежат на одной окружности с диаметром CD и центром L. Тогда прямая AS проходит через точки пересечения окружностей $ASBM$ и $ASCP$ (так называемая *радикальная ось* этих окружностей), а прямая PC проходит через точки пересечений окружностей $MCDP$ и $ASCP$. Известно, что для любых трех попарно пересекающихся окружностей три прямые, каждая из которых проходит через точки пересечения двух из этих окружностей, пересекаются в одной точке (так называемый *радикальный центр* этих трех окружностей). Следовательно, точка H лежит на прямой, проходящей через точки пересечения окружностей

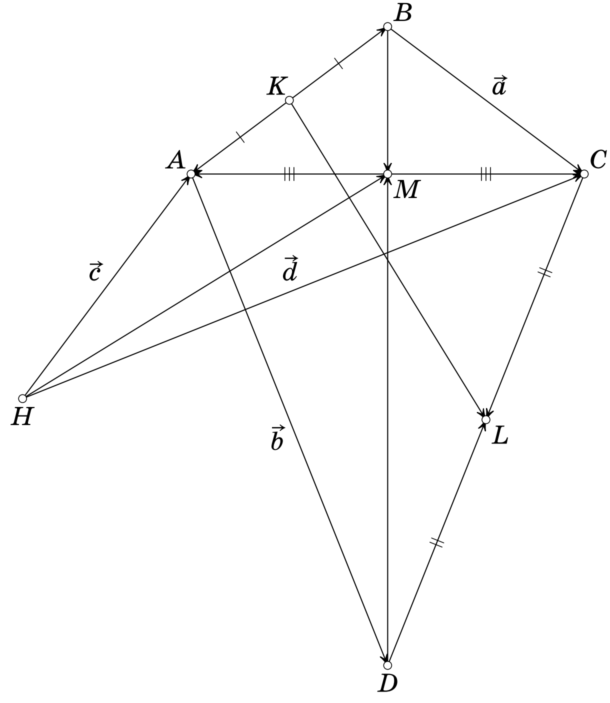

Рис. 27

$ASBM$ и $MCDP$. Значит, прямая MH перпендикулярна прямой KL, проходящей через центры этих окружностей.

Второе решение. Обозначим вектор $\overrightarrow{BC}$ через $\vec{a}$, вектор $\overrightarrow{AD}$ — через $\vec{b}$, вектор $\overrightarrow{HA}$ — через $\vec{c}$ и вектор $\overrightarrow{HC}$ — через $\vec{d}$ (рис. 27). Заметим, что

$$\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{KB} + \vec{a} + \overrightarrow{CL} = \overrightarrow{KA} + \vec{b} + \overrightarrow{DL}.$$

Отсюда получаем, что $2\overrightarrow{KL} = \vec{a} + \vec{b}$. Заметим также, что

$$2\overrightarrow{HM} = \vec{c} + \vec{d}.$$

Следовательно, прямые KL и HM перпендикулярны тогда и только тогда, когда

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{c} + \vec{d}) = 0.$$

Так как по условию $AB = BC$ и $AD = DC$, то прямая BD — серединный перпендикуляр к отрезку AC. Следовательно, точка M лежит на прямой BD и $BD \perp AC$. Рассмотрим вектор

$$\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{DM} \perp \overrightarrow{AC} = \vec{d} - \vec{c}.$$

Таким образом,

$$(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{d} - \vec{c}) = 0.$$

Поскольку по условию $HA \perp BC$ и $HC \perp AD$, то $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$ и $\vec{b} \cdot \vec{d} = 0$. Следовательно,

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{c} + \vec{d}) = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{d} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{d} =$$
$$= -\vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{d} + \vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{b} \cdot \vec{d} = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{d} - \vec{c}) = 0.$$

Что и требовалось доказать.

Третье решение. Достроим треугольники AKD и BKC до параллелограммов $AKQD$ и $BKRC$ соответственно (рис. 28). Заметим, что $DRCQ$ — также параллелограмм и точка L — точка пересечения его диагоналей. Значит, L — середина QR.

Так как по условию $AB = BC$ и $AD = DC$, то прямая BD — серединный перпендикуляр к отрезку AC. Следовательно, точка M лежит на прямой BD и $BD \perp AC$, а ортогональные проекции векторов $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$ на прямую AC равны. Значит, равны и ортогональные проекции векторов $\overrightarrow{KQ}$ и $\overrightarrow{KR}$ на эту прямую. Следовательно, $QR \perp AC$. Тогда стороны KQ, QR

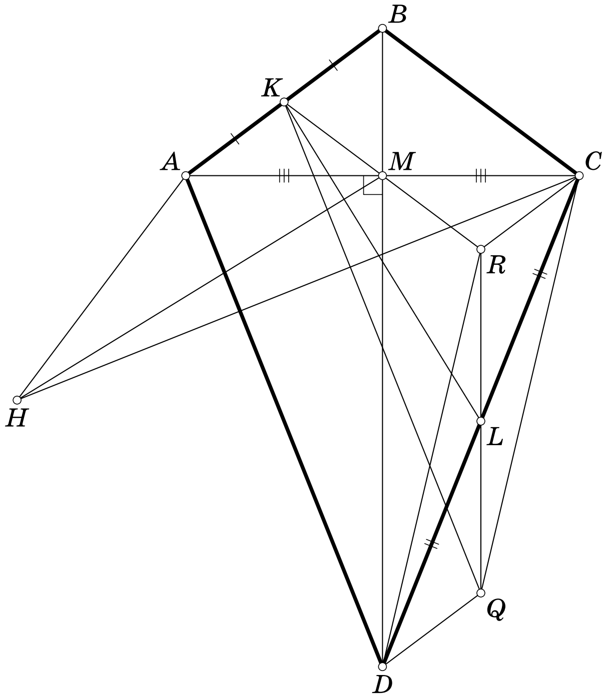

Рис. 28

и RK треугольника KQR соответственно перпендикулярны сторонам HC, CA и AH треугольника HCA. Значит, перпендикулярны и их медианы KL и HM.

4. *Ответ*. Можно.

Решение. Введем такую систему координат Oxy, чтобы вертикальные и горизонтальные и линии сетки имели уравнения $x = n$ (n — целое) и $y = m$ (m — целое). Раскрасим в черный цвет те и только те клетки, все точки которых удовлетворяют одному из четырех неравенств $y \geqslant x^2$, $y \leqslant -x^2$, $x \geqslant y^2$ или $x \leqslant -y^2$ (рис. 29), остальные клетки покрасим в белый цвет. Тогда всякая вертикальная прямая будет пересекать конечное число белых клеток между параболами $y = \pm x^2$, всякая горизонтальная прямая будет пересекать конечное число белых клеток между параболами $x = \pm y^2$. Заметим также, что всякая наклонная прямая будет пересекать лишь конечное число черных клеток, так как ее пе-

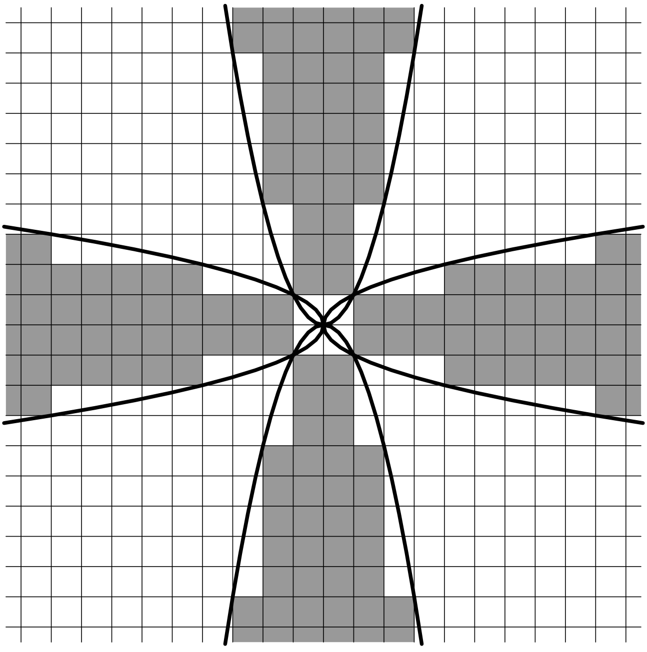

Рис. 29

ресечение с каждой из областей

$$y \geqslant x^2, \quad y \leqslant -x^2, \quad x \geqslant y^2 \quad \text{и} \quad x \leqslant -y^2$$

может быть либо пустым, либо являться точкой, либо отрезком.

5. *Ответ*. Нет.

Решение. Присвоим номера спортсменам по убыванию их скоростей на старте. Нарисуем графики их движения, откладывая время по оси Ox, а расстояние до точки A — по оси Oy. Пусть O — начало координат, S — точка на положительной части оси Oy с $OS = 60$ м, K, L, M — точки на графиках трех спортсменов в момент их нахождения в точке B из условия, T — точка на положительной части оси Ox, соответствующая моменту финиша, P, Q, R — точки, соответствующие моменту встречи между A и B первого и второго, второго и третьего, третьего и первого спортсмена соответственно, P', Q' и R' — проекции этих точек на ось Oy соответственно (рис. 30).

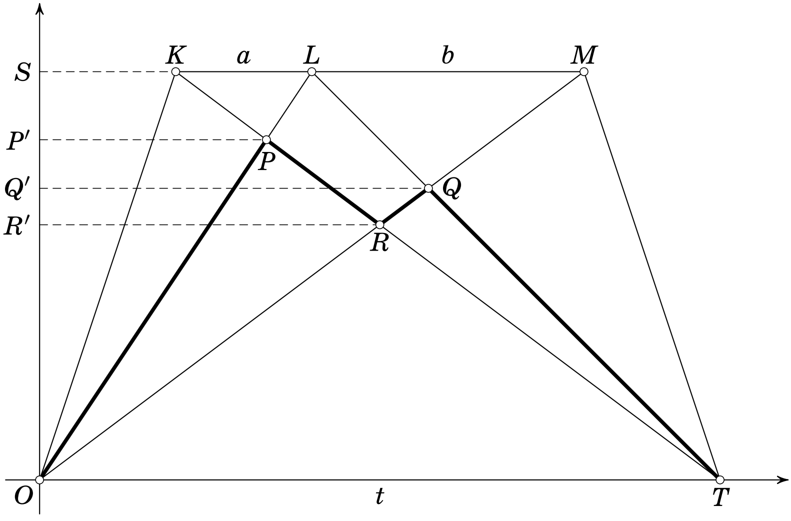

Рис. 30

Заметим, что для любых трех заданных точек на прямой существует единственная точка, сумма расстояний от которой до заданных будет минимальной — это средняя из трех заданных точек. Следовательно, тренер всегда будет находиться рядом со спортсменом, который находился между двумя другими. Тогда график движения тренера описывается ломаной $OPRQT$, а длина l его пути равна сумме длин отрезков OP', $P'R'$, $R'Q'$, $Q'O$.

Обозначим длины отрезков KL, LM и OT через a, b и t соответственно. Так как $KL \parallel OT$, то $\triangle KPL \sim \triangle TPO$ и

$$\frac{KP}{PT} = \frac{KL}{OT} = \frac{a}{t}.$$

Аналогично

$$\frac{LQ}{QT} = \frac{LM}{OT} = \frac{b}{t}$$

и

$$\frac{KR}{RT} = \frac{KM}{OT} = \frac{a+b}{t}.$$

По теореме о пропорциональных отрезках

$$\frac{SP'}{P'O} = \frac{KP}{PT} = \frac{a}{t}.$$

Отсюда $OP' = \frac{60t}{a+t}$. Аналогично $OQ' = \frac{60t}{b+t}$ и $OR' = \frac{60t}{a+b+t}$. Значит,

$$l = OP' + P'R' + R'Q' + Q'O = 60t\left(\frac{1}{a+t} + \left(\frac{1}{a+t} - \frac{1}{a+b+t}\right) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{1}{b+t} - \frac{1}{a+b+t}\right) + \frac{1}{b+t}\right) = 120t\left(\frac{1}{a+t} + \frac{1}{b+t} - \frac{1}{a+b+t}\right).$$

Так как $b < t - a$, а выражение

$$\frac{1}{b+t} - \frac{1}{a+b+t} = \frac{a}{(b+t)(a+b+t)}$$

тем меньше, чем больше b, то

$$\frac{a}{(b+t)(a+b+t)} > \frac{a}{(2t-a)(2t)}$$

и

$$l > 120t\left(\frac{1}{a+t} + \frac{1}{2t-a} - \frac{1}{2t}\right) = 120t\left(\frac{3t}{(a+t)(2t-a)} - \frac{1}{2t}\right).$$

Квадратный трехчлен $(a+t)(2t-a)$ принимает наибольшее значение $\frac{9t^2}{4}$ при $a = \frac{t}{2}$. Значит,

$$l > 120t\left(\frac{4}{3t} - \frac{1}{2t}\right) = 100 \text{ м}.$$

6. *Решение*. а) Так как в каждом матче разыгрывается 1 очко, а всего матчей было 25, то общее количество баллов, набранное командами, равно 25. Значит, каждая команда набрала по $12\frac{1}{2}$ очков. Предположим, что у всех шахматистов разное количество очков. Каждый из 10 шахматистов мог набрать 0, $\frac{1}{2}$, 1, $1\frac{1}{2}$, ..., $4\frac{1}{2}$, 5 очков — всего 11 вариантов. Значит, ровно один из этих вариантов не реализуется. Так как

$$0 + \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + \ldots + 5 = \frac{5}{2} \cdot 11 = 25 + 2\frac{1}{2},$$

а в сумме шахматисты набрали 25 очков, то нет шахматиста, который набрал ровно $2\frac{1}{2}$ очка, а для любого другого количества очков такой шахматист найдется. Шахматисты, набравшие 5 и $4\frac{1}{2}$ очка, не могут попасть в разные команды, так как иначе первый из них выиграл все свои матчи, в том числе и со вторым шахматистом, что невозможно. Но тогда и шахматист, набравший 4 очка, тоже не может попасть в другую команду, ведь в таком случае он проиграл бы свой матч первому и не мог выиграть у второго шахматиста. Значит, команда этих трех шахматистов набрала не меньше $5+4\frac{1}{2}+4=13\frac{1}{2}$ очков, что невозможно.

б) Обозначим через $a_1, a_2, \ldots, a_n$ количество баллов, полученное шахматистами первой команды в порядке убывания, а через $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — количество баллов, полученное шахматистами второй команды в порядке убывания. Так как было сыграно n^2 матчей, то

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+b_1+b_2+\ldots+b_n=n^2.$$

Предположим, что все числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ различны. Тогда среди них встречаются все числа $0, \frac{1}{2}, 1, \ldots, n$, кроме одного. Поскольку

$$0+\frac{1}{2}+1+\ldots+n=n^2+\frac{n}{2},$$

то среди полученных шахматистами баллов отсутствует число $n/2$.

Пусть p — натуральное число от 1 до n. Рассмотрим p наибольших чисел среди $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$. Это наилучшие результаты $a_1, a_2, \ldots, a_k$ шахматистов первой команды и наилучшие результаты $b_1, b_2, \ldots, b_m$ шахматистов второй команды, где $k=k(p)$ и $m=m(p)$ зависят от p, $k+m=p$. Количество матчей, в каждом из которых участвовал хотя бы один из этих шахматистов, равно

$$km+k(n-m)+m(n-k)=np-km.$$

Следовательно,

$$a_1+a_2+\ldots+a_k+b_1+b_2+\ldots+b_m\leqslant np-km.$$

С другой стороны, по нашему предположению,

$$a_1+a_2+\ldots+a_k+b_1+b_2+\ldots+b_m=$$
$$=n+\left(n-\frac{1}{2}\right)+\ldots+\left(n-\frac{p-1}{2}\right)=np-\frac{p(p-1)}{4}.$$

Отсюда

$$np-km\geqslant np-\frac{p(p-1)}{4}$$

и $p^2-4km\geqslant p$. Имеем

$$p^2-4km=(k+m)^2-4km=(k-m)^2\geqslant p>0.$$

Пусть теперь p — натуральное число от $n+1$ до $2n-1$. Вновь выбирая p наибольших чисел $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k,\ b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_m$, получим, как и ранее,

$$a_1+a_2+\ldots+a_k+b_1+b_2+\ldots+b_m\leqslant np-km.$$

Теперь по нашему предположению получаем

$$a_1+a_2+\ldots+a_k+b_1+b_2+\ldots+b_m=$$
$$=n+\left(n-\frac{1}{2}\right)+\ldots+\frac{n-1}{2}+\frac{n+1}{2}+\ldots+\frac{2n-p}{2}=$$
$$=np-\frac{p(p+1)}{4}+\frac{n}{2}.$$

Отсюда

$$np-km\geqslant np-\frac{p(p+1)}{4}+\frac{n}{2},$$
$$p^2-4km\geqslant 2n-p$$

и

$$(k-m)^2\geqslant 2n-p>0.$$

Проследим за изменениями величин $k(p)$ и $m(p)$ при изменении p от 1 до $2n-1$. Без ограничения общности можно считать, что $k(1)=1,\ m(1)=0$. Покажем по индукции, что тогда $k(p)>m(p)$ при всех таких p. Действительно, $k(1)>m(1)$. Предположим, что $k(p)>m(p)$ для некоторого $p=1,\ 2,\ \ldots,\ 2n-2$. Так как $k(p+1)\geqslant k(p)$ и $m(p+1)\leqslant \leqslant m(p)+1$, то

$$k(p+1)-m(p+1)\geqslant k(p)-m(p)-1\geqslant 0.$$

Но $k(p+1)-m(p+1)\neq 0$, поскольку $(k(p+1)-m(p+1))^2> >0$. Значит, $k(p+1)>m(p+1)$. Неравенство доказано. Это неравенство означает, что $a_k>b_k$ для любого k от 1 до n. Отсюда

$$a_1+a_2+\ldots+a_n>b_1+b_2+\ldots+b_n.$$

Противоречие.

1. *Ответ.* Три других слитка могли иметь массы: 1, 1 и 1 кг; 1, 2 и 2 кг; 3, 3 и 3 кг.

Решение. Пусть a, b, c, d и e — массы слитков в килограммах, расположенные в порядке их неубывания. Если первый пират выберет себе слитки с массами d и e, то второй пират должен будет забрать себе все остальные слитки, ведь иначе первому пирату достанется не меньше $a+e+d$, а второму — не больше $b+c$, причем $a+e+d>e+d\geqslant b+c$ — противоречие. Значит, $e+d=a+b+c$.

Аналогично, если первый пират выберет себе слитки с массами c и e, то второй пират также должен будет забрать себе все остальные слитки (так как $e+c+a>e+c\geqslant d+b$). Значит, $e+c=a+b+d$. Отсюда и из равенства $e+d=a+b+c$ следует, что $c=d$ и $e=a+b$.

Если первый пират выбрал два слитка с одинаковыми массами c, то второй пират должен взять себе более одного слитка. Действительно, иначе он взял бы себе не более e килограмм золота, в то время как первый пират получил бы не меньше $a+b+c+c=2c+e$ килограмм золота. Второй пират не мог также взять себе всего два слитка с массами a и b килограмм, ведь в этом случае $a+b=2c+e=2c+a+b$, что невозможно. Остаются следующие варианты.

1) Второй пират взял себе ровно два слитка с массами a и e килограмм. Тогда $2c+b=a+e=2a+b$. Следовательно, $a=b=c=d=1$ и $e=2$ — такой вариант подходит.

2) Второй пират взял себе ровно два слитка с массами b и e килограмм. Тогда $2c+a=b+e=a+2b$. Следовательно, $a=b=c=d=1$ и $e=2$ — этот вариант мы уже учли.

3) Второй пират взял себе три слитка с массами a, b и e килограмм. Тогда $2c=a+b+e=2e$. Следовательно, $c=d=e$. Если при этом $a=b=1$, то $c=d=e=2$ — такой вариант подходит. Если же $a=1$, $b=2$, то $c=d=e=3$ — такой вариант тоже подходит. Случай $a=1$ и $c=d=e=2$ мы уже учли (так как тогда $b=1$). Все случаи разобраны.

2. *Ответ.* $a=e^{1/e}$.

Решение. Рассмотрим графики функций $y=a^x$, $y=\log_a x$ (рис. 31). Поскольку данные функции взаимно обратны, общая точка графиков этих функций лежит также на прямой

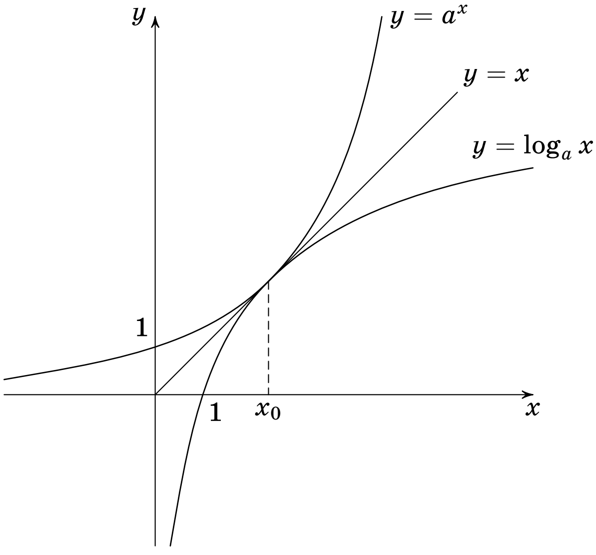

Рис. 31

$y=x$. Если уравнение $a^x=\log_a x$ имеет единственное решение x_0, то $a^{x_0}=x_0$ и $a^x \geqslant x$ при $x \neq x_0$.

Рассмотрим функцию $f(x)=a^x-x$. Тогда $f(x_0)=0$, а поскольку x_0 — точка минимума этой функции, получаем $f'(x_0)=0$. Следовательно,

$$a^{x_0}=x_0, \quad a^{x_0}\ln a-1=0,$$

откуда $x_0 \ln a=1$, $x_0=\dfrac{1}{\ln a}$. Значит,

$$a^{\frac{1}{\ln a}}=\frac{1}{\ln a}, \quad e=\frac{1}{\ln a}, \quad \ln a=\frac{1}{e}, \quad a=e^{1/e}.$$

Осталось убедиться, что найденное значение a удовлетворяет условию задачи. Действительно, при этом значении a исходное уравнение принимает вид $e^{x/e}=e\ln x$ и имеет решение $x=e$. Других решений нет, так как

$$f'(x)=\frac{1}{e}e^{x/e}-1>0$$

при $x>e$ и

$$f'(x)=\frac{1}{e}e^{x/e}-1<0$$

при $x<e$, т. е. $f(x)>0$ при $x \neq e$.

3. *Ответ*. Первое меньше.

Решение. Обозначим первое число через A, а второе через B. Тогда

$$A^2=\left(1+\frac{2}{3^3}\right)^2\left(1+\frac{2}{5^3}\right)^2\ldots\left(1+\frac{2}{2013^3}\right)^2<$$
$$<\left(1+\frac{2}{2^3}\right)\left(1+\frac{2}{3^3}\right)\left(1+\frac{2}{4^3}\right)\left(1+\frac{2}{5^3}\right)\ldots$$
$$\ldots\left(1+\frac{2}{2012^3}\right)\left(1+\frac{2}{2013^3}\right)<$$
$$<\left(1+\frac{2}{2^3-1}\right)\left(1+\frac{2}{3^3-1}\right)\left(1+\frac{2}{4^3-1}\right)\ldots\left(1+\frac{2}{2013^3-1}\right)=$$
$$=\frac{2^3+1}{2^3-1}\cdot\frac{3^3+1}{3^3-1}\cdot\frac{4^3+1}{4^3-1}\ldots\frac{2013^3+1}{2013^3-1}.$$

Заметим, что

$$\frac{n^3+1}{n^3-1}=\frac{(n+1)(n^2-n+1)}{(n-1)(n^2+n+1)},$$

а

$$(n+1)^2-(n+1)+1=n^2+n+1.$$

Поэтому после такого разложения на множители числителей и знаменателей можно произвести сокращение дробей:

$$A^2<\frac{3\cdot3}{1\cdot7}\cdot\frac{4\cdot7}{2\cdot13}\cdot\frac{5\cdot13}{3\cdot21}\ldots\frac{2014\cdot(2013^2-2013+1)}{2012\cdot(2013^2+2013+1)}=$$
$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{2013\cdot2014}{2013^2+2013+1}<\frac{3}{2}=B^2.$$

Следовательно, $A<B$.

4. *Ответ*. Да, найдется.

Решение. Подходящие выпуклые многогранники можно свернуть, например, из треугольника ABC со сторонами $AB=AC=3$ и $BC=2$. Пусть точки K, L, M и N таковы, что $BM=MK=KA=1$, $CN=NL=LA=1$ и $BP=PC=1$.

Если провести сгибы вдоль линий KL и MN, совместив при этом точки A и P в некоторой точке S, расположенной в пространстве (это можно сделать, так как высота AP треугольника ABC перпендикулярна отрезкам KL, MN и делится ими на три равные части), а затем — сгибы вдоль линий MP и NP, совместив при этом точки B и K, C и L, то при этом образуется четырехугольная пирамида $SKLNM$, удовлетворяющая условию задачи (рис. 32).

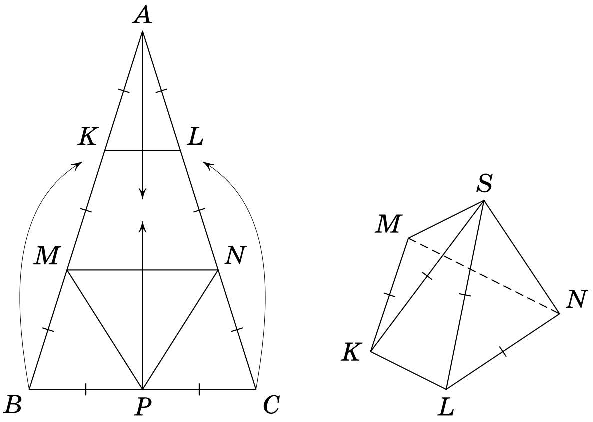

Рис. 32

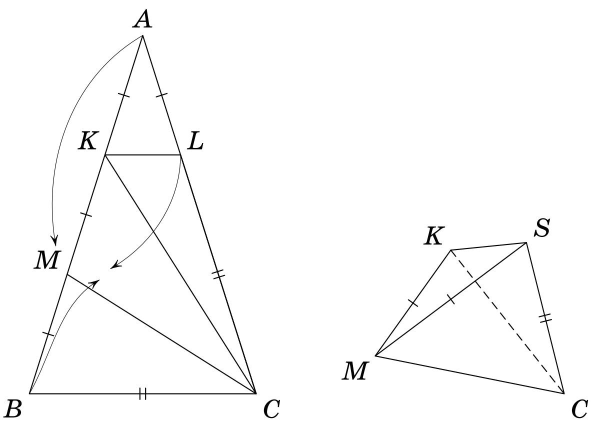

Рис. 33

Если же провести сгибы вдоль линий MC, и KC, совместив при этом точки B и L в некоторой точке S, расположенной в пространстве (это можно сделать, так как сумма любых двух из трех углов BCM, MCK и KCL всегда больше третьего из них, а $BC = LC$), а затем — сгиб вдоль линии KL, совместив при этом точки A и M, то образуется треугольная пирамида $SKMC$, противоположные ребра которой попарно различны (рис. 33).

Заметим, что развертка указанного вида, но для треугольника со сторонами 3, 4 и 5, является решением следующей задачи, предложенной ранее С. В. Маркеловым на олимпиаде им. И. Ф. Шарыгина. *Может ли развертка тетраэдра отказаться треугольником со сторонами* 3, 4 *и* 5 (*тетраэдр можно резать только по ребрам*)?

Комментарий. Пользуясь формулой Эйлера В − Р + Г = 2, где В, Р и Г — число вершин, ребер и граней некоторого выпуклого многогранника соответственно, можно доказать, что нет других выпуклых многогранников, удовлетворяющих условию задачи, кроме треугольной и четырехугольной пирамиды.

5. *Ответ*. а) Да. б) Да.

Решение. а) Пусть Дима сообщил Саше следующие 17 номеров: 1, 2, ..., 10, 40, 50, ..., 100. Если числа, стоящие под номерами m и n ($n > m$), совпали, то количество написанных Сашей чисел является делителем числа $n - m$. Разность $n - m$ для названных Димой номеров может равняться: 1, 2, ..., 10, 30, 31, ..., 99.

Будем перебирать по очереди все возможные варианты количества написанных Сашей чисел от 1 до 100. Если Саша написал одно число, то Дима узнает это, сравнив первое и второе число. Предположим, что Дима уже знает, что Саша написал не меньше k чисел, где $k = 2, 3, \ldots, 99$. Покажем, как Дима сможет определить, написал Саша ровно $k + 1$ число или нет.

Если $k = 2, 3, \ldots, 9$, то Дима сравнивает первое число и число с номером $k + 1$. Их совпадение будет означать, что количество написанных Сашей чисел является делителем k. Учитывая, что по нашему предположению Дима уже знает, что этих чисел не меньше k, он получит, что k и есть искомое количество. Аналогично, если $k = 10, 30, 31, 32, \ldots, 99$, он сравнит два известных ему числа с разностью номеров, равной k, и точно узнает, является ли k количеством написанных Сашей чисел. Если же $k = 11, 12, \ldots, 29$, то Дима сможет подобрать среди известных ему чисел такие две пары, разность номеров первой из которых равна $2k$, а второй — $3k$. Если в каждой из пар числа совпадут, то k — непременно искомое количество чисел, ведь это единственное число, не меньшее k, которое делится и на $2k$, и на $3k$. Наконец, если $k = 100$, то Дима сможет заключить, что Саша написал ровно 100 чисел.

б) Пусть n — количество написанных Сашей чисел. Покажем, как Дима сможет узнать его разложение на простые множители, сообщив Саше 15 номеров.

Обозначим через N наименьшее общее кратное всех чисел от 1 до 100. Это число равно произведению следующих чисел: 2^6, 3^4, 5^2, 7^2, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 и 97. Каждому из чисел 2^k ($k=1, 2, \ldots, 6$) сопоставим число 2^{7-k}, каждому из чисел 3^l ($l=1, 2, \ldots, 4$) — число 3^{5-l}, каждому из чисел 5^m и 7^m ($m=1, 2$) — числа 5^{3-m} и 7^{3-m} соответственно, каждому простому числу от 11 до 97 — само это число. Заметим, что число с номером $1+\frac{N}{s}$, где s — делитель N, будет совпадать с первым числом тогда и только тогда, когда $\frac{N}{s}$ делится на n. Заметим также, что $\frac{N}{s}$ делится на n тогда и только тогда, когда для любого делителя числа n вида 2^k, 3^l, 5^m, 7^m, 11, …, 97 сопоставленное ему число не является делителем числа s.

Перечислим номера, которые должен назвать Дима. Пусть первым Дима назовет номер 1. Нетрудно видеть, что никакие два из 25 чисел 2^4, 3^3, 5^2, 7^2, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 и 97 не могут одновременно являться делителями числа n. Присвоим каждому из этих чисел свой код от 00001 до 11001, состоящий из пяти цифр 0 или 1. Пусть со второго по шестой номера Дима назовет

$$1+\frac{N}{s_1}, \quad 1+\frac{N}{s_2}, \quad \ldots, \quad 1+\frac{N}{s_5},$$

где s_j ($j=1,\ 2,\ \ldots,\ 5$) — число, равное произведению всех чисел, сопоставленных каждому из упомянутых 25 чисел, код которых содержит единицу на месте j.

Эти номера позволят Диме определить, является ли одно из упомянутых 25 чисел делителем числа n. Для этого ему понадобится сравнить числа с номерами 1 и $1+\frac{N}{s_j}$ ($j=1, 2, \ldots, 5$) и составить новый код, где на месте j будет стоять 0, если числа совпали, и 1 в противном случае. Если получится код 00000, то ни одно из упомянутых 25 чисел делителем n не является. Если же получился другой код, то Дима определит, что делителем n будет то самое число, код которого получится.

Никакие два из трех чисел 2^6, 3^4 и 5 не могут одновременно являться делителями числа n. Присвоим каждому из этих чисел свой код от 01 до 11, состоящий из двух цифр 0 или 1. Пусть седьмым и восьмым Дима назовет номера $1+\frac{N}{s_6}$, $1+\frac{N}{s_7}$, где s_{j+5} $(j=1,\ 2)$ — число, равное произведению всех чисел, сопоставленных каждому из упомянутых трех чисел, код которых содержит единицу на месте j. Как и ранее, эти номера позволят Диме определить, является ли одно из упомянутых трех чисел делителем числа n, и если да, то какое из них.

Пусть также Дима назовет номера

$$1+\frac{N}{2^2},\quad 1+\frac{N}{2^4},\quad 1+\frac{N}{2^5},\quad 1+\frac{N}{2^6},$$
$$1+\frac{N}{3^3},\quad 1+\frac{N}{3^4},\quad 1+\frac{N}{7^2}.$$

Как и ранее, эти номера позволят Диме определить, являются ли числа 2^5, 2^3, 2^2, 2, 3^2, 3 и 7 делителями числа n.

Таким образом, Дима сможет определить разложение числа n на простые сомножители, а значит и само число n, сообщив Саше менее 16 номеров.

Заметим, что 15 номеров — далеко не наименьшее возможное количество, благодаря которому Дима всегда сможет отгадать количество написанных Сашей чисел. Попробуйте предложить свой способ, где число названных Димой номеров будет как можно меньшим (при условии, что Дима всегда сможет отгадать количество Сашиных чисел)!

6 класс (*1619 работ*)

	1	2	3	4	5	6
0	1269	790	1053	545	1558	1535
1	18	130	146	459	24	25
2	5	545	180	422	10	31
3	327	108	27	48	2	13
4		46	23	47	0	13
5			190	14	0	0
6				84	2	0
7					23	1
8						1

7 класс (*1213 работ*)

	1	2	3	4	5	6
0	631	306	573	643	876	1064
1	62	70	68	89	219	2
2	130	702	321	71	63	66
3	12	2	34	54	6	36
4	378	133	217	59	5	3
5				70	11	2
6				227	33	7
7						1
8						11

8 класс (*525 работ*)

	1	2	3	4	5	6
+	222	117	185	77	1	3
±	6	13	64	16	1	4
+/2	0	0	0	0	0	12
∓	3	35	66	124	5	39
−	261	148	127	137	235	385
0	33	212	83	171	283	82

9 класс (*449 работ*)

	1	2	3	4	5	6
+	127	208	98	86	0	2
+.	0	4	3	0	0	1
±	84	4	6	1	0	3
∓	51	15	3	0	0	0
−	119	111	111	180	167	128
0	68	107	228	182	282	315

10 класс (*323 работы*)

	1	2	3	4	5	6а	6б
+	135	63	55	7	2	2	2
+.	34	6	1	1	0	0	0
±	13	13	18	7	1	0	0
∓	5	30	1	1	0	0	0
−.	12	146	5	23	1	4	0
−	83	53	116	184	45	26	23
0	41	12	127	100	274	291	231

11 класс, первый день (*669 работ*)

	1	2	3	4	5	6а	6б
+	322	105	83	51	10	60	1
±	42	26	7	10	5	7	0
∓	105	186	14	19	99	55	27
−	200	352	565	589	555	547	641

11 класс, второй день (*156 работ*)

	1	2	3	4	5а	5б
+	42	69	7	9	1	0
±	42	23	1	11	6	0
∓	41	12	5	3	17	2
−	31	52	143	133	132	154

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ

является ведущим учебно-научным центром в области математики и механики. На факультете действуют научные школы, возглавляемые учёными самого высокого класса. Учебные планы факультета охватывают все современные направления математики и механики. Диплом механико-математического факультета признан во всём мире. Выпускники факультета трудятся во всех крупных научно-исследовательских центрах, учебных и иных учреждениях, не обязательно непосредственно связанных с математикой и механикой. На мехмате учат не столько рецептам решения конкретных задач, сколько умению думать самостоятельно, а также извлекать знания из разных источников. Именно это позволяет выпускникам факультета быстро включаться и быть эффективными практически в любой иной сфере деятельности — от компьютерной или финансовой до управления производством и политики.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЭТЮДЫ
http://www.etudes.ru

На сайте представлены этюды, выполненные с использованием современной компьютерной 3D-графики, увлекательно и интересно рассказывающие о математике и ее приложениях. Приглашаем совершить познавательные экскурсии по красивым математическим задачам. Их постановка понятна школьнику, но до сих пор некоторые задачи не решены учеными.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ ВШЭ

Факультет математики — небольшой молодой математический факультет, ориентированный на исследования. Преподают на факультете ведущие математики Москвы, активно разрабатывающие собственные направления. Особенное внимание уделяется современным направлениям в алгебре, топологии, алгебраической геометрии. Студенты факультета получают широкую базовую математическую подготовку. Это даст выпускникам свободу выбора последующей специализации, а приобрётенные исследовательские навыки пригодятся вне зависимости от специальности.

По окончании программы бакалавриата выпускники смогут совершенствоваться в магистратуре и аспирантуре факультета математики, а также других факультетов ВШЭ и других ведущих вузов России и мира.

Высшая школа экономики — государственный университет. Студенты получают отсрочку от призыва в вооружённые силы. В университете имеется военная кафедра. Иногородние студенты обеспечиваются общежитием.

Подробную информацию о факультете и преподавателях см. на сайте http://math.hse.ru.

Информацию об учебных курсах и учебные материалы можно найти на сайте http://vyshka.math.ru.

Вопросы задавайте по электронной почте math@hse.ru.

БИБЛИОТЕКА САЙТА Math.Ru
http://www.math.ru/lib

В этой библиотеке вы найдете и самые первые российские учебники математики («Арифметика» Л. Ф. Магницкого и геометрия Я. В. Брюса), и научно-популярную литературу советского периода, а также интересные книги современных ученых (всего около 500 книг).

ЖУРНАЛ «КВАНТ» В ИНТЕРНЕТЕ

http://kvant.ras.ru/

Первый номер «Кванта» вышел в январе 1970 года. Материалы, накопленные в журнале с этого времени, бесценны. Не раз доводилось спрашивать молодых ученых, многого добившихся в науке, и замечательных учителей: «Что повлияло на выбор профессии?» Ответы почти всегда были одни и те же: Учитель (школьный учитель, сумевший увлечь своим предметом) и «Квант».

Сейчас старые номера журнала «Квант» практически недоступны читателям. Имеется ничтожное число библиотек, в которых есть полное собрание вышедших журналов. Этот сайт призван открыть путь к богатому архиву журнала.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ И ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ

http://vofem.ru/

Электронная версия научно-популярного журнала, заложившего традиции жанра в литературе на русском языке.

С 1886 по 1917 год вышло 674 выпуска В. О. Ф. Э. М. Журнал в разные годы возглавляли: Эразм Корнелиевич Шпачинский (1886—1898), Владимир Акимович Циммерман (1898—1904), Вениамин Фёдорович Каган (1902—1917).

Периодичность — 24 раза в год отдельными выпусками в 24 или 32 страницы каждый.

На страницах журнала печатались и научные статьи, и, например, задачи для учеников и для учителей, научная хроника, обзоры издаваемой литературы, отчёты о заседаниях московского математического кружка и многое другое.

ПРОЕКТ «ЗАДАЧИ»

Все задачи Московских олимпиад (с 1935 г.) размещены на сайте http://www.problems.ru

ОДИННАДЦАТАЯ ГОРОДСКАЯ УСТНАЯ ОЛИМПИАДА ПО ГЕОМЕТРИИ ДЛЯ 8—11 КЛАССОВ

состоится 14 апреля 2013 года

http://olympiads.mccme.ru/ustn/

Олимпиада рассчитана на школьников, успешно выступивших в городской математической олимпиаде, а также на школьников, увлекающихся геометрией.

Олимпиада по геометрии проводится в рамках Девятой Всероссийской олимпиады по геометрии памяти И. Ф. Шарыгина. В ней могут принять участие школьники 8—11 классов. Призеры олимпиады будут награждены дипломами оргкомитета и математической литературой. Победители олимпиады — учащиеся 8—10 классов — будут приглашены на финальный тур Всероссийской олимпиады по геометрии им. И. Ф. Шарыгина, который состоится летом 2013 года.

Олимпиада будет проходить в помещении школы № 192 по адресу Ленинский проспект, д. 34-А (м. «Ленинский проспект»). Начало олимпиады в 11^{00}. Справки по телефону: (495) 137-33-55 с 10^{00} до 18^{00}.

Так как ожидается большое количество участников, то желающих принять участие в олимпиаде просим до 7 апреля зарегистрироваться на сайте школы

http://olymp.sch192.ru

При регистрации необходимо указать свою фамилию, имя, класс, школу и округ (город).

Участников просят иметь при себе: сменную обувь, письменные принадлежности, бумагу для записей.

ВЫЕЗДНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ШКОЛЫ

Подробную оперативную информацию о выездных математических и околоматематических школах смотрите на странице http://www.mccme.ru/leto

Тринадцатая летняя школа «СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА»

пройдёт с 20 по 31 июля 2013 года в Дубне (на базе санатория-профилактория «Ратмино») для старших школьников (окончивших 10 или 11 класс) и студентов младших курсов (окончивших I или II курс).

Математики крупнейших научных и учебных центров проведут в рамках школы лекционные и семинарские учебные курсы для старших школьников и студентов младших курсов. Не менее важным, чем сами занятия, будет живое общение школьников и студентов с академиками и профессорами, общение, позволяющее обсудить интересный вопрос, получить квалифицированный ответ от занимающегося данным разделом старшего — просто «приобщиться к большой науке». Слушатели смогут получить конкретные ориентиры в разных областях науки, что поможет им выбрать себе сферу интересов.

Отличительной чертой школы является как высочайший научный уровень преподавателей, так и очень высокий уровень участников. Если вы хотите участвовать в работе школы, присылайте в Оргкомитет до 10 мая заполненную анкету участника. (Персонально приглашаются на школу обладатели дипломов I—II степени в параллели 10 и 11 классов на этой или предыдущей ММО.)

Председатель научного комитета школы — профессор А. Б. Сосинский.

Предварительное согласие провести занятия на школе дали академик РАН В. А. Васильев, чл.-корр. РАН Д. О. Орлов, А. А. Разборов и И. А. Панин, проф. А. Б. Сосинский, В. М. Тихомиров, В. А. Успенский, М. Э. Казарян, С. К. Ландо, а также Ю. М. Бурман, В. А. Клепцын, А. Г. Кузнецов, Г. Ю. Панина, И. В. Ященко и другие.

Материалы прошедших школ и информационное сообщение о школе—2013 смотрите на сайте

http://www.mccme.ru/dubna/

Контактный e-mail оргкомитета: dubna@mccme.ru

ОГЛАВЛЕНИЕ

LXXVI Московская математическая олимпиада.
Задачи и решения

Подписано в печать 24/III 2013 г.
Формат бумаги 60 × 90/16. Объём 4,5 печ. л.
Гарнитура Школьная. Тираж 2000 экз. Заказ .

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования.
119002, Москва, Бол. Власьевский пер., 11.
Тел. (499) 241-74-83.

ИНФОРМАЦИЯ О НАБОРЕ
в московские специализированные школы и классы на 2013/2014 учебный год

Школа	Телефон, URL	Адрес	Классы	Сроки
2	www.sch2.ru koval-dji@yandex.ru	ул. Фотиевой, 18 (м. «Октябрьская»)	7, 8 физ.-мат., добор в 9, 10 физ.-мат.	март—май
25	sch25.ru nabor@mathbaby.ru	Университетский просп., 7 (м. Университетъ)	7 физ.-мат.; добор в 8, 9, 10 физ.-мат.	с февраля
54	(499) 245-99-72 (499) 245-54-25 moscowschool54.ru	ул. Доватора, 5/9 (м. «Спортивная»)	8 матем., добор в 9 и 10 матем.	февраль—май
57	(495) 691-85-72 (495) 691-54-58 sch57.msk.ru	Мал. Знаменский пер., 7/10, стр. 5 (м. «Боровицкая»)	8 матем., 9 матем., 9 гуман.	с 13 марта с 23 марта с 25 марта
179	(495) 692-48-51 www.179.ru	ул. Бол. Дмитровка, 5/6, стр. 7 (м. «Охотный ряд»)	6 изобр., 7, 8, 9 матем., 9 биол.	март
192	(499) 137-33-55 (499) 137-72-85 www.sch192.ru	Ленинский просп. 34-А (м. «Ленинский просп.»)	5 ест.-науч., 7 био.-хим. и физ.-мат.; добор: в 8, 9, 10, био.-хим. и физ.-мат, в 9, 10 физ.-хим.	апрель—май по пятницам в 16^{00}
218	(499) 976-19-85 school218.ru	Дмитровское ш., 5а (м. «Дмитровская»)	8 (ИУП), добор в 9, 10 (ИУП)	с 25 марта по 18 мая
444	(495) 465-23-52 (495) 465-60-52 schv444.mskobar.ru	ул. Ниж. Первомайская, 14 (м. «Первомайская»)	8 мат.-инф.-физ., добор в 9, 10 мат.-инф.-физ.	март—май
1189	(499) 193-60-23 1189.ru sch1189@szouo.ru	ул. Маршала Василевского, 9 к. 1 (м. «Щукинская»)	10 физ.-мат.	15 мая, 16^{00}
1303	(495) 362-34-40 www.1303.ru lycg1303.mskobr.ru	Таможенный проезд, 4 (м. «Площадь Ильича»/«Римская»)	9 физ.-мат., добор в 10 физ.-мат.	февраль—май