LXXI Московская математическая олимпиада

10 класс 09.03.2008

Задача №1. Аудитория имеет форму правильного шестиугольника со стороной $\mathbf{3}$ м. В каждом углу установлен храпометр, определяющий число спящих студентов на расстоянии, не превышающем $\mathbf{3}$ м. Сколько всего спящих студентов в аудитории, если сумма показаний храпометров равна $\mathbf{7}$?

Задача №2. Андрей и Борис играют в следующую игру. Изначально на числовой прямой в точке p стоит робот. Сначала Андрей говорит расстояние, на которое должен сместиться робот. Потом Борис выбирает направление, в котором робот смещается на это расстояние. И так далее. При каких p Андрей может добиться того, что за конечное число ходов робот попадет в одну из точек $\mathbf{0}$ или $\mathbf{1}$ вне зависимости от действий Бориса?

Задача №3. Все целые числа от $\mathbf{-33}$ до $\mathbf{100}$ включительно расставили в некотором порядке и рассмотрели суммы каждых двух соседних чисел. Оказалось, что среди них нет нулей. Тогда для каждой такой суммы нашли число ей обратное. Полученные числа сложили. Могло ли в результате получится целое число?

Задача №4. Некоторый многочлен с целыми коэффициентами принимает в k целых точках значения среди чисел от $\mathbf{1}$ до $k-1$. Докажите, что если $k \geqslant 6$, то эти значения равны.

Задача №5. Высоты AA' и CC' остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Точка B_0 — середина стороны AC. Докажите, что точка пересечения прямых, симметричных BB_0 и HB_0 относительно биссектрис углов ABC и AHC соответственно, лежит на прямой $A'C'$.

Задача №6. Натуральные числа покрашены в N цветов. Чисел каждого цвета бесконечно много. Известно, что цвет полусуммы двух различных чисел одной четности зависит только от цветов слагаемых (например, полусумма синего и красного всегда жёлтая).

(а) Докажите, что полусумма чисел одной четности одного цвета всегда окрашена в тот же цвет.

(б) При каких N такая раскраска возможна?

Закрытие олимпиады пройдёт 23.03.2008 в Главном здании МГУ. Начало в 9.00.
Победители олимпиады будут приглашены на отброчный тур по формированию команды Москвы на Всероссийскую олимпиаду 24 марта 2008 года.
Подробную информацию смотрите на сайте http://www.mccme.ru

LXXI Московская математическая олимпиада
10 класс 09.03.2008

Задача №1. Аудитория имеет форму правильного шестиугольника со стороной $\mathbf{3}$ м. В каждом углу установлен храпометр, определяющий число спящих студентов на расстоянии, не превышающем $\mathbf{3}$ м. Сколько всего спящих студентов в аудитории, если сумма показаний храпометров равна $\mathbf{7}$?

Задача №2. Андрей и Борис играют в следующую игру. Изначально на числовой прямой в точке p стоит робот. Сначала Андрей говорит расстояние, на которое должен сместиться робот. Потом Борис выбирает направление, в котором робот смещается на это расстояние. И так далее. При каких p Андрей может добиться того, что за конечное число ходов робот попадет в одну из точек $\mathbf{0}$ или $\mathbf{1}$ вне зависимости от действий Бориса?

Задача №3. Все целые числа от $\mathbf{-33}$ до $\mathbf{100}$ включительно расставили в некотором порядке и рассмотрели суммы каждых двух соседних чисел. Оказалось, что среди них нет нулей. Тогда для каждой такой суммы нашли число ей обратное. Полученные числа сложили. Могло ли в результате получится целое число?

Задача №4. Некоторый многочлен с целыми коэффициентами принимает в k целых точках значения среди чисел от $\mathbf{1}$ до $k-1$. Докажите, что если $k \geqslant 6$, то эти значения равны.

Задача №5. Высоты AA' и CC' остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Точка B_0 — середина стороны AC. Докажите, что точка пересечения прямых, симметричных BB_0 и HB_0 относительно биссектрис углов ABC и AHC соответственно, лежит на прямой $A'C'$.

Задача №6. Натуральные числа покрашены в N цветов. Чисел каждого цвета бесконечно много. Известно, что цвет полусуммы двух различных чисел одной четности зависит только от цветов слагаемых (например, полусумма синего и красного всегда жёлтая).
(а) Докажите, что полусумма чисел одной четности одного цвета всегда окрашена в тот же цвет.
(б) При каких N такая раскраска возможна?

Закрытие олимпиады пройдёт 23.03.2008 в Главном здании МГУ. Начало в 9.00.
Победители олимпиады будут приглашены на отброчный тур по формированию команды Москвы на Всероссийскую олимпиаду 24 марта 2008 года.
Подробную информацию смотрите на сайте http://www.mccme.ru

LXXI Московская математическая олимпиада, 11 класс

1. Числа p и q таковы, что параболы $y = -2x^2$ и $y = x^2 + px + q$ пересекаются в двух точках, ограничивая некоторую фигуру. Найдите уравнение *вертикальной* прямой, делящей площадь этой фигуры пополам.

2. Найдите наименьшее натуральное n, для которого число n^n *не является* делителем числа $2008! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2008$.

3. На едином экзамене 333 ученика допустили в общей сложности 1000 ошибок. Возможно ли при этом, что учеников, сделавших более чем по 5 ошибок, оказалось *больше*, чем учеников, сделавших менее чем по 4 ошибки?

4. Через центр O вписанной в треугольник ABC окружности проведена прямая, перпендикулярная прямой AO и пересекающая прямую BC в точке M. Из точки O на прямую AM опущен перпендикуляр OD. *Докажите*, что точки A, B, C и D лежат на одной окружности.

5. Станок выпускает детали двух типов. На ленте его конвейера выложены в одну линию 75 деталей. Пока конвейер движется, на станке готовится деталь того типа, которого на ленте меньше. Каждую минуту очередная деталь падает с ленты, а подготовленная кладется в ее конец. Через некоторое *число* минут после включения конвейера может случиться так, что *расположение деталей на ленте впервые повторит начальное.* Найдите: **а)** наименьшее такое число, **б)** все такие числа.

6. Игрок на компьютере управляет лисой, охотящейся за двумя зайцами. В вершине A квадрата $ABCD$ находится нора: если в нее, в отсутствие лисы, попадает хотя бы один заяц, то игра проиграна. Лиса ловит зайца, как только оказывается с ним в одной точке (возможно, в точке A). Вначале лиса сидит в точке C, а зайцы — в точках B и D. Лиса бегает повсюду со скоростью не больше v, а зайцы — по лучам AB и AD со скоростью не больше 1. При каких значениях v лиса сможет поймать *обоих* зайцев?

7. Среди вершин любого ли многогранника можно выбрать четыре вершины тетраэдра, площадь проекции которого на *любую* плоскость составляет от площади проекции (на ту же плоскость) исходного многогранника **а)** больше, чем $\frac{1}{4}$, **б)** не меньше, чем $\frac{1}{9}$, **в)** не меньше, чем $\frac{1}{7}$?

Закрытие олимпиады пройдёт в Главном здании МГУ 23.03.2008.

Начало в 12:00. См. также сайт http://www.mccme.ru. Москва, 9 марта 2008 года

LXXI Московская математическая олимпиада

8 класс 09.03.2008

Задача №1. Верно ли, что к любому числу, равному произведению двух последовательных натуральных чисел, можно приписать в конце какие-то две цифры так, что получится квадрат натурального числа?

Задача №2. В кинотеатре **7** рядов по **10** мест каждый. Группа из **50** детей сходила на утренний сеанс, а потом на вечерний. Докажите, что найдутся двое детей, которые на утреннем сеансе сидели в одном ряду и на вечернем тоже сидели в одном ряду.

Задача №3. На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки K и M соответственно так, что $KM \parallel AC$. Отрезки AM и KC пересекаются в точке O. Известно, что $AK = AO$ и $KM = MC$. Докажите, что $AM = KB$.

Задача №4. Турнир, в котором участвовало **20** спортсменов, судили **10** арбитров. Каждый сыграл с каждым один раз, и каждую встречу судил ровно один арбитр. После окончания каждой игры оба участника фотографировались с арбитром. Через год после турнира была найдена стопка из всех этих фотографий (по фотографии неясно, кто на ней игроки, а кто — арбитр). Оказалось, что не про каждого можно определить, кем он является — спортсменом или арбитром. Сколько могло быть таких людей?

Задача №5. Поставьте на плоскости **9** точек так, чтобы никакие **4** не лежали на одной прямой, но из любых **6**-ти нашлись **3**, лежащие на одной прямой. *(На рисунке проведите все прямые, на которых лежат по три отмеченные точки.)*

Задача №6. У игрока есть M золотых и N серебряных монет. В начале каждого раунда игрок ставит какие-то монеты на красное, какие-то на чёрное (можно вообще ничего не ставить на один из цветов, часть монет можно никуда не ставить). В конце каждого раунда крупье объявляет, что один из цветов выиграл. Ставку на выигравший цвет крупье отдает игроку, удваивая в ней количество монет каждого вида, а ставку на проигравший цвет забирает себе.

Игрок хочет, чтобы монет одного вида у него стало ровно в три раза больше, чем другого (в частности, его устроит остаться совсем без денег). При каких M и N крупье не сможет ему помешать?

Закрытие олимпиады пройдёт 23.03.2008 в Главном здании МГУ. Начало в 9.00.
Подробную информацию смотрите на сайте http://www.mccme.ru

LXXI Московская математическая олимпиада

8 класс 09.03.2008

Задача №1. Верно ли, что к любому числу, равному произведению двух последовательных натуральных чисел, можно приписать в конце какие-то две цифры так, что получится квадрат натурального числа?

Задача №2. В кинотеатре **7** рядов по **10** мест каждый. Группа из **50** детей сходила на утренний сеанс, а потом на вечерний. Докажите, что найдутся двое детей, которые на утреннем сеансе сидели в одном ряду и на вечернем тоже сидели в одном ряду.

Задача №3. На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки K и M соответственно так, что $KM \parallel AC$. Отрезки AM и KC пересекаются в точке O. Известно, что $AK = AO$ и $KM = MC$. Докажите, что $AM = KB$.

Задача №4. Турнир, в котором участвовало **20** спортсменов, судили **10** арбитров. Каждый сыграл с каждым один раз, и каждую встречу судил ровно один арбитр. После окончания каждой игры оба участника фотографировались с арбитром. Через год после турнира была найдена стопка из всех этих фотографий (по фотографии неясно, кто на ней игроки, а кто — арбитр). Оказалось, что не про каждого можно определить, кем он является — спортсменом или арбитром. Сколько могло быть таких людей?

Задача №5. Поставьте на плоскости **9** точек так, чтобы никакие **4** не лежали на одной прямой, но из любых **6**-ти нашлись **3**, лежащие на одной прямой. *(На рисунке проведите все прямые, на которых лежат по три отмеченные точки.)*

Задача №6. У игрока есть M золотых и N серебряных монет. В начале каждого раунда игрок ставит какие-то монеты на красное, какие-то на чёрное (можно вообще ничего не ставить на один из цветов, часть монет можно никуда не ставить). В конце каждого раунда крупье объявляет, что один из цветов выиграл. Ставку на выигравший цвет крупье отдает игроку, удваивая в ней количество монет каждого вида, а ставку на проигравший цвет забирает себе.

Игрок хочет, чтобы монет одного вида у него стало ровно в три раза больше, чем другого (в частности, его устроит остаться совсем без денег). При каких M и N крупье не сможет ему помешать?

Закрытие олимпиады пройдёт 23.03.2008 в Главном здании МГУ. Начало в 9.00.
Подробную информацию смотрите на сайте http://www.mccme.ru

LXXI Московская математическая олимпиада

9 класс 09.03.2008

Задача №1. Две команды КВН участвуют в игре из четырех конкурсов. За каждый конкурс каждый из шести судей выставляет оценку — целое число от $\mathbf{1}$ до $\mathbf{5}$; компьютер находит среднее арифметическое оценок за конкурс и округляет его с точностью до десятых. Победитель определяется по сумме четырех полученных компьютером значений. Может ли оказаться, что сумма всех оценок, выставленных судьями, у проигравшей команды больше, чем у выигравшей?

Задача №2. Велосипедист путешествует по кольцевой дороге, двигаясь в одном направлении. Каждый день он проезжает $\mathbf{71}$ км и останавливается ночевать на обочине. На дороге есть аномальная зона длины $\mathbf{71}$ км. Если велосипедист останавливается в ней на ночлег на расстоянии $\boldsymbol{y}$ км от одной границы зоны, просыпается он в противоположном месте зоны, на расстоянии $\boldsymbol{y}$ км от другой ее границы. Докажите, что в каком бы месте велосипедист ни начал свое путешествие, рано или поздно он остановится в нем на ночлег.

Задача №3. Пусть $\boldsymbol{AL}$ — биссектриса треугольника $\boldsymbol{ABC}$, $\boldsymbol{O}$ — центр описанной около этого треугольника окружности, $\boldsymbol{D}$ — такая точка на стороне $\boldsymbol{AC}$, что $\boldsymbol{AD = AB}$. Докажите, что прямые $\boldsymbol{AO}$ и $\boldsymbol{LD}$ перпендикулярны.

Задача №4. Назовем *усложнением* числа приписывание к нему одной цифры в начало, в конец или между любыми двумя его цифрами. Существует ли натуральное число, из которого невозможно получить полный квадрат с помощью ста усложнений?

Задача №5. У Васи есть $\mathbf{100}$ банковских карточек. Вася знает, что на одной из карточек лежит $\mathbf{1}$ рубль, на другой — $\mathbf{2}$ рубля, и так далее, на последней — $\mathbf{100}$ рублей, но не знает, на какой из карточек сколько денег. Вася может вставить карточку в банкомат и запросить некоторую сумму. Банкомат выдает требуемую сумму, если она на карточке есть, не выдает ничего, если таких денег на карточке нет, а карточку съедает в любом случае. При этом банкомат не показывает, сколько денег было на карточке. Какую наибольшую сумму Вася может гарантированно получить?

Задача №6. Покажите, что существует выпуклая фигура, ограниченная дугами окружностей, которую можно разрезать на несколько частей и из них сложить две выпуклые фигуры, ограниченные дугами окружностей.

Закрытие олимпиады пройдёт 23.03.2008 в Главном здании МГУ. Начало в 9.00.
Победители олимпиады будут приглашены на отброчный тур по формированию команды Москвы на Всероссийскую олимпиаду 24 марта 2008 года.
Подробную информацию смотрите на сайте http://www.mccme.ru

LXXI Московская математическая олимпиада 9 класс 09.03.2008
Задача №1. Две команды КВН участвуют в игре из четырех конкурсов. За каждый конкурс каждый из шести судей выставляет оценку — целое число от 1 до 5; компьютер находит среднее арифметическое оценок за конкурс и округляет его с точностью до десятых. Победитель определяется по сумме четырех полученных компьютером значений. Может ли оказаться, что сумма всех оценок, выставленных судьями, у проигравшей команды больше, чем у выигравшей?
Задача №2. Велосипедист путешествует по кольцевой дороге, двигаясь в одном направлении. Каждый день он проезжает 71 км и останавливается ночевать на обочине. На дороге есть аномальная зона длины 71 км. Если велосипедист останавливается в ней на ночлег на расстоянии y км от одной границы зоны, просыпается он в противоположном месте зоны, на расстоянии y км от другой ее границы. Докажите, что в каком бы месте велосипедист ни начал свое путешествие, рано или поздно он остановится в нем на ночлег.
Задача №3. Пусть AL — биссектриса треугольника ABC, O — центр описанной около этого треугольника окружности, D — такая точка на стороне AC, что AD = AB. Докажите, что прямые AO и LD перпендикулярны.
Задача №4. Назовем усложнением числа приписывание к нему одной цифры в начало, в конец или между любыми двумя его цифрами. Существует ли натуральное число, из которого невозможно получить полный квадрат с помощью ста усложнений?
Задача №5. У Васи есть 100 банковских карточек. Вася знает, что на одной из карточек лежит 1 рубль, на другой — 2 рубля, и так далее, на последней — 100 рублей, но не знает, на какой из карточек сколько денег. Вася может вставить карточку в банкомат и запросить некоторую сумму. Банкомат выдает требуемую сумму, если она на карточке есть, не выдает ничего, если таких денег на карточке нет, а карточку съедает в любом случае. При этом банкомат не показывает, сколько денег было на карточке. Какую наибольшую сумму Вася может гарантированно получить?
Задача №6. Покажите, что существует выпуклая фигура, ограниченная дугами окружностей, которую можно разрезать на несколько частей и из них сложить две выпуклые фигуры, ограниченные дугами окружностей.
Закрытие олимпиады пройдёт 23.03.2008 в Главном здании МГУ. Начало в 9.00. Победители олимпиады будут приглашены на отброчный тур по формированию команды Москвы на Всероссийскую олимпиаду 24 марта 2008 года. Подробную информацию смотрите на сайте http://www.mccme.ru