

Олимпиада школьников Ломоносов–2016
по механике и математическому моделированию

7–8 класс

В первых четырех задачах требуется дать только ответ (решение присылать не нужно). В пятой задаче требуется прислать решение в присоединенном файле. Ответом на каждую из первых четырех задач является целое число или десятичная дробь, имеющая не более двух знаков после запятой. В случае, когда количество знаков после запятой оказывается больше, дробь нужно округлить до сотых по правилам округления.

При вычислениях (в случае необходимости) считать:
ускорение свободного падения равно 10 м/с^2

1. Некий человек нанял работника на год, обещав ему дать 12 рублей и кафтан. Но тот по случаю, проработав 7 месяцев, захотел уйти и просил достойную плату с кафтаном. Ему дали по достоинству 5 рублей и кафтан. Какой цены был кафтан? (*Старинная задача*) Ответ дайте в рублях, при необходимости округлив его до сотых.

{4,8}

Решение. Это задача Е. Д. Войтяховского из «Курса чистой математики» (1811 г.). Если плата за год равна $12 + K$ (K — стоимость кафтана), то за 7 месяцев должны заплатить $\frac{7(12+K)}{12}$. Получаем уравнение $\frac{7(12+K)}{12} = 5 + K$, отсюда $\frac{5K}{12} = 2$, $K = \frac{24}{5} = 4,8$ рубля. Ответ: 4,8.

2. Гирия массой 200 граммов стоит на столе. Ее перевернули и поставили на стол другой гранью, площадь которой меньше на 15 кв. см. При этом давление на стол увеличилось на 1200 Па. Найдите площадь грани, на которой гирия стояла первоначально. Ответ дайте в кв. см., при необходимости округлите его до двух знаков после запятой.

{25}

Решение. После перевода в СИ получается: $\frac{2}{S-1,5 \cdot 10^{-3}} - \frac{2}{x} = 1200$.

Отсюда получается квадратное уравнение: $4 \cdot 10^5 S^2 - 600S - 1 = 0$.

После замены переменных $y = 200S$ уравнение примет вид: $10y^2 - 3y - 1 = 0$, решение которого легко находится $y = 1/2$. Таким образом, площадь искомой грани равна $S = \frac{1}{400} \text{ м}^2 = 25 \text{ см}^2$.

Ответ: 25

3. Поселки Аркадино, Борисово и Вадимово попарно соединены прямолинейными дорогами. К дороге между Аркадино и Борисово примыкает квадратное поле, одна сторона которого полностью совпадает с данной дорогой. К дороге между Борисово и Вадимово примыкает прямоугольное поле, одна сторона которого полностью совпадает с данной дорогой, а вторая в 4 раза длиннее. К дороге между Аркадино и Вадимово примыкает лес прямоугольной формы, одна сторона которого полностью совпадает с данной дорогой, а вторая сторона равна 12 км. При этом площадь леса на 45 кв. км больше суммы площадей полей. Найдите суммарную площадь леса и полей в кв. км.

{135}

Решение. Условие задачи может быть выражено следующим соотношением:

$$r^2 + 4p^2 + 45 = 12q,$$

где p, q, r — длины дорог, лежащих напротив населенных пунктов Аркадино, Борисово и Вадимово соответственно.

Данное условие находится в противоречии с неравенством треугольника:

$$r + p > q \Rightarrow 12r + 12p > 12q \Rightarrow 12r + 12p > r^2 + 4p^2 + 45 \Rightarrow (r - 6)^2 + (2p - 3)^2 < 0.$$

Отсюда следует, что все три населенных пункта находятся на одной прямой.

Причем, $r = 6, p = 1,5, q = 7,5$.

Общая площадь равна сумме: $r^2 + 4p^2 + 12q = 36 + 9 + 90 = 135$.

Ответ: 135

4. Сплав A двух металлов массой 6 кг, в котором 1-го металла в два раза больше 2-го, помещенный в сосуд с водой, создает силу давления на дно 30 Н. Сплав B этих же металлов массой 3 кг, в котором 1-го металла в 5 раз меньше, чем 2-го, помещенный в сосуд с водой, создает силу давления на дно 10 Н. Какую силу давления (в ньютонах) создаст третий сплав, полученный после сплавления исходных сплавов?

{40}

Решение. В силу закона сохранения массы в результирующем сплаве масса каждого из металлов равна сумме масс этих металлов в исходных сплавах. Таким образом, и силы тяготения, и силы Архимеда так же складываются. Отсюда следует, что реакция опоры будет суммой реакций опоры в первых двух случаях. Ответ: $30 + 10 = 40$.

5. Гаврила взял в руку чугунную сковородку и нагрел ее на плите до тех пор, пока рука не почувствовала, что ручка сковородки нагрелась. После этого Гаврила подставил сковородку под струю холодной воды из водопроводного крана, однако он почувствовал, что ручка сковороды стала горячее (а не холоднее, как предполагал Гаврила). Почему так произошло? Не противоречит ли это законам термодинамики?

Решение. Струя воды действует с некоторой силой на сковороду, поэтому, чтобы ее удержать Гаврила сильнее сжал ручку сковороды. При этом площадь контакта увеличилась и поток тепла также увеличился. Ощущение тепла в первую очередь связано со скоростью потока тепла, а не с температурой. Одинаково нагретые дерево и металл будут восприниматься на ощупь по-разному. Металл будет казаться более горячим.