**ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ**
**«ЛОМОНОСОВ–2013»**

Заключительный этап по МАТЕМАТИКЕ

**решения**

7 класс

1. Моторная лодка идет 1 час по течению из Верхних Васюков в Нижние Васюки, а возвращается против течения за два часа. Вовочка из Верхних Васюков пустил по речке бумажный кораблик. Через какое время кораблик приплывет в Нижние Васюки?

   **Ответ:**4 часа.

   **Решение:**Обозначим $S$ — расстояние между Верхними и Нижними Васюками. Тогда скорость лодки по течению равна $S$, а против $S/2$. Тогда скорость течения равна $S/4$, следовательно кораблик приплывет через 4 часа.

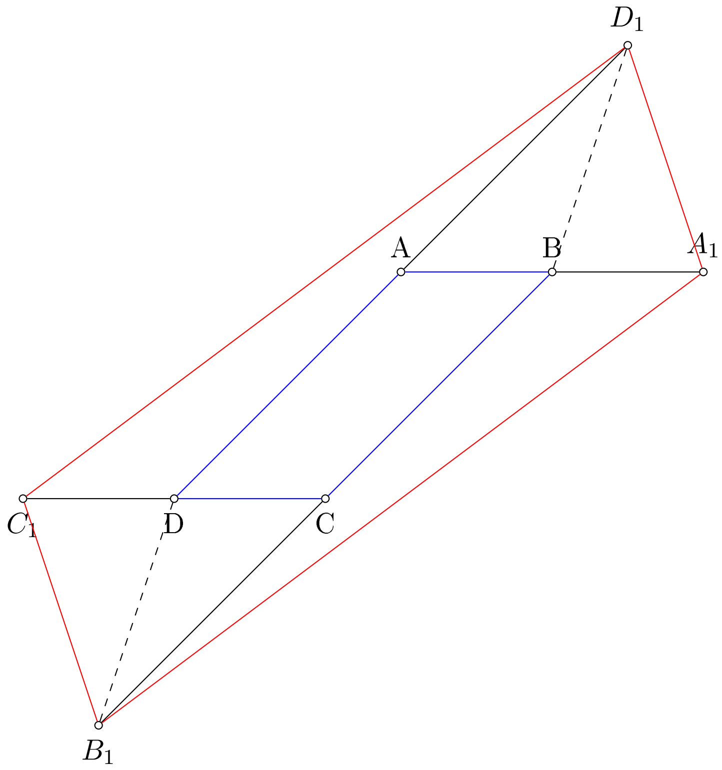
2. а) Сколько натуральных делителей имеет число $N = 1\underbrace{00\ldots0}_{99}$? b) Найдите количество натуральных делителей $N$, не являющихся точными квадратами (т.е. квадратами натуральных чисел).

   **Ответ:**а) 10000; б) 7500.

   **Решение:**$N = 2^{99} \cdot 5^{99}$, делители $N$ имеют вид $2^m \cdot 5^n$, где $0 \leqslant m, n \leqslant 99$. Всего получается $100 \times 100 = 10000$ делителей. Из них полными квадратами будут те, в которых $m$ и $n$ — четные, таких будет $50 \times 50 = 2500$, следовательно 7500 делителей не будут точными квадратами.

3. Дан параллелограмм $ABCD$ и выбраны точки $A_1$, $B_1$, $C_1$ и $D_1$, такие, что точка $A$ является серединой отрезка $DD_1$, точка $B$ — серединой $AA_1$, точка $C$ — серединой $BB_1$ и точка $D$ — серединой $CC_1$. Докажите, что 4–угольник $A_1B_1C_1D_1$ является параллелограммом.

   **Решение:**Из свойств параллелограмма следует, что $AB = CD$, $\angle BAD_1 = 180° - \angle BAD = 180° - \angle BCD = \angle DCB_1$, $AD_1 = AD = BC = CB_1$. Следовательно, треугольники $\triangle ABD_1$ и $\triangle CBD_1$ равны. Поскольку $CC_1 = 2CD = 2AB = AA_1$, то равны треугольники $\triangle CC_1B_1$ и $\triangle AA_1D_1$. Следовательно $A_1D_1 = B_1C_1$, аналогично доказывается, что $A_1B_1 = C_1D_1$. Если противоположные стороны 4–угольника равны, то это — параллелограмм.




4. Блоха прыгает по числовой прямой, причем длина каждого прыжка не может быть меньше $n$. Она начинает свое движение из начала координат и хочет побывать во всех целых точках, принадлежащих отрезку $[0, 2013]$ (и только в них!) ровно по одному разу. При каком наибольшем значении $n$ это у нее получится?

   **Ответ:** $n = 1006$.

   **Решение:** При $n = 1006$ можно построить путь

   $$0 \to 1007 \to 1 \to 1008 \to \ldots \to 1005 \to 2012 \to 1006 \to 2013.$$

   Докажем, что $n$ не может быть больше 1006. Действительно, допустим $n \geqslant 1007$. Тогда в точку с координатой 1007 можно попасть только из начала отрезка (точки 0). Но если блоха прыгнет оттуда в точку 1007, то обратно прыгнуть она уже не может, следовательно, должна закончить свой путь в этой точке и не побывает в других точках отрезка.

5. Решите ребус (одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным - разные)

   $$\text{MSU} + \text{MSU} + \text{MSU} + \text{MSU} + \text{OLYMP} + \text{OLYMP} = \text{MOSCOW}$$

   **Ответ:** $C = 5$, $L = 7$, $M = 1$, $O = 9$, $P = 2$, $S = 4$, $U = 3$, $W = 6$, $Y = 0$, $143 + 143 + 143 + 143 + 97012 + 97012 = 194596$.

   **Решение:** Заметим, что поскольку $MSU \leq 987$, $OLYMP \leq 98765$, то

   $$MSU + MSU + MSU + MSU + OLYMP + OLYMP \leq 987 \times 4 + 98765 \times 4 = 201478.$$

   Таким образом $M$ может быть равно только 1 или 2. $M = 2$ не подходит, т.к. в этом случае

   $$MSU + MSU + MSU + MSU + OLYMP + OLYMP \leq 298 \times 4 + 98765 \times 4 = 198722.$$

Следовательно $M = 1$. Заметим, что при сложении $O$ и $O$ получается $1O$, при этом из предыдущих разрядов переносится не более 2. Следовательно $O$ может быть только 8 или 9. Предположим $O = 8$, тогда

$$MSU + MSU + MSU + MSU + OLYMP + OLYMP \leq 198 \times 4 + 89716 \times 4 = 180314.$$

Но тогда $S$ должно быть равно 0, следовательно,

$$MSU + MSU + MSU + MSU + OLYMP + OLYMP \leq 109 \times 4 + 89716 \times 4 = 179868,$$

что приводит к противоречию. Итак, $O = 9$.

6. Сколькими различными способами шахматный король может пройти с поля $e1$ на поле $h5$, если ему разрешается ходить только на одну клетку вправо, вверх или по диагонали вправо–вверх?

   **Ответ:**129 способов.

   **Решение:**Последовательно (начиная с e1) найдем количество способов, которым можно пройти в каждую клетку. Каждое число (кроме 1) получается суммированием соседей снизу, слева и слева–снизу.

| | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ | $f$ | $g$ | $h$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | | | | | | | | |
| 7 | | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | | |
| 5 | | | | | 1 | 9 | 41 | 129 |
| 4 | | | | | 1 | 7 | 25 | 63 |
| 3 | | | | | 1 | 5 | 13 | 25 |
| 2 | | | | | 1 | 3 | 5 | 7 |
| 1 | | | | | 1 | 1 | 1 | 1 |