Задания олимпиады «Ломоносов-2005» по математике

1. Вычислить
$$\frac{(x-y)(x^4-y^4)}{x^2-y^2}-\frac{2xy(x^3-y^3)}{x^2+xy+y^2} \qquad \text{при} \quad x=1,\underbrace{2\ldots22}_{46}, \quad y=-2,\underbrace{7\ldots7}_{45}8.$$

2. Решить неравенство
$$\frac{3\cdot 2^{1-x}+1}{2^x-1}\geqslant\frac{1}{1-2^{-x}}.$$

3. Найти площадь трапеции $ABCD$ с боковой стороной $BC=5$, если расстояния от вершин A и D до прямой BC равны 3 и 7 соответственно.

4. Решить уравнение
$$\log_4(4\sin^2 2x)=2-\log_2(-2\operatorname{tg}x).$$

5. На окружности взята точка A, на ее диаметре BC — точки D и E, а на его продолжении за точку B — точка F. Найти BC, если $\angle BAD=\angle ACD$, $\angle BAF=\angle CAE$, $BD=2$, $BE=5$ и $BF=4$.

6. Решить неравенство
$$5|x|\leqslant x\left(3x+2-2\sqrt{8-2x-x^2}\right).$$

7. Основанием пирамиды служит треугольник со сторонами 5, 12 и 13, а ее высота образует с высотами боковых граней (опущенными из той же вершины) одинаковые углы, не меньшие 30°. Какой наибольший объем может иметь такая пирамида?

8. Найти все значения a, при которых уравнение
$$4x-\big|3x-|x+a|\big|=9|x-1|$$
имеет хотя бы один корень.

9. Группа отдыхающих в течение 2 ч 40 мин каталась на моторной лодке по реке с постоянной скоростью (относительно воды) попеременно то по течению, то против: в каждую сторону — в общей сложности не менее, чем по 1 ч. В итоге лодка прошла путь в 40 км (относительно берега) и, отчалив от пристани A, причалила к пристани B на расстоянии 10 км от A. В какую сторону текла река? Какова при этих условиях максимальная скорость ее течения?

10. При каждом натуральном n тело Φ_n в координатном пространстве задано неравенством
$$3|x|^n+|8y|^n+|z|^n<1,$$
а тело Φ — объединение всех тел Φ_n. Найти объем Φ.

Задания олимпиады «Ломоносов-2005» по математике

1. Вычислить
$$\frac{(x-y)(x^4-y^4)}{x^2-y^2}-\frac{2xy(x^3-y^3)}{x^2+xy+y^2} \qquad \text{при} \quad x=1,\underbrace{2\ldots22}_{46}, \quad y=-2,\underbrace{7\ldots7}_{45}8.$$

2. Решить неравенство
$$\frac{3\cdot 2^{1-x}+1}{2^x-1}\geqslant\frac{1}{1-2^{-x}}.$$

3. Найти площадь трапеции $ABCD$ с боковой стороной $BC=5$, если расстояния от вершин A и D до прямой BC равны 3 и 7 соответственно.

4. Решить уравнение
$$\log_4(4\sin^2 2x)=2-\log_2(-2\operatorname{tg}x).$$

5. На окружности взята точка A, на ее диаметре BC — точки D и E, а на его продолжении за точку B — точка F. Найти BC, если $\angle BAD=\angle ACD$, $\angle BAF=\angle CAE$, $BD=2$, $BE=5$ и $BF=4$.

6. Решить неравенство
$$5|x|\leqslant x\left(3x+2-2\sqrt{8-2x-x^2}\right).$$

7. Основанием пирамиды служит треугольник со сторонами 5, 12 и 13, а ее высота образует с высотами боковых граней (опущенными из той же вершины) одинаковые углы, не меньшие 30°. Какой наибольший объем может иметь такая пирамида?

8. Найти все значения a, при которых уравнение
$$4x-\big|3x-|x+a|\big|=9|x-1|$$
имеет хотя бы один корень.

9. Группа отдыхающих в течение 2 ч 40 мин каталась на моторной лодке по реке с постоянной скоростью (относительно воды) попеременно то по течению, то против: в каждую сторону — в общей сложности не менее, чем по 1 ч. В итоге лодка прошла путь в 40 км (относительно берега) и, отчалив от пристани A, причалила к пристани B на расстоянии 10 км от A. В какую сторону текла река? Какова при этих условиях максимальная скорость ее течения?

10. При каждом натуральном n тело Φ_n в координатном пространстве задано неравенством
$$3|x|^n+|8y|^n+|z|^n<1,$$
а тело Φ — объединение всех тел Φ_n. Найти объем Φ.