ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«ЛОМОНОСОВ–2013»

Заключительный этап по МАТЕМАТИКЕ

решения

8 класс

1. Решите ребус (одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным - разные)

   $$\mathrm{MSU} + \mathrm{MSU} + \mathrm{MSU} + \mathrm{MSU} + \mathrm{OLYMP} + \mathrm{OLYMP} = \mathrm{MOSCOW}$$

   Ответ:$C = 5$, $L = 7$, $M = 1$, $O = 9$, $P = 2$, $S = 4$, $U = 3$, $W = 6$, $Y = 0$, $143 + 143 + 143 + 143 + 97012 + 97012 = 194596$.

   Решение:

2. а) Найдите количество натуральных делителей $N = 1\underbrace{00\ldots0}_{999}$, не являющихся точными квадратами (т.е. квадратами натуральных чисел). b) ... не являющихся ни точными квадратами, ни точными кубами.

   Ответ:а) 750000; б) 666333 .

   Решение:$N = 2^{999} \cdot 5^{999}$, делители N имеют вид $2^m \cdot 5^n$, где $0 \leqslant m, n \leqslant 999$. Всего получается $1000 \times 1000 = 1000000$ делителей. Из них полными квадратами будут те, в которых m и n — четные, таких будет $500 \times 500 = 250000$, следовательно 750000 делителей не будут точными квадратами.

   б) Заметим, что среди точных кубов будут и числа, являющиеся еще и точными квадратами. Это в точности числа, являющиеся точными 6 степенями. Их количество считаем аналогично пункту а).

3. Блоха прыгает по числовой прямой, причем длина каждого прыжка не может быть меньше n. Она начинает свое движение из начала координат и хочет побывать во всех целых точках, принадлежащих отрезку $[0, 2013]$ (и только в них!) ровно по одному разу. При каком наибольшем значении n это у нее получится?

   Ответ:$n = 1006$.

   Решение:При $n = 1006$ можно построить путь

   $$0 \to 1007 \to 1 \to 1008 \to \ldots \to 1005 \to 2012 \to 1006 \to 2013.$$

   Докажем, что n не может быть больше 1006. Действительно, допустим $n \geqslant 1007$. Тогда в точку с координатой 1007 можно попасть только из начала отрезка (точки 0). Но если блоха прыгнет оттуда в точку 1007, то обратно прыгнуть она уже не может, следовательно, должна закончить свой путь в этой точке и не побывает в других точках отрезка.

4. Решить систему $\begin{cases} x^2 - 2y + 1 = 0; \\ y^2 - 4z + 7 = 0 \\ z^2 + 2x - 2 = 0. \end{cases}$

Ответ:$x=-1$, $y=1$, $z=2$.

Решение:Сложив все три уравнения, получим $x^2-4x+y^2-2y+z^2-4z+6=0$. Выделяя полные квадраты, получим $(x+1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=0$, откуда $x=-1$, $y=1$, $z=2$. Проверка показывает, что указанные значения являются решением системы.

5. Найдите количество 9–значных чисел, в которых каждая цифра от 1 до 9 встречается ровно 1 раз, цифры 1,2,3,4,5 расположены в порядке возрастания, а цифра 6 стоит раньше цифры 1 (например 916238457).

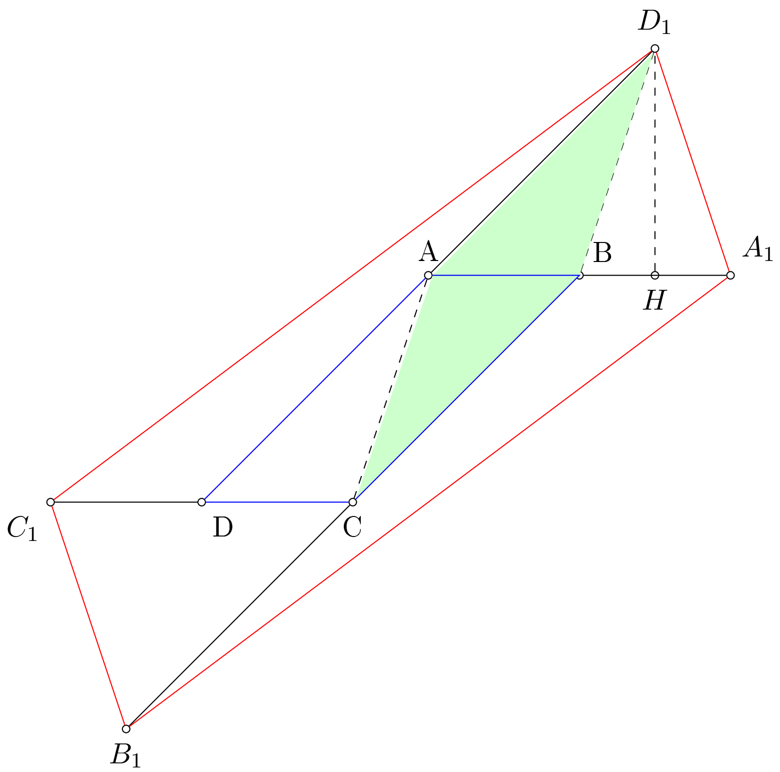
   Ответ:504

   Решение:Заметим, что после расстановки цифр 7,8,9, остальные цифры ставятся однозначно. Поэтому количество таких чисел равно $7\cdot 8\cdot 9=504$.

6. Дан параллелограмм $ABCD$ и выбраны точки A_1, B_1, C_1 и D_1, такие, что точка A является серединой отрезка DD_1, точка B — серединой AA_1, точка C — серединой BB_1 и точка D — серединой CC_1. а) Докажите, что $A_1B_1C_1D_1$ — тоже параллелограмм. б) Найдите его площадь, если известно, что $S(ABCD)=1$.

   Ответ:б)5

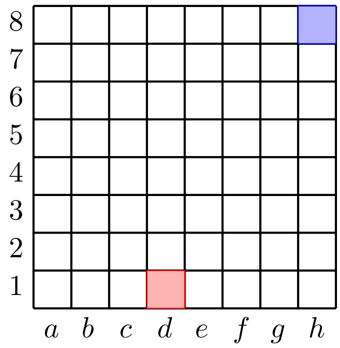
   Решение:



а) Из свойств параллелограмма следует, что $AB=CD$, $\angle BAD_1=180^\circ-\angle BAD=180^\circ-\angle BCD=\angle DCB_1$, $AD_1=AD=BC=CB_1$. Следовательно, треугольники $\triangle ABD_1$ и $\triangle CBD_1$ равны. Поскольку $CC_1=2CD=2AB=AA_1$, то равны треугольники $\triangle CC_1B_1$ и $\triangle AA_1D_1$. Следовательно $A_1D_1=B_1C_1$, аналогично доказывается, что $A_1B_1=C_1D_1$. Если противоположные стороны 4–угольника равны, то это — параллелограмм.

б) Заметим, что треугольники $\triangle ABC$ и $\triangle ABD_1$ равны, следовательно, равны их площади. Треугольники $\triangle ABD_1$ и $\triangle A_1BD_1$ имеют общуюю высоту D_1H и равные основания, следовательно, равновелики. Таким образом, $S(\triangle AA_1D_1) = 1$. Можно показать, что $S(\triangle BB_1A_1) = S(\triangle CC_1B_1) = S(\triangle DD_1C_1) = 1$. Складывая, получим $S(A_1B_1C_1D_1) = 5$.

7. Сколькими различными способами шахматный ферзь может пройти с поля $d1$ на поле $h8$, если ему разрешается ходить только вправо, вверх или по диагонали вправо–вверх на любое число клеток?



Ответ:39625

Решение:Последовательно (начиная с d1) найдем количество способов, которым можно пройти в каждую клетку. В d1 ставим 1, а каждое следующее число получается суммированием чисел, стоящих по столбцу снизу, по строке слева и по диагонали слева–снизу. Тогда в h8 будет стоять число 39625.