

**Олимпиада школьников «Ломоносов» 2015/2016 учебного года  
по механике и математическому моделированию**

**ЗАДАНИЕ ОЛИМПИАДЫ**

Отборочный этап 2

10-11 класс

Во всех задачах требуется дать только ответ (решение присылать не нужно). Ответом на каждую из задач является целое число или десятичная дробь, имеющая не более двух знаков после запятой. В случае, когда количество знаков после запятой оказывается больше, дробь нужно округлить до сотых по правилам округления. При вычислениях (в случае необходимости) считать:

ускорение свободного падения равно  $10 \text{ м/с}^2$

абсолютный нуль температур равен  $-273^\circ\text{C}$ .

Вводные задачи

1. Два пешехода вышли одновременно навстречу друг другу из населенных пунктов, расстояние между которыми 14 км. Скорости пешеходов постоянны на всем пути и равны соответственно 3 км/ч и 4 км/ч. Через сколько часов после начала движения пешеходы встретятся?

{=2}

2. Два школьника вышли одновременно из двух соседних школ и направились навстречу друг другу. Через десять минут расстояние между школьниками равнялось 600 м, а еще через пять минут они встретились. Найдите расстояние между школами (в метрах).

{=1800}

::1.1.: Гирия массой 200 г стоит на столе. Ее перевернули и поставили на стол другой гранью, площадь которой меньше на 15 кв. см. При этом давление на стол увеличилось на 1200 Па. Найдите площадь грани, на которой гирия стояла первоначально. Ответ дайте в кв. см., при необходимости округлите его до двух знаков после запятой.

Решение. После перевода в СИ получается:  $\frac{2}{S-1,5 \cdot 10^{-3}} - \frac{2}{S} = 1200$ ,

где  $S$  — площадь исходной грани.

Отсюда получается квадратное уравнение:  $4 \cdot 10^5 S^2 - 600S - 1 = 0$

После замены переменных  $y = 200S$  уравнение примет вид:  $10y^2 - 3y - 1 = 0$ , решение которого легко находится  $y = 1/2$ .

Таким образом, площадь искомой грани равна  $S = \frac{1}{400} \text{ м}^2 = 25 \text{ см}^2$

Ответ: 25

{=25}

::1.2.: Гирия массой 200 г стоит на столе. Ее перевернули и поставили на стол другой гранью, площадь которой меньше на 30 кв. см. При этом давление на стол увеличилось на 1500 Па. Найдите площадь грани, на которой гирия стояла первоначально. Ответ дайте в кв. см., при необходимости округлите его до двух знаков после запятой.

{=40}

::1.3.: Гирия массой 650 г стоит на столе. Ее перевернули и поставили на стол другой гранью, площадь которой меньше на 40 кв. см. При этом давление на стол увеличилось на 1600 Па. Найдите площадь грани, на которой гирия стояла первоначально. Ответ дайте в кв. см., при необходимости округлите его до двух знаков после запятой.

{=65}

::1.4:: Гирия массой 150 г стоит на столе. Ее перевернули и поставили на стол другой гранью, площадь которой меньше на 15 кв. см. При этом давление на стол увеличилось на 900 Па. Найдите площадь грани, на которой гирия стояла первоначально. Ответ дайте в кв. см., при необходимости округлите его до двух знаков после запятой.

{=25}

::2.1:: Из города Кошкино до города Мышкино, расстояние между которыми равно 192 км, с постоянной скоростью  $V$  выезжает автомобиль. Прибыв в Мышкино, автомобиль переходит на равнозамедленное движение, при этом его скорость за каждый час уменьшается на 16 км/час., и движется так до полной остановки. Остановившись, он мгновенно поворачивает обратно и возвращается в Кошкино с постоянной скоростью  $V$ . Найдите значение  $V$ , при котором автомобиль затратит на весь маршрут наименьшее время. Ответ дайте в километрах в час.

Решение. На каждом участке пути выполняются следующие условия:

На пути от Кошкино до Мышкино  $S_1 = Vt_1$ ,  $S_1 = 192$ ,

на пути от Мышкино до остановки  $S_2 = Vt_2 - at_2^2/2$ ,  $0 = V - at_2$ ,  $a = 16$ ,

на обратном пути  $S_1 + S_2 = Vt_3$

Из этой системы уравнения, выражая промежутки времени  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$ :

$$t_1 = \frac{S_1}{V}, t_2 = \frac{V}{a}, S_2 = \frac{V^2}{2a}, S_3 = S_1 + \frac{v^2}{2a}, t_3 = \frac{S_1}{V} + \frac{V}{2a}$$

получим выражение для искомой функции скорости:

$$t_1 + t_2 + t_3 = \frac{2S_1}{V} + \frac{3V}{2a} \geq 2\sqrt{\frac{3S_1}{a}} = 2\sqrt{3 \cdot 192/16} = 12$$

Скорость при этом определяется из соотношения:  $\frac{2S_1}{V} = \frac{3V}{2a} \Rightarrow V = 64$

{=64}

::2.2:: Из города Черново до города Белово, расстояние между которыми равно 192 км, с постоянной скоростью  $V$  выезжает автомобиль. Прибыв в Белово, автомобиль переходит на равнозамедленное движение, при этом его скорость за каждый час уменьшается на 16 км/час., и движется так до полной остановки. Остановившись, он мгновенно поворачивает обратно и возвращается в Черново с постоянной скоростью  $V$ . Какое наименьшее время может понадобиться автомобилю на весь этот маршрут? Ответ дайте в часах.

{=12}

::2.3:: Из города Кошкино до города Мышкино, расстояние между которыми равно 162 км, с постоянной скоростью  $V$  выезжает автомобиль. Прибыв в Мышкино, автомобиль переходит на равнозамедленное движение, при этом его скорость за каждый час уменьшается на 24 км/час., и движется так до полной остановки. Остановившись, он мгновенно поворачивает обратно и возвращается в Кошкино с постоянной скоростью  $V$ . Найдите значение  $V$ , при котором автомобиль затратит на весь маршрут наименьшее время. Ответ дайте в километрах в час.

{=72}

::2.4:: Из города Черново до города Белово, расстояние между которыми равно 162 км, с постоянной скоростью  $V$  выезжает автомобиль. Прибыв в Белово, автомобиль переходит на равнозамедленное движение, при этом его скорость за каждый час уменьшается на 24 км/час., и движется так до полной остановки. Остановившись, он мгновенно поворачивает обратно и возвращается в Черново с постоянной скоростью  $V$ . Какое наименьшее время может понадобиться автомобилю на весь этот маршрут? Ответ дайте в часах.

{=9}

::2.5:: Из города Кошкино до города Мышкино, расстояние между которыми равно 252 км, с постоянной скоростью  $V$  выезжает автомобиль. Прибыв в Мышкино, автомобиль переходит на равнозамедленное движение, при этом его скорость за каждый час уменьшается на 21 км/час., и движется так до полной остановки. Остановившись, он мгновенно поворачивает обратно и возвращается в Кошкино с постоянной скоростью  $V$ . Найдите значение  $V$ , при котором автомобиль затратит на весь маршрут наименьшее время. Ответ дайте в километрах в час.

$$\{=84\}$$

::2.6:: Из города Черново до города Белово, расстояние между которыми равно 252 км, с постоянной скоростью  $V$  выезжает автомобиль. Прибыв в Белово, автомобиль переходит на равнозамедленное движение, при этом его скорость за каждый час уменьшается на 21 км/час., и движется так до полной остановки. Остановившись, он мгновенно поворачивает обратно и возвращается в Черново с постоянной скоростью  $V$ . Какое наименьшее время может понадобиться автомобилю на весь этот маршрут? Ответ дайте в часах.

$$\{=12\}$$

::3.1:: Шар, сделанный из сплава  $A$  двух веществ, в котором 1-го вещества в 2 раза больше 2-го, помещенный в сосуд с водой, создает силу давления на дно, составляющую  $1/2$  от действующей на него силы тяжести. Шар, сделанный из сплава  $B$  этих же веществ, в котором 1-го вещества в 5 раз меньше, чем 2-го, помещенный в сосуд с водой, создает силу давления на дно, составляющую  $1/3$  от действующей на него силы тяжести. Найдите отношение плотности 1-го вещества к плотности 2-го.

Решение. Сила давления на дно  $N$  равна разности силы тяжести  $P$  и силы Архимеда  $F$ , которую можно выразить через плотности  $\rho$  веществ. Тогда можно составить следующие уравнения:

$$N_i = P_i - F_i \Rightarrow k_i P_i = P_i \left( 1 - \left( \frac{c_i}{\rho} + \frac{1-c_i}{\rho''} \right) \rho_0 \right) \Rightarrow k_i = 1 - (\alpha' c_i + (1 - c_i) \alpha'')$$

Здесь  $i = 1; 2$  — номера сплавов,  $k_1 = 1/2, k_2 = 1/3$ ,  $\rho', \rho'', \rho_0$  — плотности 1-го сплава, 2-го сплава и воды соответственно,  $c_i$  — концентрации первого вещества в сплавах ( $c_1 = 2/3, c_2 = 1/6$ ). Здесь также введены обозначения  $\alpha' = \frac{\rho_0}{\rho}, \alpha'' = \frac{\rho_0}{\rho''}$ ,

Отсюда получаем выражения для  $\alpha$ :

$$\begin{cases} \alpha' = \frac{(1-k_1)(1-c_2) - (1-k_2)(1-c_1)}{c_1 - c_2}, \\ \alpha'' = \frac{(1-k_2)c_1 - (1-k_1)c_2}{c_1 - c_2}. \end{cases}$$

В результате найдем отношение плотностей:

$$\frac{\rho'}{\rho''} = \frac{\alpha''}{\alpha'} = \frac{(1-k_2)c_1 - (1-k_1)c_2}{(1-k_1)(1-c_2) - (1-k_2)(1-c_1)}$$

Подставляем данные задачи и получаем ответ:  $\frac{13}{7} \approx 1,86$

$$\{=1,86\}$$

::3.2:: Шар, сделанный из сплава  $A$  двух веществ, в котором 1-го вещества в 3 раза больше 2-го, помещенный в сосуд с водой, создает силу давления на дно, составляющую  $1/2$  от действующей на него силы тяжести. Шар, сделанный из сплава  $B$  этих же веществ, в котором 1-го вещества в 4 раз меньше, чем 2-го, помещенный в сосуд с водой, создает силу давления на дно, составляющую  $1/3$  от действующей на него силы тяжести. Найдите отношение плотности 1-го вещества к плотности 2-го.

$$\{=1,71\}$$

::3.3:: Шар, сделанный из сплава  $A$  двух веществ, в котором 1-го вещества в 2 раза больше 2-го, помещенный в сосуд с водой, создает силу давления на дно, составляющую  $1/3$  от действующей на него силы тяжести. Шар, сделанный из сплава  $B$  этих же веществ, в котором 1-го вещества в 5 раз меньше, чем 2-го, помещенный в сосуд с

водой, создает силу давления на дно, составляющую  $\frac{2}{3}$  от действующей на него силы тяжести. Найдите отношение плотности 1-го вещества к плотности 2-го.

$$\{=0,25\}$$

::3.4.: Шар, сделанный из сплава  $A$  двух веществ, в котором 1-го вещества в 3 раза меньше 2-го, помещенный в сосуд с водой, создает силу давления на дно, составляющую  $\frac{2}{3}$  от действующей на него силы тяжести. Шар, сделанный из сплава  $B$  этих же веществ, в котором 1-го вещества в 2 раз больше, чем 2-го, помещенный в сосуд с водой, создает силу давления на дно, составляющую  $\frac{1}{3}$  от действующей на него силы тяжести. Найдите отношение плотности 1-го вещества к плотности 2-го.

$$\{=0,44\}$$

::4.1.: Населенные пункты Лисичанск, Оленевка и Медведьевка попарно соединены прямолинейными дорогами. К дороге между Лисичанском и Оленевкой примыкает квадратное поле, одна сторона которого полностью совпадает с данной дорогой. К дороге между Оленевкой и Медведьевкой примыкает прямоугольное поле, одна сторона которого полностью совпадает с данной дорогой, а вторая в 4 раза длиннее. К дороге между Лисичанском и Медведьевкой примыкает лес прямоугольной формы, одна сторона которого полностью совпадает с данной дорогой, а вторая сторона равна 12 км. При этом площадь леса на 45 кв. км больше суммы площадей полей. Найдите суммарную площадь леса и полей в квадратных километрах.

Решение. Условие задачи может быть выражено следующим соотношением:

$$r^2 + 4p^2 + 45 = 12q,$$

где  $p, q, r$  — длины дорог, лежащих напротив населенных пунктов Лисичанск, Оленевка и Медведьевка соответственно.

Данное условие находится в противоречии с неравенством треугольника:

$$r + p > q \Rightarrow 12r + 12p > 12q \Rightarrow 12r + 12p > r^2 + 4p^2 + 45 \Rightarrow (r - 6)^2 + (2p - 3)^2 < 0$$

Отсюда следует, что все три населенных пункта находятся на одной прямой.

Причем,  $r = 6, p = 1, 5, q = 7, 5$ .

$$\text{Общая площадь равна сумме: } r^2 + 4p^2 + 12q = 36 + 9 + 90 = 135$$

**Ответ** 135

$$\{=135\}$$

::4.2.: Населенные пункты Лисичанск, Оленевка и Медведьевка попарно соединены прямолинейными дорогами. К дороге между Лисичанском и Оленевкой примыкает прямоугольное поле, одна сторона которого полностью совпадает с данной дорогой, а вторая в 4 раза длиннее. К дороге между Оленевкой и Медведьевкой примыкает квадратное поле, одна сторона которого полностью совпадает с данной дорогой. К дороге между Лисичанском и Медведьевкой примыкает лес прямоугольной формы, одна сторона которого полностью совпадает с данной дорогой, а вторая сторона равна 20 км. При этом площадь леса на 125 кв. км больше суммы площадей полей. Найдите суммарную площадь леса и полей в квадратных километрах.

$$\{=375\}$$

::4.3.: Населенные пункты Лисичанск, Оленевка и Медведьевка попарно соединены прямолинейными дорогами. К дороге между Лисичанском и Оленевкой примыкает прямоугольное поле, одна сторона которого полностью совпадает с данной дорогой, а вторая в 4 раза длиннее. К дороге между Оленевкой и Медведьевкой примыкает квадратное поле, одна сторона которого полностью совпадает с данной дорогой. К дороге между Лисичанском и Медведьевкой примыкает лес прямоугольной формы, одна сторона которого полностью совпадает с данной дорогой, а вторая сторона равна 12 км. При этом площадь леса на 45 кв. км больше суммы площадей полей. Найдите площадь леса в квадратных километрах.

{=90}

::4.4:: Населенные пункты Лисичанск, Оленевка и Медведьевка попарно соединены прямолинейными дорогами. К дороге между Лисичанском и Оленевкой примыкает квадратное поле, одна сторона которого полностью совпадает с данной дорогой. К дороге между Оленевкой и Медведьевкой примыкает прямоугольное поле, одна сторона которого полностью совпадает с данной дорогой, а вторая в 4 раза длиннее. К дороге между Лисичанском и Медведьевкой примыкает лес прямоугольной формы, одна сторона которого полностью совпадает с данной дорогой, а вторая сторона равна 20 км. При этом площадь леса на 125 кв. км больше суммы площадей полей. Найдите площадь леса в квадратных километрах.

{=250}

::4.5:: Населенные пункты Лисичанск, Оленевка и Медведьевка попарно соединены прямолинейными дорогами. К дороге между Лисичанском и Оленевкой примыкает квадратное поле, одна сторона которого полностью совпадает с данной дорогой. К дороге между Оленевкой и Медведьевкой примыкает прямоугольное поле, одна сторона которого полностью совпадает с данной дорогой, а вторая в 4 раза длиннее. К дороге между Лисичанском и Медведьевкой примыкает лес прямоугольной формы, одна сторона которого полностью совпадает с данной дорогой, а вторая сторона равна 28 км. При этом площадь леса на 245 кв. км больше суммы площадей полей. Найдите суммарную площадь леса и полей в квадратных километрах.

{=735}

::4.6:: Населенные пункты Лисичанск, Оленевка и Медведьевка попарно соединены прямолинейными дорогами. К дороге между Лисичанском и Оленевкой примыкает прямоугольное поле, одна сторона которого полностью совпадает с данной дорогой, а вторая в 4 раза длиннее. К дороге между Оленевкой и Медведьевкой примыкает квадратное поле, одна сторона которого полностью совпадает с данной дорогой. К дороге между Лисичанском и Медведьевкой примыкает лес прямоугольной формы, одна сторона которого полностью совпадает с данной дорогой, а вторая сторона равна 28 км. При этом площадь леса на 245 кв. км больше суммы площадей полей. Найдите площадь леса в квадратных километрах.

{=490}

::5.1:: При проведении циклического процесса с идеальным газом самописец выдает  $VT$  диаграмму, которая представляет собой трапецию. Причем продолжения боковых сторон этой трапеции пересекается в начале координат. В течение процесса промежуточные температуры в вершинах трапеции превосходили минимальную температуру начала процесса на  $40^\circ C$  и  $160^\circ C$ . При какой температуре начала процесса максимальная температура цикла будет минимальна? Ответ дайте в градусах Кельвина.

Решение. В указанном процессе выполняется соотношение между температурами:

$$T_{min} \cdot T_{max} = (T_{min} + x) \cdot (T_{min} + y) \quad \text{Здесь } x = 40, y = 160$$

Отсюда получим выражение для максимальной температуры:

$$T_{max} = (x + y) + T_{min} + \frac{xy}{T_{min}}$$

Используя неравенство о средних, получим минимальное значение максимальной температуры в цикле:  $T_{max} = (x + y) + 2\sqrt{xy} = 360K$  при  $T_{min} = 80K$

Отсюда следует ответ  $80K$

{=80}

::5.2:: При проведении циклического процесса с идеальным газом самописец выдает  $VT$  диаграмму, которая представляет собой трапецию. Причем продолжения боковых

сторон этой трапеции пересекается в начале координат. В течение процесса промежуточные температуры в вершинах трапеции превосходили минимальную температуру начала процесса на  $30^{\circ}\text{C}$  и  $270^{\circ}\text{C}$ . При какой температуре начала процесса максимальная температура цикла будет минимальна? Ответ дайте в градусах Кельвина.

{=90}

::5.3:: При проведении циклического процесса с идеальным газом самописец выдает  $VT$  диаграмму, которая представляет собой трапецию. Причем продолжения боковых сторон этой трапеции пересекается в начале координат. В течение процесса промежуточные температуры в вершинах трапеции превосходили минимальную температуру начала процесса на  $90^{\circ}\text{C}$  и  $160^{\circ}\text{C}$ . При какой температуре начала процесса максимальная температура цикла будет минимальна? Ответ дайте в градусах Кельвина.

{=120}

::5.4:: При проведении циклического процесса с идеальным газом самописец выдает  $VT$  диаграмму, которая представляет собой трапецию. Причем продолжения боковых сторон этой трапеции пересекается в начале координат. В течение процесса промежуточные температуры в вершинах трапеции превосходили минимальную температуру начала процесса на  $90^{\circ}\text{C}$  и  $250^{\circ}\text{C}$ . При какой температуре начала процесса максимальная температура цикла будет минимальна? Ответ дайте в градусах Кельвина.

{=150}

::6.1:: Вечноживущий обитатель одной далекой планеты бросает горизонтально мяч в цель. Мяч летит горизонтально и практически останавливается у цели, причем скорость мяча линейно зависит от пройденного пути. Известно, что брошенный мяч преодолел половину расстояния до цели за время 40 с. Через сколько секунд после броска мяч будет втрое ближе к цели, чем к месту старта?

Решение. Сравним первую половину и третью четверть пути от старта до цели. Разобьем оба участка на равное большое количество ( $N$ ) одинаковых отрезков. Длины этих отрезков столь малы, что можно считать скорость на каждом отдельном отрезке постоянной. Отрезки на первом участке пути вдвое длиннее, чем на втором. Рассмотрим участки с номером  $i$ . Концы этих отрезков имеют координаты  $x_1 = iL/(2N)$  и  $x_2 = L/2 + iL/(4N)$ , координата откладывается от начала в сторону движения,  $L$  — длина пути. Зависимость скорости от координаты имеет вид  $v(x) = v_0(1 - x/L)$ . Видно, что  $v(x_1) = 2v(x_2)$ , поэтому время, затраченное на прохождение двух отрезков с одинаковыми номерами одинаково. Следовательно, третья четверть пути будет пройдена за то же время, что и первая половина. Искомое время составит  $2\tau$ .

**Решение из теории размерности.** Найдем связь между начальной скоростью  $v_0$ , длиной дистанции  $L$  и временем  $\tau$ , затраченным на половину пути. Движение полностью описывается заданной функцией  $v(x)$ , которая по условию однозначно определяется начальной скоростью  $v_0$  и  $L$ . Вывод точной формулы требует решения дифференциального уравнения, однако мы имеем

$$\tau = f(v_0, L).$$

Выберем в качестве масштаба скорости  $v_0$ , масштаба длины  $L$ . Тогда время измеряется в единицах  $L/v_0$ . Запишем формулу для  $\tau$  в этой системе единиц:

$$\frac{\tau}{L/v_0} = f(1, 1) = \text{const.}$$

Таким образом величина  $v_0\tau/L$  определяется только характеристиками движущегося тела и среды, но не параметрами конкретного движения. В частности, для второй

половины дистанции имеем  $v'_0 = v_0/2$ ,  $L' = L/2$ , следовательно, так как  $v'_0\tau'/L' = v_0\tau/L$ ,  $\tau' = \tau$ , то есть третью четверть пути мяч пройдет за то же время, что и первую половину.

**Ответ**  $2\tau$ .

{=80}

::6.2:: Вечноживущий обитатель одной далекой планеты бросает горизонтально мяч в цель. Мяч летит горизонтально и практически останавливается у цели, причем скорость мяча линейно зависит от пройденного пути. Известно, что брошенный мяч преодолел половину расстояния до цели за время 20 с. Через сколько секунд после броска мяч будет втрое ближе к цели, чем к месту старта?

{=40}

::6.3:: Вечноживущий обитатель одной далекой планеты бросает горизонтально мяч в цель. Мяч летит горизонтально и практически останавливается у цели, причем скорость мяча линейно зависит от пройденного пути. Известно, что брошенный мяч преодолел половину расстояния до цели за время 15 с. Через сколько секунд после броска мяч будет втрое ближе к цели, чем к месту старта?

{=30}

::6.4:: Вечноживущий обитатель одной далекой планеты бросает горизонтально мяч в цель. Мяч летит горизонтально и практически останавливается у цели, причем скорость мяча линейно зависит от пройденного пути. Известно, что брошенный мяч преодолел половину расстояния до цели за время 25 с. Через сколько секунд после броска мяч будет втрое ближе к цели, чем к месту старта?

{=50}