ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ К ВАРИАНТУ ЕМ19
(2019 год)

ОТВЕТЫ К ВАРИАНТУ ЕМ19:

1. $\frac{25}{12}$
2. $\sqrt{2}$
3. $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
4. $\frac{1}{2}$
5. $x \in (-\infty, -3] \cup (-\frac{1+\sqrt{5}}{2}, -1) \cup [4, +\infty)$
6. $x = 0$
7. $\frac{3\sqrt{6}}{4}$
8. $b < -2$

РЕШЕНИЯ

1. Найдите в явном виде рациональное число, заданное выражением $\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{8}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\dfrac{8}{3\sqrt{3}}\right)^{\frac{2}{3}}$.

Решение: $\left(\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{8}{3\sqrt{3}}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4} + \frac{4}{3} = \frac{25}{12}$.

Ответ: $\frac{25}{12}$

2. Положительные числа a, b, c образуют геометрическую прогрессию. Известно, что $a + c = 3$, $a^2 + c^2 = 5$. Найдите b.

Решение: $b^2 = ac = \frac{1}{2}\big((a+c)^2 - (a^2+c^2)\big) = \frac{1}{2}(9-5) = 2$. Следовательно, $b = \sqrt{2}$.

Ответ: $\sqrt{2}$

3. Решите уравнение $8\sin^4 x + 8\cos^4 x = 8\cos 2x + 9$.

Решение:

$$8\sin^4 x + 8\cos^4 x = 8\cos 2x + 9 \iff 8(1-\cos^2 x)^2 + 8\cos^4 x = 16\cos^2 x + 1 \iff$$

$$\iff 16\cos^4 x - 32\cos^2 x + 7 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} \cos^2 x = \frac{1}{4} \\ \cos^2 x = \frac{7}{4} \end{array}\right. \iff \cos^2 x = \frac{1}{4} \iff$$

$$\iff \cos x = \pm\frac{1}{2} \iff \left[\begin{array}{l} x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{array}\right., \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

4. Найдите боковую сторону BC трапеции $ABCD$ (с основаниями AB и CD), если известно, что $AB = 1$, $\angle ADB = 90^\circ$, $\angle ABD = \angle DBC$.

Решение: Проведём через точку C прямую, параллельную AD. Обозначим через E и F точки пересечения этой прямой с AB и DB соответственно. Тогда $EC \parallel AD \perp DB$, то есть треугольники DCF, BCF и BEF являются прямоугольными. При этом $\angle CDF = \angle EBF = \angle CBF$, откуда следует, что треугольники DCF, BCF, BEF равны. В частности, $CD = CB = EB$. С другой стороны, $AECD$ — параллелограмм. Следовательно, $DC = AE$. Таким образом, BC равна половине AB и равна $\frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$

5. Решите неравенство $\log_{x^2+x}(x^2-x) \geqslant \log_{x^2+x} 12$.

Решение:

$$\log_{x^2+x}(x^2-x) \geqslant \log_{x^2+x} 12 \iff \frac{\ln(x^2-x)-\ln 12}{\ln(x^2+x)} \geqslant 0 \iff$$

$$\iff \begin{cases} |x|>1 \\ \dfrac{x^2-x-12}{x^2+x-1} \geqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} |x|>1 \\ \dfrac{(x+3)(x-4)}{\left(x+\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)} \geqslant 0 \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} x \leqslant 3 \\ -\frac{\sqrt{5}+1}{2} < x < -1 \\ x \geqslant 4 \end{array} \right. .$$

Здесь мы воспользовались тем, что $-2 < -\frac{\sqrt{5}+1}{2} < -1$ и $0 < \frac{\sqrt{5}-1}{2} < 1$.

Ответ: $x \in (-\infty, -3] \cup (-\frac{1+\sqrt{5}}{2}, -1) \cup [4, +\infty)$

6. Решите уравнение $\log_2(1-x^2-\sqrt{x}) = 2^{\sqrt{x}} - \cos(x^2)$.

Решение: Заметим, что $1-x^2-\sqrt{x} \leqslant 1$ для всех вещественных x, а равенство достигается только при $x=0$. Следовательно, $\log_2(1-x^2-\sqrt{x})$ при всех допустимых значениях x неположителен и равен нулю только при $x=0$. Но $2^{\sqrt{x}} - \cos(x^2)$ неотрицательно при всех вещественных x и равно нулю только при $x=0$. Стало быть, исходное уравнение выполняется только при $x=0$.

Ответ: $x=0$

7. Дана правильная треугольная призма $ABCA'B'C'$ с основаниями ABC, $A'B'C'$ и боковыми рёбрами AA', BB', CC'. Известно, что длина ребра основания равна 2, а длина бокового ребра равна 1. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через середину ребра AB и перпендикулярной отрезку, соединяющему середины рёбер $A'B'$ и BC.

Решение: Обозначим через D, E, F, G, M середины рёбер AB, $A'B'$, $B'C'$, BC, BB' соответственно. Обозначим также через O центр грани $AA'C'C$. Тогда отрезки FD, GE и MO попарно перпендикулярны и пересекаются в одной точке (совпадающей с серединой каждого из этих отрезков). Стало быть, плоскость сечения проходит через точки D, M, F, O, а угол между плоскостью сечения и плоскостью ABC равен углу $\angle FDG$ и равен $45°$. Далее, прямые пересечения плоскости сечения с плоскостями ABC и $A'B'C'$ параллельны прямой OM. Следовательно, плоскость сечения делит AC и $A'C'$ в отношении $1:3$ и $3:1$ соответственно. Стало быть, площадь ортогональной проекции сечения на плоскость ABC равна $(1-\frac{1}{4})S(\triangle ABC) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$. Площадь же искомого сечения равна $\frac{3\sqrt{3}}{4} / \cos 45° = \frac{3\sqrt{6}}{4}$.

Ответ: $\frac{3\sqrt{6}}{4}$

8. Найдите все значения параметра b, при которых существуют целочисленные значения параметра a, такие что система уравнений

$$\begin{cases} 2^x + \sin y = a \\ x + \log_2(\sin y) = b \end{cases}$$

имеет хотя бы два решения (x_1, y_1), (x_2, y_2), удовлетворяющие условию $x_1 \neq x_2$.

Решение: Положим $u = 2^x$, $v = \sin y$. Тогда система переписывается как

$$\begin{cases} u+v=a \\ uv = 2^b \\ u>0,\ 0<v<1 \end{cases}.$$

По каждой паре (u, v), удовлетворяющей этой системе значение x восстанавливается однозначно, следовательно, задача заключается в описании множества значений b, при которых существует $a \in \mathbb{Z}$, такое что существуют хотя бы два решения (u_1, v_1), (u_2, v_2), удовлетворяющие условию $u_1 \neq u_2$.

Заметим, что u и v, удовлетворяющие системе, являются парой корней многочлена $f(t) = t^2 - at + 2^b$. Стало быть, нас интересуют в точности те значения a и b, при которых корни $f(t)$ различны, положительны и не превосходят единицы. Получаем следующие необходимые и достаточные условия на a и b:

$$\begin{cases} f(0) > 0 \\ f(1) \geqslant 0 \\ D = a^2 - 4 \cdot 2^b > 0 \\ 0 < \frac{a}{2} < 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2^{\frac{b}{2}+1} < a \leqslant 2^b + 1 \\ 0 < a < 2 \end{cases}.$$

Единственное целое значение, которое может принимать a, равно 1. Учитывая, что при любом вещественном b справедливо неравенство $2^b + 1 > 1$, получаем следующее необходимое и достаточное условие на b:

$$2^{\frac{b}{2}+1} < 1 \iff b < -2.$$

Ответ: $b < -2$