ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«ЛОМОНОСОВ–2013»

Заключительный этап по МАТЕМАТИКЕ

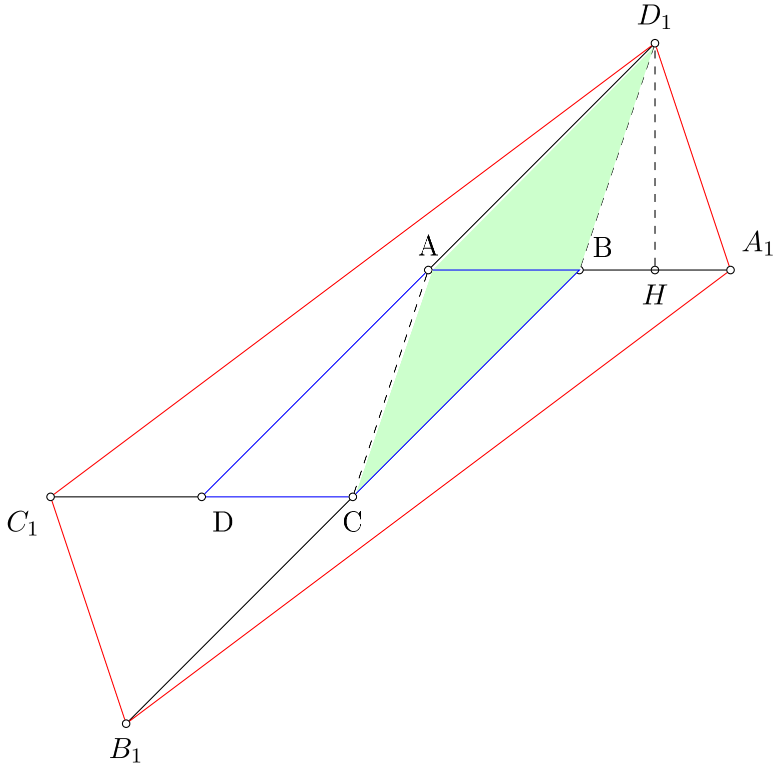
решения

9 класс

1. Дан параллелограмм $ABCD$ и выбраны точки A_1, B_1, C_1 и D_1, такие, что точка A является серединой отрезка DD_1, точка B — серединой AA_1, точка C — серединой BB_1 и точка D — серединой CC_1. Найдите площадь $A_1B_1C_1D_1$, если известно, что $S(ABCD) = 1$.

   Ответ:5

   Решение:



   Заметим, что треугольники $\triangle ABC$ и $\triangle ABD_1$ равны, следовательно, равны их площади. Треугольники $\triangle ABD_1$ и $\triangle A_1BD_1$ имеют общуюю высоту D_1H и равные основания, следовательно, равновелики. Таким образом, $S(\triangle AA_1D_1) = 1$. Можно показать, что $S(\triangle BB_1A_1) = S(\triangle CC_1B_1) = S(\triangle DD_1C_1) = 1$. Складывая, получим $S(A_1B_1C_1D_1) = 5$.

2. а) Найдите количество натуральных делителей $N = 1\underbrace{00\ldots0}_{40}$, не являющихся ни точными квадратами (т.е. квадратами натуральных чисел), ни точными кубами. b) ... не представимых в виде m^n, где m и n — натуральные числа, причем $n > 1$. .

   Ответ:а) 1093; б) 981.

   Решение:Обозначим через K_n количество делителей, являющихся точными n-ми степенями а)$N = 2^{40} \cdot 5^{40}$, делители N имеют вид $2^m \cdot 5^n$, где $0 \leqslant m, n \leqslant 40$. Всего получается $41 \times 41 = 1681$ делителей. Из них полными квадратами будут те, в которых m и n — четные, таких будет $21 \times 21 = 441$, следовательно 1240 делителей не будут точными квадратами.

Заметим, что среди точных кубов будут и числа, являющиеся еще и точными квадратами. Это числа, являющиеся точными 6 степенями. Их количество считаем аналогично тому, как считали количество точных квадратов. А делителей, не являющихся ни точными квадратами, ни точными кубами будет 1240 - $K_3 + K_6$.

б) аналогично пункту а)

3. Решить систему $\begin{cases} x^2 = 2\sqrt{y^2+1}; \\ y^2 = 2\sqrt{z^2-1} - 2; \\ z^2 = 4\sqrt{x^2+2} - 6. \end{cases}$

   Ответ:$(\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$, $(\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2})$.

   Решение:Введем обозначения $a = \sqrt{x^2+2}$, $b = \sqrt{y^2+1}$, $c = \sqrt{z^2-1}$. Получится система: $\begin{cases} a^2 - 2 = 2b \\ b^2 - 1 = 2c - 2 \\ c^2 + 1 = 4a - 6 \end{cases}$

   Сложим все уравнения и перенесем в левую часть: $a^2 + b^2 + c^2 - 4a - 2b - 2c + 6 = 0$. Выделяя полные квадарты, получим $(a-2)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 = 0$, откуда $a = 2$, $b = 1$, $c = 1$. Делаем обратную замену, получим $x = \pm\sqrt{2}$, $y = 0$, $z = \pm\sqrt{2}$.

4. Коля сел играть в WoW в момент, когда часовая и минутная стрелки были противоположны. Он закончил играть через целое число минут, причем, в момент окончания минутная стрелка совпала с часовой. Сколько времени он играл (если известно, что он играл меньше 12 часов)?

   Решение:Минутная стрелка догоняет часовую со скоростью $\frac{11}{2}^\circ$/мин. Чтобы они совпали разность углов поворота должна быть $180 + 360k$. Эта величична кратна 11 при $k = 5, 16, ...$. По смыслу задачи подходит только $k = 5$, что дает нам 6 часов.

5. Найдите все пары натуральных чисел (m, n), для которых выполняется равенство

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) = m \cdot (m-1).$$

   Ответ:$(1, 1)$, $(2, 1)$; $(3, 1)$.

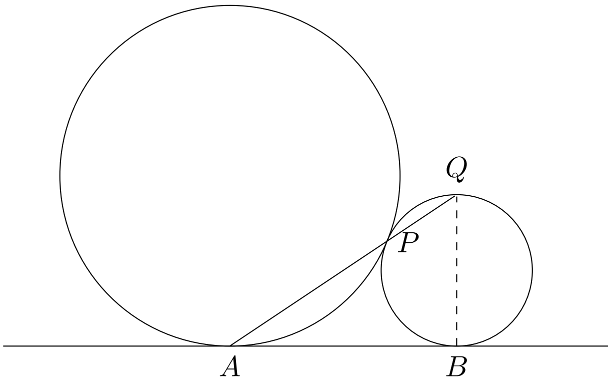
   Решение:Перепишем равенство в виде

$$(n^2 - 3n) \cdot (n^2 - 3n + 2) = m^2 - m$$

   и обозначим $N = n^2 - 3n + 1$, тогда, выделяя полные квадраты $N^2 - 1 = (m - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$. Домножая на 4, получая $(2N)^2 - (2m-1)^2 = 3$. Число $2N$ — целое и четное, $2m - 1$ — целое и нечетное. Следовательно, $2N = \pm 2$, $2m - 1 = \pm 1$. Из первого равенства получим $n = 0, 1, 2, 3$, из второго $m = 0, 1$. Поскольку в задаче спрашиваются только натуральные решения, то $n = 1, 2, 3$ и $m = 1$.

   Указанное равенство возможно только тогда , когда его левая и правая части равны нулю.

6. Две окружности радиусов R и R' касаются друг друга внешним образом в точке P и касаются прямой l в точках A и B, соответственно. Пусть Q — точка пересечения прямой BP с первой окружностью. Определить, на каком расстоянии от прямой l расположена точка Q.



Ответ:$2R$, т.е. эта точка диаметрально противоположна точке A.

Решение:Проведя общую касательную в точке P, заметим, что в треугольнике APB угол APB равен сумме двух других углов. Значит, он прямоугольный, а точка Q – диаметрально противоположна точке A.

7. Доказать, что если числа x, y и z — целые, то число $\frac{1}{2}\left((x-y)^4+(y-z)^4+(z-x)^4\right)$ является квадратом некоторого целого числа.

Решение:Обозначим $a=x-y$, $b=y-z$, $c=z-x$. Тогда $\sigma_1=a+b+c=0$. Обозначим $ab+ac+bc=\sigma_2$, $abc=\sigma_3$ и выразим через них: $\frac{1}{2}\left(a^4+b^4+c^4\right)=\sigma_2^2$.

8. Сколькими различными способами можно выбрать целые числа $a,b,c\in[1,100]$, так, чтобы точки с координатами $A(-1,a)$, $B(0,b)$ и $C(1,c)$ образовывали прямоугольный треугольник?

Ответ:974

Решение:$AB^2=1+(b-a)^2$, $BC^2=1+(c-b)^2$, $AC^2=4+(c-a)^2$.

Если треуогльник ABC прямоугольный с гипотенузой AC, то по т.Пифагора

$AC^2=AB^2+BC^2$, $1+(b-a)^2+1+(b-c)^2=4+(a-c)^2$, что приводится к виду $(b-a)(b-c)=1$. Так как оба множителя – целые числа, имеем только такие случаи: $b=a+1=c+1$ и $b=a-1=c-1$, для каждого из которых есть 99 троек (a,b,c), т.е. 198 способов.

Если гипотенузой является сторона AB, то аналогично получаем соотношение $(c-a)(c-b)=-2$, что возможно только в следующих случаях:

$c=a+1=b-2$,

$c=a-1=b+2$,

$c=a+2=b-1$,

$c=a-2=b+1$,

для каждого из которых есть 97 троек (a,b,c), т.е. всего $97\cdot 4=388$ способов.

Если гипотенузой является сторона BC, то получаем соотношение $(a-b)(a-c)=-2$. Аналогично предыдущему, находим 388 способов.

Всего получаем 198+388+388=974 способов.