

Задания олимпиады «Ломоносов-2007» по математике

1. Вычислить $(\sin \alpha - \cos \alpha)(\sin \beta - \cos \beta)$, если

$$\sin(\alpha + \beta) = 0,8 \quad \text{и} \quad \cos(\alpha - \beta) = 0,3.$$

2. Решить уравнение $\sqrt{2^{(x^2)}} = (2^{\sqrt[5]{x}})^5$.

3. Какие значения может принимать выражение

$$\log_{(b_{11}b_{50})}(b_1b_2 \dots b_{60}),$$

где b_1, b_2, \dots — геометрическая прогрессия?

4. Решить неравенство $\frac{\sqrt{8-x} - |2x-1|}{\sqrt{x+7} - |2x-1|} \leq 1$.

5. На стороне AB треугольника ABC взята такая точка D , что окружность, проходящая через точки A, C и D , касается прямой BC . Найти AD , если $AC = 9$, $BC = 12$ и $CD = 6$.

6. Натуральные числа a, b и c таковы, что $НОК(a, b) = 60$ и $НОК(a, c) = 270$ ($НОК(x, y)$ — наименьшее общее кратное чисел x и y). Найти $НОК(b, c)$.

7. Определить, под каким углом видно из начала координат (т.е. внутри какого наименьшего угла с вершиной в точке $(0, 0)$ помещается) множество, заданное на координатной плоскости неравенством

$$14x^2 + xy + y^2 + 14x + 2y + 4 < 0.$$

8. Грани двугранного угла пересекают боковую поверхность цилиндра радиусом 5, образуя с его осью углы в 70° и 80° , а ребро двугранного угла перпендикулярно этой оси и удалено от нее на расстояние 11. Найти объем части цилиндра, расположенной внутри двугранного угла.

9. Найти все значения $x \in (0; \pi]$, удовлетворяющие уравнению

$$|\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x| + |\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x| = \operatorname{tg} 3x.$$

10. В течение четверти учитель по пению ставил детям оценки «1», «2», «3», «4» и «5». Среднее арифметическое всех оценок Вовочки оказалось равным в точности 3,5. И тогда, по предложению Вовочки, учитель заменил одну его оценку «4» парой оценок «3» и «5». Доказать, что от этого средняя оценка Вовочки по пению увеличилась. Найти наибольшее возможное ее значение после такой замены: а) одной оценки «4»; б) всех его оценок «4»?

Задания олимпиады «Ломоносов-2007» по математике

1. Вычислить $(\sin \alpha - \cos \alpha)(\sin \beta - \cos \beta)$, если

$$\sin(\alpha + \beta) = 0,8 \quad \text{и} \quad \cos(\alpha - \beta) = 0,3.$$

2. Решить уравнение $\sqrt{2^{(x^2)}} = (2^{\sqrt[5]{x}})^5$.

3. Какие значения может принимать выражение

$$\log_{(b_{11}b_{50})}(b_1b_2 \dots b_{60}),$$

где b_1, b_2, \dots — геометрическая прогрессия?

4. Решить неравенство $\frac{\sqrt{8-x} - |2x-1|}{\sqrt{x+7} - |2x-1|} \leq 1$.

5. На стороне AB треугольника ABC взята такая точка D , что окружность, проходящая через точки A, C и D , касается прямой BC . Найти AD , если $AC = 9$, $BC = 12$ и $CD = 6$.

6. Натуральные числа a, b и c таковы, что $НОК(a, b) = 60$ и $НОК(a, c) = 270$ ($НОК(x, y)$ — наименьшее общее кратное чисел x и y). Найти $НОК(b, c)$.

7. Определить, под каким углом видно из начала координат (т.е. внутри какого наименьшего угла с вершиной в точке $(0, 0)$ помещается) множество, заданное на координатной плоскости неравенством

$$14x^2 + xy + y^2 + 14x + 2y + 4 < 0.$$

8. Грани двугранного угла пересекают боковую поверхность цилиндра радиусом 5, образуя с его осью углы в 70° и 80° , а ребро двугранного угла перпендикулярно этой оси и удалено от нее на расстояние 11. Найти объем части цилиндра, расположенной внутри двугранного угла.

9. Найти все значения $x \in (0; \pi]$, удовлетворяющие уравнению

$$|\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x| + |\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x| = \operatorname{tg} 3x.$$

10. В течение четверти учитель по пению ставил детям оценки «1», «2», «3», «4» и «5». Среднее арифметическое всех оценок Вовочки оказалось равным в точности 3,5. И тогда, по предложению Вовочки, учитель заменил одну его оценку «4» парой оценок «3» и «5». Доказать, что от этого средняя оценка Вовочки по пению увеличилась. Найти наибольшее возможное ее значение после такой замены: а) одной оценки «4»; б) всех его оценок «4»?