Задания олимпиады «Ломоносов-2006» по математике

1. Вычислить $\log_4 \log_2 \underbrace{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{16}}}}_{40}$.

2. Что больше: $\operatorname{tg}\left(\frac{11\pi}{6}\right)$ или меньший корень квадратного трехчлена
$$11x^2 - 17x - 13?$$

3. Решить уравнение
$$\cos(x^2 + x) + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 0.$$

4. Точки A, B и C лежат на одной прямой. Отрезок AB является диаметром первой окружности, а отрезок BC — диаметром второй окружности. Прямая, проходящая через точку A, пересекает первую окружность в точке D и касается второй окружности в точке E. Известно, что $BD = 9$, $BE = 12$. Найти радиусы окружностей.

5. Из пункта A в пункт B в 8^{00} выехал велосипедист, а через некоторое время из B в A вышел пешеход. Велосипедист прибыл в B через 6 часов после выхода оттуда пешехода. Пешеход пришел в A в 17^{00} того же дня. Скорости велосипедиста и пешехода постоянны. Какую долю пути из A в B проехал велосипедист до его встречи с пешеходом?

6. Решить неравенство $\sqrt{4-x} - 2 \leqslant x|x-3| + 4x$.

7. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение
$$\cos 2x - 2a\sin x - |2a-1| + 2 = 0$$
имеет решения и все его положительные решения образуют арифметическую прогрессию.

8. В треугольной пирамиде $SABC$ ребро SA перпендикулярно плоскости ABC, $\angle SCB = 90^\circ$, $BC = \sqrt{5}$, $AC = \sqrt{7}$. Последовательность точек O_n строится следующим образом: точка O_1 — центр сферы, описанной около пирамиды $SABC$, и для каждого натурального $n \geqslant 2$ точка O_n — это центр сферы, описанной около пирамиды $O_{n-1}ABC$. Какую длину должно иметь ребро SA, чтобы множество $\{O_n\}$ состояло ровно из двух различных точек?

9. На клетчатой бумаге отмечен прямоугольник $m \times n$ клеток, причем числа m и n взаимно просты и $m < n$. Диагональ этого прямоугольника не пересекает ровно 116 его клеток. Найти все возможные значения m и n.

10. Решить неравенство
$$4(1 - \operatorname{tg} x)^{2004} + (1 + \operatorname{tg} x)^{2006} \geqslant 2^{2006}.$$

Задания олимпиады «Ломоносов-2006» по математике

1. Вычислить $\log_4 \log_2 \underbrace{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{16}}}}_{40}$.

2. Что больше: $\operatorname{tg}\left(\frac{11\pi}{6}\right)$ или меньший корень квадратного трехчлена
$$11x^2 - 17x - 13?$$

3. Решить уравнение
$$\cos(x^2 + x) + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 0.$$

4. Точки A, B и C лежат на одной прямой. Отрезок AB является диаметром первой окружности, а отрезок BC — диаметром второй окружности. Прямая, проходящая через точку A, пересекает первую окружность в точке D и касается второй окружности в точке E. Известно, что $BD = 9$, $BE = 12$. Найти радиусы окружностей.

5. Из пункта A в пункт B в 8^{00} выехал велосипедист, а через некоторое время из B в A вышел пешеход. Велосипедист прибыл в B через 6 часов после выхода оттуда пешехода. Пешеход пришел в A в 17^{00} того же дня. Скорости велосипедиста и пешехода постоянны. Какую долю пути из A в B проехал велосипедист до его встречи с пешеходом?

6. Решить неравенство $\sqrt{4-x} - 2 \leqslant x|x-3| + 4x$.

7. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение
$$\cos 2x - 2a\sin x - |2a-1| + 2 = 0$$
имеет решения и все его положительные решения образуют арифметическую прогрессию.

8. В треугольной пирамиде $SABC$ ребро SA перпендикулярно плоскости ABC, $\angle SCB = 90^\circ$, $BC = \sqrt{5}$, $AC = \sqrt{7}$. Последовательность точек O_n строится следующим образом: точка O_1 — центр сферы, описанной около пирамиды $SABC$, и для каждого натурального $n \geqslant 2$ точка O_n — это центр сферы, описанной около пирамиды $O_{n-1}ABC$. Какую длину должно иметь ребро SA, чтобы множество $\{O_n\}$ состояло ровно из двух различных точек?

9. На клетчатой бумаге отмечен прямоугольник $m \times n$ клеток, причем числа m и n взаимно просты и $m < n$. Диагональ этого прямоугольника не пересекает ровно 116 его клеток. Найти все возможные значения m и n.

10. Решить неравенство
$$4(1 - \operatorname{tg} x)^{2004} + (1 + \operatorname{tg} x)^{2006} \geqslant 2^{2006}.$$