

**Олимпиада школьников «Ломоносов» 2015/2016 учебного года  
по механике и математическому моделированию**

**ЗАДАНИЕ ОЛИМПИАДЫ**

**Отборочный этап 1**

**10-11 класс**

Во всех задачах требуется дать только ответ (решение присылать не нужно). Ответом на каждую из задач является целое число или десятичная дробь, имеющая не более двух знаков после запятой. В случае, когда количество знаков после запятой оказывается больше, дробь нужно округлить до сотых по правилам округления.

::1.1:: Два туриста — один на мотоцикле параллельно берегу реки, другой на моторной лодке по реке - одновременно начали движение от пристани А, доехали до пристани В, развернулись и одновременно прибыли в исходный пункт своего маршрута, проехав при этом одинаковые расстояния. Мотоциклист двигался со скоростью  $V = 12$  м/с, скорость течения реки  $U = 2,5$  м/с. Найдите скорость моторной лодки в стоячей воде (в метрах в секунду), считая время, потраченное на развороты, одинаковым.

{=12,5}

::1.2:: Два туриста — один на велосипеде параллельно берегу реки, другой на моторной лодке по реке - одновременно начали движение от пристани А, доехали до пристани В, развернулись и одновременно прибыли в исходный пункт своего маршрута, проехав при этом одинаковые расстояния. Велосипедист двигался со скоростью  $V = 7,5$  м/с, скорость течения реки  $U = 2$  м/с. Найдите скорость моторной лодки в стоячей воде (в метрах в секунду), считая время, потраченное на развороты, одинаковым.

{=8}

::1.3:: Два туриста — один на велосипеде параллельно берегу реки, другой на моторной лодке по реке - одновременно начали движение от пристани А, доехали до пристани В, развернулись и одновременно прибыли в исходный пункт своего маршрута, проехав при этом одинаковые расстояния. Велосипедист двигался со скоростью  $V = 6$  м/с, скорость течения реки  $U = 1,25$  м/с. Найдите скорость моторной лодки в стоячей воде (в метрах в секунду), считая время, потраченное на развороты, одинаковым.

{=6,25}

::1.4:: Два туриста — один на велосипеде параллельно берегу реки, другой на моторной лодке по реке - одновременно начали движение от пристани А, доехали до пристани В, развернулись и одновременно прибыли в исходный пункт своего маршрута, проехав при этом одинаковые расстояния. Велосипедист двигался со скоростью  $V = 3,75$  м/с, скорость течения реки  $U = 1$  м/с. Найдите скорость моторной лодки в стоячей воде (в метрах в секунду), считая время, потраченное на развороты, одинаковым.

{=4}

::1.5:: Два туриста — один на велосипеде параллельно берегу реки, другой на моторной лодке по реке - одновременно начали движение от пристани А, доехали до пристани В, развернулись и одновременно прибыли в исходный пункт своего маршрута, проехав при этом одинаковые расстояния. Велосипедист двигался со скоростью  $V = 6$  м/с, скорость течения реки  $U = 0,875$  м/с. Найдите скорость моторной лодки в стоячей воде (в метрах в секунду), считая время, потраченное на развороты, одинаковым.

{=6,13}

::1.6:: Два туриста — один на мотоцикле параллельно берегу реки, другой на моторной лодке по реке - одновременно начали движение от пристани А, доехали до пристани В, развернулись и одновременно прибыли в исходный пункт своего маршрута, проехав при этом одинаковые расстояния. Мотоциклист двигался со скоростью  $V = 10$  м/с, скорость течения реки  $U = 1,125$  м/с. Найдите скорость моторной лодки в стоячей воде (в метрах в секунду), считая время, потраченное на развороты, одинаковым.

{=10,13}

::1.7:: Два туриста — один на велосипеде параллельно берегу реки, другой на моторной лодке по реке - одновременно начали движение от пристани А, доехали до пристани В, развернулись и одновременно прибыли в исходный пункт своего маршрута, проехав при этом одинаковые расстояния. Велосипедист двигался со скоростью  $V = 4$  м/с, скорость течения реки  $U = 1,5$  м/с. Найдите скорость моторной лодки в стоячей воде (в метрах в секунду), считая время, потраченное на развороты, одинаковым.

{=4,5}

::1.8:: Два туриста — один на мотоцикле параллельно берегу реки, другой на моторной лодке по реке - одновременно начали движение от пристани А, доехали до пристани В, развернулись и одновременно прибыли в исходный пункт своего маршрута, проехав при этом одинаковые расстояния. Мотоциклист двигался со скоростью  $V = 8$  м/с, скорость течения реки  $U = 3$  м/с. Найдите скорость моторной лодки в стоячей воде (в метрах в секунду), считая время, потраченное на развороты, одинаковым.

{=9}

::2.1:: Насос начинает набирать воду в 105-ведерную пустую бочку. В течение каждого нечетного часа он накачивает в бочку 15 ведер воды, а в течение каждого четного часа из бочки на огород выкачивает 10 с половиной ведер. Укажите номер часа (первый час имеет номер 1), в течение которого вода в бочке впервые польется через край.

{=43}

::2.2:: Насос начинает набирать воду в 120-ведерную пустую бочку. В течение каждого нечетного часа он накачивает в бочку 21 ведро воды, а в течение каждого четного часа из бочки на огород выкачивает 16 с половиной ведер. Укажите номер часа (первый час имеет номер 1), в течение которого вода в бочке впервые польется через край.

{=47}

::2.3:: Насос начинает набирать воду в 145-ведерную пустую бочку. В течение каждого нечетного часа он накачивает в бочку 15 ведер воды, а в течение каждого четного часа из бочки на огород выкачивает 8 с половиной ведер. Укажите номер часа (первый час имеет номер 1), в течение которого вода в бочке впервые польется через край.

{=43}

::2.4:: Насос начинает набирать воду в 140-ведерную пустую бочку. В течение каждого нечетного часа он накачивает в бочку 19 ведер воды, а в течение каждого четного часа из бочки на огород выкачивает 13 с половиной ведер. Укажите номер часа (первый час имеет номер 1), в течение которого вода в бочке впервые польется через край.

{=47}

::2.5:: Насос начинает набирать воду в 115-ведерную пустую бочку. В течение каждого нечетного часа он накачивает в бочку 16 ведер воды, а в течение каждого четного часа из бочки на огород выкачивает 10 с половиной ведер. Укажите номер часа (первый час имеет номер 1), в течение которого вода в бочке впервые польется через край.

{=39}

::2.6:: Насос начинает набирать воду в 100-ведерную пустую бочку. В течение каждого нечетного часа он накачивает в бочку 19 ведер воды, а в течение каждого четного

часа из бочки на огород выкачивает 14 с половиной ведер. Укажите номер часа (первый час имеет номер 1), в течение которого вода в бочке впервые польется через край.

{=39}

::3.1:: Имеются две жидкости, массы которых одинаковы. В одной из них деревянный брусок плавает, погрузившись на  $\frac{3}{4}$  своего объема, а в другой — на  $\frac{1}{2}$  своего объема. Эти две жидкости тщательно перемешали (суммарный объем жидкостей при этом не изменился) и поместили в смесь тот же брусок. Какая часть объема бруска останется на поверхности смеси?

{=0,38}

::3.2:: Имеются две жидкости, массы которых одинаковы. В одной из них деревянный брусок плавает, погрузившись на  $\frac{3}{5}$  своего объема, а в другой — на  $\frac{9}{10}$  своего объема. Эти две жидкости тщательно перемешали (суммарный объем жидкостей при этом не изменился) и поместили в смесь тот же брусок. Какая часть объема бруска останется на поверхности смеси?

{=0,25}

::3.3:: Имеются две жидкости, массы которых одинаковы. В одной из них деревянный брусок плавает, погрузившись на  $\frac{2}{3}$  своего объема, а в другой — на  $\frac{4}{9}$  своего объема. Эти две жидкости тщательно перемешали (суммарный объем жидкостей при этом не изменился) и поместили в смесь тот же брусок. Какая часть объема бруска останется на поверхности смеси?

{=0,44}

::3.4:: Имеются две жидкости, массы которых одинаковы. В одной из них деревянный брусок плавает, погрузившись на  $\frac{1}{4}$  своего объема, а в другой — на  $\frac{1}{2}$  своего объема. Эти две жидкости тщательно перемешали (суммарный объем жидкостей при этом не изменился) и поместили в смесь тот же брусок. Какая часть объема бруска останется на поверхности смеси?

{=0,63}

::3.5:: Имеются две жидкости, массы которых одинаковы. В одной из них деревянный брусок плавает, погрузившись на  $\frac{3}{10}$  своего объема, а в другой — на  $\frac{1}{5}$  своего объема. Эти две жидкости тщательно перемешали (суммарный объем жидкостей при этом не изменился) и поместили в смесь тот же брусок. Какая часть объема бруска останется на поверхности смеси?

{=0,75}

::3.6:: Имеются две жидкости, массы которых одинаковы. В одной из них деревянный брусок плавает, погрузившись на  $\frac{3}{5}$  своего объема, а в другой — на  $\frac{1}{2}$  своего объема. Эти две жидкости тщательно перемешали (суммарный объем жидкостей при этом не изменился) и поместили в смесь тот же брусок. Какая часть объема бруска останется на поверхности смеси?

{=0,45}

::3.7:: Имеются две жидкости, массы которых одинаковы. В одной из них деревянный брусок плавает, погрузившись на  $\frac{3}{4}$  своего объема, а в другой — на  $\frac{3}{8}$  своего объема. Эти две жидкости тщательно перемешали (суммарный объем жидкостей при этом не изменился) и поместили в смесь тот же брусок. Какая часть объема бруска останется на поверхности смеси?

{=0,44}

::3.8:: Имеются две жидкости, массы которых одинаковы. В одной из них деревянный брусок плавает, погрузившись на  $\frac{3}{8}$  своего объема, а в другой — на  $\frac{1}{2}$  своего объема.

Эти две жидкости тщательно перемешали (суммарный объем жидкостей при этом не изменился) и поместили в смесь тот же брусок. Какая часть объема бруска останется на поверхности смеси?

$$\{=0,56\}$$

::4.1:: На горизонтальном гладком столе расположены два тела массами 1,75 кг и 8 кг, соединенные жестким тросом, масса которого 250 г (трос параллелен поверхности стола). Эту систему тянут с постоянной силой 100 Н, приложенной к телу с большей массой и направленной параллельно тросу, так, что трос остается натянутым и параллельным поверхности стола. Найдите значение (в ньютонах) силы упругости в поперечном сечении троса, делящем длину троса в отношении 1:4, считая от тела большей массы.

$$\{=19,5\}$$

::4.2:: На горизонтальном гладком столе расположены два тела массами 1,75 кг и 8 кг, соединенные жестким тросом, масса которого 250 г (трос параллелен поверхности стола). Эту систему тянут с постоянной силой 100 Н, приложенной к телу с меньшей массой и направленной параллельно тросу, так, что трос остается натянутым и параллельным поверхности стола. Найдите значение (в ньютонах) силы упругости в поперечном сечении троса, делящем длину троса в отношении 1:4, считая от тела большей массы.

$$\{=80,5\}$$

::4.3:: На горизонтальном гладком столе расположены два тела массами 1,75 кг и 8 кг, соединенные жестким тросом, масса которого 250 г (трос параллелен поверхности стола). Эту систему тянут с постоянной силой 100 Н, приложенной к телу с большей массой и направленной параллельно тросу, так, что трос остается натянутым и параллельным поверхности стола. Найдите значение (в ньютонах) силы упругости в поперечном сечении троса, делящем длину троса в отношении 1:4, считая от тела меньшей массы.

$$\{=18\}$$

::4.4:: На горизонтальном гладком столе расположены два тела массами 1,75 кг и 8 кг, соединенные жестким тросом, масса которого 250 г (трос параллелен поверхности стола). Эту систему тянут с постоянной силой 100 Н, приложенной к телу с меньшей массой и направленной параллельно тросу, так, что трос остается натянутым и параллельным поверхности стола. Найдите значение (в ньютонах) силы упругости в поперечном сечении троса, делящем длину троса в отношении 1:4, считая от тела меньшей массы.

$$\{=82\}$$

::4.5:: На горизонтальном гладком столе расположены два тела массами 1,75 кг и 8 кг, соединенные жестким тросом, масса которого 250 г (трос параллелен поверхности стола). Эту систему тянут с постоянной силой 100 Н, приложенной к телу с большей массой и направленной параллельно тросу, так, что трос остается натянутым и параллельным поверхности стола. Найдите значение (в ньютонах) силы упругости в поперечном сечении троса, делящем длину троса в отношении 2:3, считая от тела большей массы.

$$\{=19\}$$

::4.6:: На горизонтальном гладком столе расположены два тела массами 1,75 кг и 8 кг, соединенные жестким тросом, масса которого 250 г (трос параллелен поверхности стола). Эту систему тянут с постоянной силой 100 Н, приложенной к телу с меньшей

массой и направленной параллельно тросу, так, что трос остается натянутым и параллельным поверхности стола. Найдите значение (в ньютонах) силы упругости в поперечном сечении троса, делящем длину троса в отношении 2:3, считая от тела большей массы.

$$\{=81\}$$

::4.7:: На горизонтальном гладком столе расположены два тела массами 1,75 кг и 8 кг, соединенные жестким тросом, масса которого 250 г (трос параллелен поверхности стола). Эту систему тянут с постоянной силой 100 Н, приложенной к телу с большей массой и направленной параллельно тросу, так, что трос остается натянутым и параллельным поверхности стола. Найдите значение (в ньютонах) силы упругости в поперечном сечении троса, делящем длину троса в отношении 2:3, считая от тела меньшей массы.

$$\{=18,5\}$$

::4.8:: На горизонтальном гладком столе расположены два тела массами 1,75 кг и 8 кг, соединенные жестким тросом, масса которого 250 г (трос параллелен поверхности стола). Эту систему тянут с постоянной силой 100 Н, приложенной к телу с меньшей массой и направленной параллельно тросу, так, что трос остается натянутым и параллельным поверхности стола. Найдите значение (в ньютонах) силы упругости в поперечном сечении троса, делящем длину троса в отношении 2:3, считая от тела меньшей массы.

$$\{=81,5\}$$

::5.1:: На плоскости лежат три мяча, попарно касаясь друг друга. Эти мячи также касаются данной плоскости в трех точках, являющихся вершинами треугольника со сторонами 10 см и 15 см и углом 60 градусов между этими сторонами. Найдите радиус самого большого из этих мячей, если все они имеют форму шара. Ответ дайте в сантиметрах, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

$$\{=9,92\}$$

::5.2:: На плоскости лежат три мяча, попарно касаясь друг друга. Эти мячи также касаются данной плоскости в трех точках, являющихся вершинами треугольника со сторонами 10 см и 15 см и углом 60 градусов между этими сторонами. Найдите радиус самого маленького из этих мячей, если все они имеют форму шара. Ответ дайте в сантиметрах, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

$$\{=4,41\}$$

::5.3:: На плоскости лежат три мяча, попарно касаясь друг друга. Эти мячи также касаются данной плоскости в трех точках, являющихся вершинами треугольника со сторонами 8 см и 12 см и углом 120 градусов между этими сторонами. Найдите радиус самого большого из этих мячей, если все они имеют форму шара. Ответ дайте в сантиметрах, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

$$\{=13,08\}$$

::5.4:: На плоскости лежат три мяча, попарно касаясь друг друга. Эти мячи также касаются данной плоскости в трех точках, являющихся вершинами треугольника со сторонами 8 см и 12 см и углом 120 градусов между этими сторонами. Найдите радиус самого маленького из этих мячей, если все они имеют форму шара. Ответ дайте в сантиметрах, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

$$\{=2,75\}$$

::5.5:: На плоскости лежат три мяча, попарно касаясь друг друга. Эти мячи также касаются данной плоскости в трех точках, являющихся вершинами треугольника со

сторонами 8 см и 12 см и углом 60 градусов между этими сторонами. Найдите радиус самого большого из этих мячей, если все они имеют форму шара. Ответ дайте в сантиметрах, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

{=7,94}

::5.6:: На плоскости лежат три мяча, попарно касаясь друг друга. Эти мячи также касаются данной плоскости в трех точках, являющихся вершинами треугольника со сторонами 8 см и 12 см и углом 60 градусов между этими сторонами. Найдите радиус самого маленького из этих мячей, если все они имеют форму шара. Ответ дайте в сантиметрах, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

{=3,53}

::5.7:: На плоскости лежат три мяча, попарно касаясь друг друга. Эти мячи также касаются данной плоскости в трех точках, являющихся вершинами треугольника со сторонами 10 см и 15 см и углом 120 градусов между этими сторонами. Найдите радиус самого большого из этих мячей, если все они имеют форму шара. Ответ дайте в сантиметрах, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

{=16,35}

::5.8:: На плоскости лежат три мяча, попарно касаясь друг друга. Эти мячи также касаются данной плоскости в трех точках, являющихся вершинами треугольника со сторонами 10 см и 15 см и углом 120 градусов между этими сторонами. Найдите радиус самого маленького из этих мячей, если все они имеют форму шара. Ответ дайте в сантиметрах, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

{=3,44}

::6.1:: Исследователи приблизились к незнакомой планете и спустились в ее атмосферу на стратостате, остановившись на высоте 100 км. Эксперименты показали, что атмосфера однородна, а сила сопротивления, действующая на движущееся в атмосфере тело, пропорциональна квадрату его скорости и площади поперечного сечения. Исследователи отпустили небольшое тело вертикально вниз без начальной скорости и заметили, что оно отделилось от стратостата на 1 метр за 0.5 сек, и достигло поверхности планеты за 30 минут. Оцените, за какое время достигнет поверхности планеты тело той же формы, сделанное из того же материала, все линейные размеры которого в 4 раза меньше. Ответ укажите в минутах.

{=60}

::6.2:: Метеорологи одной далекой планеты начали изучать окружающую их атмосферу. Они поднялись на стратостате на высоту 80 км и остановились. Выяснилось, что атмосфера однородна, а сила сопротивления, действующая на движущееся в атмосфере тело, пропорциональна квадрату его скорости и площади поперечного сечения. Ученые отпустили небольшое тело вертикально вниз без начальной скорости и заметили, что оно отделилось от стратостата на 1 метр за 0.3 сек, и достигло поверхности планеты за 30 минут. Оцените, за какое время достигнет поверхности планеты тело той же формы, сделанное из того же материала, все линейные размеры которого в 4 раза меньше. Ответ укажите в минутах.

{=60}

::6.3:: Исследователи приблизились к незнакомой планете и спустились в ее атмосферу на стратостате, остановившись на высоте 150 км. Эксперименты показали, что атмосфера однородна, а сила сопротивления, действующая на движущееся в атмосфере тело, пропорциональна квадрату его скорости и площади поперечного сечения. Исследователи отпустили небольшое тело вертикально вниз без начальной скорости и заметили, что оно отделилось от стратостата на 1 метр за 1 сек, и достигло поверхности

планеты за 1 час. Оцените, за какое время достигнет поверхности планеты тело той же формы, сделанное из того же материала, все линейные размеры которого в 4 раза меньше. Ответ укажите в минутах.

{=120}

::6.4:: Метеорологи одной далекой планеты начали изучать окружающую их атмосферу. Они поднялись на стратостате на высоту 160 км и остановились. Выяснилось, что атмосфера однородна, а сила сопротивления, действующая на движущееся в атмосфере тело, пропорциональна квадрату его скорости и площади поперечного сечения. Ученые отпустили небольшое тело вертикально вниз без начальной скорости и заметили, что оно отделилось от стратостата на 1 метр за 0.6 сек, и достигло поверхности планеты за 1 час. Оцените, за какое время достигнет поверхности планеты тело той же формы, сделанное из того же материала, все линейные размеры которого в 4 раза меньше. Ответ укажите в минутах.

{=120}

### Решение.

1. От длины маршрута  $S$  результат не зависит. Велосипедист затратит время  $2S/V$ , а турист в лодке —  $S/(W - U) + S/(W + U)$ . Приравниваем, сокращаем  $S$  и получаем квадратное уравнение для определения  $W$ :  $W^2 - VW - U^2 = 0$ . Положительный корень этого уравнения определяется формулой:  $W = \frac{V + \sqrt{V^2 + (2U)^2}}{2}$ . Данные подобраны так, что корень извлекается. Ответ: 12,5

2. Условия плавания бруска в первой и второй жидкости из условия задачи будут выглядеть следующим образом:

$$V\rho_0 = \frac{3}{4}V\rho_1 = \frac{1}{2}V\rho_2$$

Здесь  $\rho_0, \rho_1, \rho_2$  — плотности бруска, первой и второй жидкостей соответственно;  $V$  — объем бруска. При смешивании равных масс двух жидкостей плотность смеси  $\rho$  равна среднему гармоническому плотностей компонент смеси:

$$\rho = \frac{2\rho_1\rho_2}{\rho_1 + \rho_2}$$

Тогда из условия плавания бруска в смеси  $V\rho_0 = V'\rho$ , выражая плотности из предыдущей формулы, для объема погруженной части бруска  $V'$  получим  $V' = \frac{5}{8}V$ . Ответ:  $\frac{3}{8}$

3. Количество воды в бочке после  $k$ -го часа зависит от того, четное или нечетное  $K$ , и равно  $V_{2n-1} = 10 + 4(n-1)$ ,  $V_{2n} = 4n$ . Так как первое переполнение может возникнуть только на нечетном часе, то условие  $V > 49$  дает:  $10 + 4(n-1) > 49$ , то есть  $n > \frac{43}{11}$ . Значит  $n = 11$  и  $2n - 1 = 21$ . Ответ: 21 час.

4. Можно потянуть за малое тело или за большое — будет два разных ответа. Потянем за большое. Общая масса равна 10 кг, значит ускорение будет равно  $a = 10 \text{ м/с}^2$ . Мысленно разрежем стержень по указанному сечению. Тогда пятая часть стержня вместе с большой массой будет двигаться с тем же ускорением, но под действием двух сил:  $F = 100 \text{ Н}$ , приложенной к тяжелому телу, и искомой силы  $T$ , приложенной к стержню:  $F - T = (M + m_0/5)a$ . Отсюда следует ответ 19,5 Н. Второй ответ: 80,5 Н

5. Если пересечь пару мячей с радиусами  $R_1$  и  $R_2$  вертикальной плоскостью проходящей через центры этих окружностей, то в плоскости их пересечения образуется трапеция, у которой основания — радиусы мячей, одна боковая сторона — сумма радиусов, другая, как раз и есть одна из сторон указанного в условии прямоугольного равнобедренного треугольника (пусть ее длина равна  $c$ ). Из рассмотрения этой прямоугольной трапеции получим:  $c = 2\sqrt{R_1R_2}$ . Таким образом, радиусы можно найти из решения системы:

$$\begin{cases} 2\sqrt{R_1R_2} = \frac{225}{2}, \\ 2\sqrt{R_2R_3} = \frac{225}{2}, \\ 2\sqrt{R_1R_3} = 225. \end{cases} \quad \text{Отсюда получим: } R_2 = 7,5, R_1 = 15, R_3 = 30. \text{ Ответ } 7,5 \text{ см}$$

6. Видно, что средняя скорость на большом расстоянии составляет  $200 \text{ км/ч} \approx 56 \text{ м/с}$ , что много больше средней скорости на первом метре  $2 \text{ м/с}$ . Предположим, что при прохождении первого метра сила сопротивления не вносила существенного вклада. Тогда найдем ускорение свободного падения  $g = 2 * h_1/\tau_1^2 = 8 \text{ м/с}^2$ . При равноускоренном движении с таким ускорением средняя скорость всего спуска будет достигнута за 7 секунд, то есть почти все время спуска точка двигалась с практически неизменной скоростью. Она находится по формуле  $V = \sqrt{mg/(kR^2)}$ , где  $m$  — масса тела, а сила сопротивления выражается  $F(v) = kR^2v^2$ .

Итак, можно считать, что маленькое тело пройдет первый метр за то же, что и



большое, а установившуюся скорость найдем по формуле

$$V_2 = \sqrt{\frac{mg/4^3}{k \cdot R^2/4^2}} = \frac{V}{2}.$$

Таким образом, время спуска маленького тела составит 1 час.

**Ответ** 1 час