Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

*июль–август 2020 года*

# ВАРИАНТ 201

## ОТВЕТЫ

**1.** 1

**2.** 1470

**3.** $x = \pm\pi/6 + k\pi,\ \pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

**4.** $x \in \left(0, \frac{1}{8}\right] \cup \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \cup [2, +\infty)$

**5.** 8

**6.** 3 : 4

**7.** $a = 1$

## РЕШЕНИЯ

**1.** Известно, что $f(x) = \dfrac{x}{1+x} + \dfrac{1-x}{x} - \dfrac{1}{24}$. Найдите $f\left(\dfrac{3}{5}\right)$.

**Решение:** $f(3/5) = \frac{3}{8} + \frac{2}{3} - \frac{1}{24} = \frac{9+16-1}{24} = 1$.

**Ответ:** 1

**2.** Найдите сумму всех натуральных чисел, не превосходящих 105, которые делятся на 3, но не делятся на 5.

**Решение:** Искомая сумма равна $3(1 + \ldots + 35) - 15(1 + \ldots + 7) = 3 \cdot 35 \cdot 18 - 15 \cdot 7 \cdot 4 = 3 \cdot 5 \cdot 7(18 - 4) = 21 \cdot 5 \cdot 14 = 21 \cdot 70 = 1470$.

**Ответ:** 1470

**3.** Решите уравнение $\operatorname{tg} 2x = 2\cos 2x \operatorname{ctg} x$.

**Решение:**

$$\operatorname{tg} 2x = 2\cos 2x \operatorname{ctg} x \iff \begin{cases} \sin x \cos 2x \neq 0 \\ \sin x \sin 2x = 2\cos^2 2x \cos x \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \sin x \cos 2x \neq 0 \\ \cos x(2\cos^2 2x - 2\sin^2 x) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \sin x \cos 2x \neq 0 \\ \cos x(2\cos^2 2x + \cos 2x - 1) = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \sin x \cos 2x \neq 0 \\ \cos x(2\cos 2x - 1)(\cos 2x + 1) = 0 \end{cases} \iff x = \pm\pi/6 + k\pi,\ \pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

**Ответ:** $x = \pm\pi/6 + k\pi,\ \pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

**4.** Решите неравенство $\log_{2x} 16 - \log_{4x} 8 \leqslant 1$.

**Решение:**

$$\log_{2x} 16 - \log_{4x} 8 \leqslant 1 \iff \frac{4}{1+\log_2 x} - \frac{3}{2+\log_2 x} \leqslant 1 \iff \frac{\log_2^2 x + 2\log_2 x - 3}{(1+\log_2 x)(2+\log_2 x)} \geqslant 0 \iff$$

$$\iff \frac{(3+\log_2 x)(-1+\log_2 x)}{(1+\log_2 x)(2+\log_2 x)} \geqslant 0 \iff \log_2 x \in (-\infty, -3] \cup (-2, -1) \cup [1, +\infty) \iff$$

$$\iff x \in \left(0, \tfrac{1}{8}\right] \cup \left(\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}\right) \cup [2, +\infty).$$

**Ответ:** $x \in \left(0, \frac{1}{8}\right] \cup \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \cup [2, +\infty)$

**5.** В равнобедренном треугольнике $ABC$ с равными сторонами $AB$ и $BC$ проведены биссектрисы $AD$ и $CE$. Окружность, вписанная в треугольник $ABC$, касается сторон $AB$ и $BC$ в точках $K$ и $L$ соответственно. Найдите $DE$, если $AC = 12$ и $KL = 9$.

**Решение:** Поскольку треугольник равнобедренный, $AK = CL = \frac{1}{2}AC = 6$. Из подобия треугольников $ABC$ и $KBL$

$$\frac{AK}{KB} + 1 = \frac{AK + KB}{KB} = \frac{AB}{KB} = \frac{AC}{KL} = \frac{4}{3}.$$

Отсюда $KB = 3AK = 18$, $AB = BC = 18 + 6 = 24$. Далее, поскольку $CE$ — биссектриса, $AE/EB = AC/BC = 1/2$. Стало быть, из подобия треугольников $ABC$ и $EBD$

$$DE = AC \cdot \frac{EB}{AB} = 12 \cdot \frac{2}{3} = 8.$$

**Ответ:** 8

**6.** Дана треугольная призма $ABCA'B'C'$ с основанием $ABC$ и боковыми рёбрами $AA'$, $BB'$, $CC'$. На диагоналях $AB'$, $BC'$, $CA'$ отмечены точки $D$, $E$, $F$ соответственно. Найдите отношение, в котором плоскость $DEF$ делит отрезок $AA'$, если $AD : DB' = 1 : 1$, $BE : EC' = 1 : 2$, $CF : FA' = 1 : 3$.

**Решение:** Точки $D$ и $F$ лежат в плоскости $BCA'$. Обозначим через $G$ точку пересечения прямой $DF$ с прямой $BC$. Из того, что $AD : DB' = 1 : 1$, $CF : FA' = 1 : 3$, следует, что $GC = \frac{1}{2}BC$. Обозначим через $H$ точку пересечения прямой $GE$ с прямой $CC'$. Из того, что $GC = \frac{1}{2}BC$ и

$BE : EC' = 1 : 2$, следует, что $CH = \frac{1}{7}CC'$. Обозначая через $K$ точку пересечения прямой $HF$ с прямой $AA'$, получаем $KA' = \frac{3}{7}AA'$. Стало быть, $A'K : KA = 3 : 4$.

**Ответ:** $3 : 4$

**7.** Найдите все положительные значения параметра $a$, при которых уравнение

$$\log_{2-x}\left(a^{2+x} + 2a^{1-x} + x - 1\right) + \log_{2+x}\left(a^{2-x} + 2a^{1+x} - x - 1\right) = 2$$

имеет ровно одно решение (относительно $x$).

**Решение:** Если $x$ — решение, то и $-x$ — тоже решение. Стало быть, если решение единственно, то $0$ — решение. Подставляя $x = 0$, получаем $\log_2(a^2 + 2a - 1) = 1$, то есть $a^2 + 2a - 3 = 0$. Поскольку $a$ положительно, $a = 1$.

Подставим в исходное уравнение $a = 1$. Получим

$$\log_{2-x}(2 + x) + \log_{2+x}(2 - x) = 2.$$

При $x \neq 0$ левая часть строго больше 2, стало быть $x = 0$ — единственное решение.

**Ответ:** $a = 1$

Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

*июль–август 2020 года*

# ВАРИАНТ 202

## ОТВЕТЫ

**1.** 2

**2.** 243

**3.** $x = \pi/4 + 2k\pi/3,\ k \in \mathbb{Z}$

**4.** $x \in \left(0, \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) \cup \{1\}$

**5.** $\sqrt{6}$

**6.** 11/30

**7.** $x = y = 1$

## РЕШЕНИЯ

**1.** Известно, что $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x+4} + \dfrac{1}{x-3}} + \dfrac{19}{x}$. Найдите $f(12)$.

**Решение:** $f(12) = \sqrt{\frac{9+16}{16\cdot 9}} + \frac{19}{12} = \frac{5}{12} + \frac{19}{12} = 2$.

**Ответ:** 2

**2.** Дана возрастающая геометрическая прогрессия $b_1, b_2, b_3, \ldots$, состоящая из положительных чисел. Известно, что сумма первого и третьего членов этой прогрессии равна второму члену, умноженному на 10/3. Найдите отношение $b_6 + b_7 + b_8 + b_9 + b_{10}$ к $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5$.

**Решение:** Пусть $q$ — знаменатель. Тогда $1 + q^2 = \frac{10}{3}q$, то есть $3q^2 - 10q + 3 = 0$. Стало быть, $q = 3$ или $q = 1/3$. Поскольку последовательность возрастающая, $q = 3$. Искомое отношение равно $(bq^5 + bq^6 + bq^7 + bq^8 + bq^9)/(b + bq + bq^2 + bq^3 + bq^4) = q^5 = 3^5 = 243$.

**Ответ:** 243

**3.** Решите уравнение $\sin x + \cos x = 2\sqrt{2}\sin x \cos x$.

**Решение:**

$$\sin x + \cos x = 2\sqrt{2}\sin x\cos x \iff \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \sin 2x \iff$$
$$\iff \left[\begin{array}{l} 2x = x + \pi/4 + 2k\pi \\ 2x = \pi - x - \pi/4 + 2k\pi \end{array}\right., \quad k\in\mathbb{Z} \iff \left[\begin{array}{l} x = \pi/4 + 2k\pi \\ x = \pi/4 + 2k\pi/3 \end{array}\right., \quad k\in\mathbb{Z} \iff$$
$$\iff x = \pi/4 + 2k\pi/3,\ k\in\mathbb{Z}.$$

**Ответ:** $x = \pi/4 + 2k\pi/3,\ k\in\mathbb{Z}$

**4.** Решите неравенство $\log_{|2x-\frac{1}{2}|}\left(x+1+\dfrac{1}{x}\right) \geqslant \log_{|2x-\frac{1}{2}|}\left(x^2+1+\dfrac{1}{x^2}\right)$.

**Решение:** Зафиксируем ОДЗ $x$: $x>0$, $x\neq\frac{1}{4},\frac{3}{4}$. Далее, заметим, что

$$x^2+1+\frac{1}{x^2} = \left(x+1+\frac{1}{x}\right)\left(x-1+\frac{1}{x}\right).$$

Стало быть, при $x$ из ОДЗ

$$\log_{|2x-\frac{1}{2}|}\left(x+1+\frac{1}{x}\right) \geqslant \log_{|2x-\frac{1}{2}|}\left(x^2+1+\frac{1}{x^2}\right) \iff$$
$$\iff \log_{|2x-\frac{1}{2}|}\left(x-1+\frac{1}{x}\right) \leqslant 0 \iff \begin{cases} x>0,\ x\neq\frac{1}{4},\frac{3}{4} \\ \dfrac{x^2-2x+1}{x(|2x-\frac{1}{2}|-1)} \leqslant 0 \end{cases} \iff$$
$$\iff x\in\left(0,\tfrac{1}{4}\right)\cup\left(\tfrac{1}{4},\tfrac{3}{4}\right)\cup\{1\}.$$

**Ответ:** $x\in\left(0,\frac{1}{4}\right)\cup\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)\cup\{1\}$

**5.** На высоте $AH$ остроугольного треугольника $ABC$ как на диаметре построена окружность. Эта окружность пересекает стороны $AB$ и $AC$ в точках $D$ и $E$ соответственно. Найдите отношение $BH:HC$, если $BD:DA = 2:1$ и $AE:EC = 3:1$.

**Решение:** Положим $BD=a$, $DA=b$, $AE=c$, $EC=d$, $BH=x$, $CH=y$. Тогда $x^2=a(a+b)$ и $y^2=d(c+d)$. Поскольку треугольники $ABC$ и $AED$ подобны, имеем также $b(a+b)=c(c+d)$. Стало быть,

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{ac}{bd} = 6.$$

То есть $x/y=\sqrt{6}$.

**Ответ:** $\sqrt{6}$

**6.** Дан тетраэдр $ABCD$. Известно, что $AB=BC=CD=5$ и $CA=AD=DB=6$. Найдите косинус угла между рёбрами $BC$ и $AD$.

**Решение:** Рассмотрим треугольник $ABC$. Высота, опущенная из вершины $B$, равна 4, следовательно, высота $AH$, опущенная из вершины $A$, равна $24/5$. Отсюда получаем $CH=18/5$, $BH=7/5$. Пусть $M$ — середина $BC$. Тогда $MH=5/2-7/5=11/10$.

Пусть $N$ — середина $AD$. Тогда $BN=CN$ и, стало быть, $MN\perp BC$. Аналогично, $MN\perp AD$. Рассмотрим плоскость, содержащую $BC$ и параллельную $AD$. Спроецируем ортогонально

на эту плоскость точки $A$ и $D$. Полученные точки обозначим $A'$ и $D'$. Точка $N$ при этом проецируется в точку $M$. Стало быть, искомый угол равен $\angle A'MB$. Из прямоугольного треугольника $A'MH$ получаем

$$\cos\angle A'MB = \cos\angle A'MH = \frac{MH}{A'M} = \frac{MH}{AD/2} = \frac{11}{30}.$$

**Ответ:** $11/30$

**7.** Найдите все пары положительных чисел $(x, y)$, удовлетворяющих уравнению

$$\log_{2x^2y+1}(x^4+y^2+1) = \log_{y^4+x^2+1}(2xy^2+1).$$

**Решение:** Заметим, что $x^4+y^2+1 \geqslant 2x^2y+1$ и $y^4+x^2+1 \geqslant 2y^2x+1$. Следовательно,

$$\log_{2x^2y+1}(x^4+y^2+1) \geqslant 1 \geqslant \log_{y^4+x^2+1}(2xy^2+1)$$

и равенство достигается тогда и только тогда, когда одновременно $x^4+y^2 = 2x^2y$ и $y^4+x^2 = 2y^2x$, то есть когда $x^2 = y$ и $y^2 = x$. Поскольку $x, y > 0$, имеем $x = y = 1$.

**Ответ:** $x = y = 1$

Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

*июль-август 2020 года*

# ВАРИАНТ 203

## ОТВЕТЫ

**1.** 12

**2.** 10

**3.** $x = \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$

**4.** $x \in (-\infty, 0] \cup [\log_{\frac{3}{2}}(3+\sqrt{5}), +\infty)$

**5.** $(\sqrt{5}-1)/2$

**6.** $1/3$

**7.** $a = \pi/4,\ 5\pi/4$

## РЕШЕНИЯ

**1.** Найдите целое число, задаваемое выражением: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^2$.

**Решение:** $\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^2 = (2\sqrt{2})^2+2^2 = 12.$

**Ответ:** 12

**2.** Числа $a_1$, $a_2$, $a_3$, ..., $a_{20}$ образуют арифметическую прогрессию. Известно, что сумма первых десяти членов этой прогрессии равна 9, а сумма последних десяти членов равна 11. Найдите сумму $a_6+a_7+\ldots+a_{14}+a_{15}$.

**Решение:** Пусть $d$ — разность прогрессии. Тогда $a_1+\ldots+a_{10} = 10a_6-5d = 9$ и $a_{11}+\ldots+a_{20} = 10a_{15}+5d = 11$. Стало быть, $a_6+\ldots+a_{15} = 10(a_6+a_{15})/2 = 10$.

**Ответ:** 10

**3.** Решите уравнение: $\cos x\cdot(2\cos x-\cos 3x) = 1$.

**Решение:**
$\cos x\cdot(2\cos x-\cos 3x) = 1 \iff 2\cos^2 x-\cos x\cos 3x = 1 \iff \cos 2x-\frac{\cos 2x+\cos 4x}{2} = 0 \iff \cos 2x-\cos 4x = 0 \iff 2\cos^2 2x-\cos 2x-1 = 0 \iff (2\cos 2x+1)(\cos 2x-1) = 0 \iff \left[\begin{array}{l}\cos 2x = -\frac{1}{2}\\ \cos 2x = 1\end{array}\right. \iff 2x = \frac{2\pi k}{3}, k\in\mathbb{Z} \iff x = \frac{\pi k}{3}, k\in\mathbb{Z}.$

**Ответ:** $x = \frac{\pi k}{3}, k\in\mathbb{Z}$

**4.** Решите неравенство: $3^x-2^{x+1} \leqslant \sqrt{2\cdot 9^x-10\cdot 6^x+2^{2x+3}}$.

**Решение:** Положим $t = (3/2)^x$. Тогда

$$3^x - 2^{x+1} \leqslant \sqrt{2\cdot 9^x - 10\cdot 6^x + 2^{2x+3}} \iff t-2 \leqslant \sqrt{2t^2-10t+8} \iff$$
$$\iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t \leqslant 2 \\ 2t^2-10t+8 \geqslant 0 \end{cases} \\ (t-2)^2 \leqslant 2t^2-10t+8 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t \leqslant 2 \\ (t-1)(t-4) \geqslant 0 \end{cases} \\ t^2-6t+4 \geqslant 0 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} t \leqslant 1 \\ t \geqslant 3+\sqrt{5} \end{array}\right. \iff$$
$$\iff x \in (-\infty, 0] \cup [\log_{\frac{3}{2}}(3+\sqrt{5}), +\infty).$$

**Ответ:** $x \in (-\infty, 0] \cup [\log_{\frac{3}{2}}(3+\sqrt{5}), +\infty)$

**5.** В прямоугольном треугольнике $ABC$ с прямым углом $C$ проведены биссектриса $AL$ и высота $CH$. Найдите косинус угла $\angle BAC$, если $HL \parallel AC$.

**Решение:** Положим $AC = a$, $CH = h$, $AH = x$, $BH = y$. Тогда, поскольку $HL \parallel AC$, а $AL$ — бисектриса,
$$\frac{x}{y} = \frac{CL}{BL} = \frac{a}{x+y}.$$
Учитывая, что $xy = h^2$, получаем $ay = x^2+xy = x^2+h^2 = a^2$. Стало быть, $y = a$ и $x^2+ax-a^2 = 0$. Отсюда $(x/a)^2 + (x/a) - 1 = 0$ и $x/a = (\sqrt{5}-1)/2$. Остается заметить, что искомый косинус равен $x/a$.

**Ответ:** $(\sqrt{5}-1)/2$

**6.** Дан куб $ABCDA'B'C'D'$ с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами $AA'$, $BB'$, $CC'$, $DD'$. Найдите объем многогранника с вершинами, являющимися серединами ребер $AB$, $AD$, $AA'$, $CC'$, $C'B'$, $C'D'$, если известно, что ребро куба равно 1.

**Решение:** Обозначим середины ребер $AB$, $AA'$, $AD$, $C'D'$, $CC'$, $C'B'$ соответственно $E$, $F$, $G$, $K$, $L$, $M$. Исследуемый многогранник является объединением двух четырехугольных пирамид с общим основанием $EGKM$ и вершинами $F$ и $L$. Пусть $P$ — точка пересечения плоскости $EGKM$ с прямой $AA'$. Тогда $AP = AF$, то есть объем пирамиды $EGKMF$ в два раза больше объема пирамиды $EGKMA$. Аналогично, объем пирамиды $EGKML$ в два раза больше объема пирамиды $EGKMC'$. Далее, многогранник $AEGKMC'$ является объединением двух четырехугольных пирамид с общим основанием $AEC'K$ и вершинами $G$ и $M$. Объем пирамиды $AEC'KG$ в два раза меньше объема пирамиды $AEC'KD$, а объем пирамиды $AEC'KM$ в два раза меньше объема пирамиды $AEC'KB'$. Наконец, многогранник $DAEC'KB'$ является объединением двух четырехугольных пирамид с общим основанием $ADC'B'$ и вершинами $E$ и $K$. Объем пирамиды $ADC'B'E$ в два раза меньше объема пирамиды $ADC'B'B$, а объем пирамиды $ADC'B'K$ в два раза меньше объема пирамиды $ADC'B'D'$. Итак, объем исходного многогранника в два раза меньше объема многогранника $ABDB'C'D'$, который дополняется до куба тетраэдрами $AA'B'D'$ и $BCDC'$. Объемы тетраэдров равны по $1/6$. Стало быть, искомый объем равен $(1-1/3)/2 = 1/3$.

**Ответ:** $1/3$

**7.** Найдите все значения параметра $a$ из промежутка $[0, 2\pi)$, при которых уравнение
$$\sqrt{\frac{3}{2}x^2 - xy + \frac{3}{2}y^2} = x\cos a + y\sin a$$
имеет хотя бы одно решение $(x, y)$, отличное от $(0, 0)$.

**Решение:** При $x^2+y^2 \neq 0$ имеем: $x\cos a + y\sin a = \sqrt{x^2+y^2}\sin(a+b)$ для некоторого $b$ и, следовательно, $x\cos a + y\sin a \leqslant \sqrt{x^2+y^2}$. С другой стороны, $(\frac{3}{2}x^2 - xy + \frac{3}{2}y^2) - (x^2 + y^2) = \dfrac{x^2-2xy+y^2}{2} = \dfrac{(x-y)^2}{2} \geqslant 0$, причем равенство достигается в точности когда $x = y$. Следовательно, $\sqrt{\frac{3}{2}x^2 - xy + \frac{3}{2}y^2} \geqslant \sqrt{x^2+y^2}$ для любых $x$ и $y$, причем равенство достигается

в точности когда $x = y$. Поэтому для того, чтобы равенство из задачи выполнялось, необходимо $x = y$. При $x = y$ исходное уравнение принимает вид

$$|x|\sqrt{2} = x\sqrt{2}\sin(a + \pi/4).$$

Оно имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда $\sin(a + \pi/4) = \pm 1$, то есть при $a = \pi/4 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

**Ответ:** $a = \pi/4,\ 5\pi/4$

Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

*июль–август 2020 года*

# ВАРИАНТ 204

## ОТВЕТЫ

**1.** 4

**2.** 201

**3.** $x = \pm 2\pi/3 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

**4.** $x \in \left(\frac{1}{2}, \frac{5-\sqrt{5}}{5}\right) \cup \left(\frac{5+\sqrt{5}}{5}, \frac{5+\sqrt{5}}{4}\right)$

**5.** $22\sqrt{3}$

**6.** $\sqrt{13} - 1$

**7.** $a = 0$

## РЕШЕНИЯ

**1.** Найдите целое число, задаваемое выражением $\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} + \dfrac{2}{\sqrt{5}+1}\right)\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2} + \dfrac{2}{\sqrt{5}-1}\right)$.

**Решение:** $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} + \frac{2}{\sqrt{5}+1}\right)\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} + \frac{2}{\sqrt{5}-1}\right) = (\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1) = 4.$

**Ответ:** 4

**2.** Дана арифметическая прогрессия. Её двадцатый член равен 1, а член с номером 2000 равен 199. Найдите член этой прогрессии с номером 2020.

**Решение:** Пусть $d$ — разность прогрессии и пусть $a_k$ — её член с номером $k$. Тогда $a_{2000} = a_{20} + 1980d$, $a_{2020} = a_{2000} + 20d = a_{2000} + (a_{2000} - a_{20})/99 = 199 + 198/99 = 199 + 2 = 201$.

**Ответ:** 201

**3.** Решите уравнение $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) - \cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) + \cos\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3}$.

**Решение:**

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}\iff$$

$$\iff 2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\iff 4\cos x\sin\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}\iff$$

$$\iff \cos x=-1/2\iff x=\pm 2\pi/3+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

**Ответ:** $x=\pm 2\pi/3+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

**4.** Решите неравенство $\log_x\left(\log_{\sqrt{x}}(10x-4-4x^2)\right)\geqslant\log_{\sqrt{x}}\left(\log_x(10x-4-4x^2)\right)$.

**Решение:** Опишем ОДЗ $x$:

$$\begin{cases}10x-4-4x^2>0\\ \log_x(10x-4-4x^2)>0\end{cases}\iff\begin{cases}\frac{1}{2}<x<2\\ \dfrac{4x^2-10x+5}{x-1}<0\end{cases}\iff x\in\left(\frac{1}{2},\frac{5-\sqrt{5}}{4}\right)\cup\left(1,\frac{5+\sqrt{5}}{4}\right).$$

Далее, пусть $x>1$. Тогда исходное неравенство при $x$ из ОДЗ равносильно неравенству

$$2\log_x(10x-4-4x^2)\geqslant\log_x^2(10x-4-4x^2),$$

то есть неравенству $\log_x(10x-4-4x^2)\leqslant 2$, то есть $10x-4-4x^2\leqslant x^2$.

Если же $x<1$, то исходное неравенство при $x$ из ОДЗ равносильно неравенству

$$2\log_x(10x-4-4x^2)\leqslant\log_x^2(10x-4-4x^2),$$

то есть неравенству $\log_x(10x-4-4x^2)\geqslant 2$, то есть, опять же $10x-4-4x^2\leqslant x^2$.

Учитывая, что

$$10x-4-4x^2\leqslant x^2\iff 5x^2-10x+4\geqslant 0\iff x\in\left(-\infty,\frac{5-\sqrt{5}}{5}\right]\cup\left[\frac{5+\sqrt{5}}{5},+\infty\right),$$

получаем $x\in\left(\frac{1}{2},\frac{5-\sqrt{5}}{5}\right]\cup\left[\frac{5+\sqrt{5}}{5},\frac{5+\sqrt{5}}{4}\right)$.

**Ответ:** $x\in\left(\frac{1}{2},\frac{5-\sqrt{5}}{5}\right]\cup\left[\frac{5+\sqrt{5}}{5},\frac{5+\sqrt{5}}{4}\right)$

**5.** Окружность, проходящая через вершины $A$ и $B$ прямоугольника $ABCD$, пересекает сторону $BC$ в точке $E$, а диагональ $AC$ — в точке $F$. Найдите площадь четырёхугольника $ABEF$, если $BE=8$, $EC=4$, а точки $D$, $F$, $E$ лежат на одной прямой.

**Решение:** Поскольку четырёхугольника $ABEF$ вписан в окружность, угол $\angle AFE$ прямой. Следовательно, треугольники $ECF$, $CDF$, $DAF$ подобны. Поскольку $CE=4$, $AD=12$, из этого подобия получаем $CD=4\sqrt{3}$. Стало быть, площадь $S(ABC)$ треугольника $ABC$ равна $24\sqrt{3}$. Далее, из того же подобия следует, что $AF=3CF$. Стало быть, $S(FEC)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot S(ABC)=2\sqrt{3}$. Тогда площадь четырёхугольника $ABEF$ равна $24\sqrt{3}-2\sqrt{3}=22\sqrt{3}$.

**Ответ:** $22\sqrt{3}$

**6.** Дана правильная треугольная пирамида. Известно, что центр сферы, описанной около этой пирамиды, равноудалён от боковых рёбер и от плоскости основания пирамиды. Найдите радиус сферы, вписанной в эту пирамиду, если длина ребра её основания равна 12.

**Решение:** Пусть $ABC$ — основание пирамиды, $S$ — вершина, $H$ — центр треугольника $ABC$, $M$ — середина $AB$, $O_1$ — центр описанной сферы, $O_2$ — центр вписанной сферы. Поскольку точка $O_1$ равноудалена от $AS$ и $ABC$, $AO_1$ — биссектриса треугольника $ASH$. Стало быть, $\angle HAO_1 = \angle SAO_1 = \angle ASO_1 = 30°$. Поскольку $AB = 12$, имеем $AH = 4\sqrt{3}$, откуда $O_1H = 4$, $O_1A = O_1S = 8$. Для треугольника $MSH$ имеем $SH = 12$, $MH = 2\sqrt{3}$, откуда $SM = 2\sqrt{39}$. Поскольку $MO_2$ — биссектриса, $SO_2 = HO_2 \cdot SM/MH = HO_2\sqrt{13}$. Стало быть, $HO_2(1+\sqrt{13}) = SH = 12$, откуда $HO_2 = \sqrt{13} - 1$.

**Ответ:** $\sqrt{13} - 1$

**7.** Найдите все значения параметра $a$, при которых уравнение

$$2x^2y^2 + x^2y + xy^2 + (1-a)(x^2+y^2) - a(x+y+2) = 0$$

имеет ровно одно решение (относительно $(x, y)$).

**Решение:** Если пара $(x, y)$ — решение, то и пара $(y, x)$ — также решение. Стало быть, единственное решение обязано иметь вид $(x, x)$. Тогда $x^4 + x^3 + (1-a)x^2 - ax - a = 0$, то есть

$$(x^2 - a)(x^2 + x + 1) = 0.$$

Чтобы решение было единственным, необходимо, чтобы выполнялось $a = 0$. Тогда исходное уравнение принимает вид

$$2x^2y^2 + x^2y + xy^2 + x^2 + y^2 = 0.$$

Левая часть равна $x^2(y^2 + y + 1) + y^2(x^2 + x + 1)$, стало быть, решение имеет вид $x = y = 0$ и оно, действительно, единственно.

**Ответ:** $a = 0$

Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

*июль–август 2020 года*

# ВАРИАНТ 205

## ОТВЕТЫ

**1.** 3

**2.** 320

**3.** $x = \pm\pi/6 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

**4.** $x \in \left(\sqrt{\frac{2}{17}}, \frac{1}{\sqrt{8}}\right] \cup (1, \sqrt{2}]$

**5.** 18

**6.** 1 : 6

**7.** $a > 8$

## РЕШЕНИЯ

**1.** Найдите целое число, ближайшее к числу $2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)$.

**Решение:** $2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right) = 2\cdot\frac{30+20+15+12+10}{60} = \frac{87}{30} = \frac{29}{10} = 3 - \frac{1}{10}$.

**Ответ:** 3

**2.** Дана геометрическая прогрессия. Её четвёртый член равен 5, а член с номером 54 равен 160. Найдите член этой прогрессии с номером 64.

**Решение:** Пусть $q$ — знаменатель прогрессии и пусть $b_k$ — её член с номером $k$. Тогда $b_{54} = b_4 q^{50}$ и $b_{64} = b_{54}q^{10} = b_{54}(b_{54}/b_4)^{1/5} = 160\cdot 32^{1/5} = 320$.

**Ответ:** 320

**3.** Решите уравнение $9\,\mathrm{tg}^2\,x - 2\cos 2x = 2$.

**Решение:**

$$9\,\mathrm{tg}^2 x - 2\cos 2x = 2 \iff \frac{9}{\cos^2 x} - 9 - 2(2\cos^2 x - 1) = 2 \iff 4\cos^4 x + 9\cos^2 x - 9 = 0 \iff$$
$$\iff (4\cos^2 x - 3)(\cos^2 x + 3) = 0 \iff \cos x = \pm\sqrt{3}/2 \iff x = \pm\pi/6 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

**Ответ:** $x = \pm\pi/6 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

**4.** Решите неравенство $8 + \log_{\sqrt{x}} 8 \leqslant 4\log_x \sqrt{17x^2 - 2}$.

**Решение:**

$$8 + \log_{\sqrt{x}} 8 \leqslant 4\log_x \sqrt{17x^2 - 2} \iff \log_x(8x^4) \leqslant \log_x(17x^2 - 2) \iff$$
$$\iff \begin{cases} x > \sqrt{2/17} \\ \dfrac{8x^4 - 17x^2 + 2}{x - 1} \leqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > \sqrt{2/17} \\ \dfrac{(8x^2 - 1)(x^2 - 2)}{x - 1} \leqslant 0 \end{cases} \iff x \in \left(\sqrt{\tfrac{2}{17}}, \tfrac{1}{\sqrt{8}}\right] \cup (1, \sqrt{2}].$$

**Ответ:** $x \in \left(\sqrt{\frac{2}{17}}, \frac{1}{\sqrt{8}}\right] \cup (1, \sqrt{2}]$

**5.** Произведение оснований трапеции равно 18. Найдите периметр трапеции, если известно, что в неё вписана окружность, а диагонали делят среднюю линию на три равные части.

**Решение:** Рассмотрим одну из диагоналей. Она делит трапецию на два треугольника, средние линии которых относятся как $2:1$. Стало быть, одно из оснований трапеции в два раза больше другого. Поскольку их произведение равно 18, эти основания равны 6 и 3. Поскольку в трапецию вписана окружность, сумма боковых сторон равна сумме оснований, то есть периметр равен $2(6+3) = 18$.

**Ответ:** 18

**6.** В основании четырёхугольной пирамиды $ABCDS$ лежит параллелограмм $ABCD$. На ребре $SB$ отмечена точка $E$, так что $SE : EB = 2 : 1$. На ребре $SD$ отмечена точка $F$, так что $SF : FD = 1 : 2$. Найдите отношение, в котором плоскость $AEF$ делит объём пирамиды.

**Решение:** Проведём через точки $B$, $C$, $D$ соответственно прямые $l_B$, $l_C$, $l_D$, параллельные $AS$. Обозначим через $B'$, $C'$, $D'$ соответственно точки пересечения плоскости $AEF$ с прямыми $l_B$, $l_C$, $l_D$. Тогда $BB' = \frac{1}{2}AS$, $DD' = 2AS$, откуда $CC' = \frac{5}{2}AS$. Пусть $G$ — точка пересечения плоскости $AEF$ с $CS$. Тогда $SG : GC = 2 : 5$. Далее,

$$\mathrm{vol}(AEGFS) = \mathrm{vol}(AEFS) + \mathrm{vol}(EGFS) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\mathrm{vol}(ABDS) + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{7}\cdot\mathrm{vol}(BCDS) =$$
$$= \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{7}\right)\cdot\frac{1}{2}\mathrm{vol}(ABCDS) = \frac{1}{7}\mathrm{vol}(ABCDS).$$

Стало быть, искомое отношение равно $1:6$.

**Ответ:** $1:6$

**7.** Найдите все положительные значения параметра $a$, при которых сумма различных корней уравнения

$$\log_2(ax) + \log_2(1-x) = \cos\left((x - x^2)a\pi\right)$$

максимальна.

**Решение:** Положим $t = a(x - x^2)$. Тогда $0 < t \leqslant a/4$, а уравнение переписывается как

$$\log_2 t = \cos(\pi t).$$

При $t = a/4$ имеем $x = 1/2$. При $0 < t < a/4$ значение $x$ восстанавливается двояко, но при этом сумма этих значений равна 1. Стало быть, сумма корней исходного уравнения равна количеству корней уравнения $\log_2 t = \cos(\pi t)$ в промежутке $(0, a/4)$, к которому прибавляется $1/2$ в том случае, если $t = a/4$ является решением.

Заметим, что $t = 2$ является решением. При этом при $t > 2$ справедливо $\log_2 t > 1 \geqslant \cos(\pi t)$. Таким образом, при $a > 8$ сумма корней исходного уравнения равна количеству $N$ корней уравнения $\log_2 t = \cos(\pi t)$ в промежутке $(0, 2]$. При $a = 8$ эта сумма равна $N - 1/2$. Если же $a < 8$, то сумма не превосходит $N - 1$. Можно показать, что $N = 3$, но это не необходимо.

**Ответ:** $a > 8$

Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

*июль–август 2020 года*

# ВАРИАНТ 206

## ОТВЕТЫ

**1.** 2

**2.** 8

**3.** $x = k\pi/4,\ \pm\pi/12 + k\pi/2,\ k \in \mathbb{Z}$

**4.** $x \leqslant -3/4$

**5.** 1

**6.** $1/\sqrt{3}$

**7.** 1

## РЕШЕНИЯ

**1.** Найдите наибольшее целое число, не превосходящее $\sqrt{\dfrac{4^3+3^4}{3^4-4^3}}$.

**Решение:** $\sqrt{\dfrac{4^3+3^4}{3^4-4^3}} = \sqrt{\dfrac{145}{17}} = \sqrt{8+\dfrac{9}{17}}, \quad 2^2 < 8 + \dfrac{9}{17} < 3^2.$

**Ответ:** 2

**2.** Сумма первых ста членов арифметической прогрессии равна 750. Найдите член этой прогрессии с номером 99, если известно, что второй член этой прогрессии равен 7.

**Решение:** Данная сумма равна $50(a_2 + a_{99})$. Стало быть, $a_{99} = 750/50 - 7 = 8$.

**Ответ:** 8

**3.** Решите уравнение $\sin x \cos 3x = \sin 3x \cos 5x$.

**Решение:**

$$\sin x\cos 3x = \sin 3x\cos 5x \iff \sin 4x - \sin 2x = \sin 8x - \sin 2x \iff$$
$$\iff \sin 4x(\cos 4x - 1/2) = 0 \iff x = k\pi/4,\ \pm\pi/12 + k\pi/2,\ k \in \mathbb{Z}.$$

**Ответ:** $x = k\pi/4,\ \pm\pi/12 + k\pi/2,\ k \in \mathbb{Z}$

**4.** Решите неравенство $2^{\frac{3+5x}{1+2x}} + 2^{\frac{1+3x}{1+2x}} \leqslant 6\sqrt{2}$.

**Решение:** Положим $t = 2^{\frac{x}{1+2x}}$. Тогда

$$2^{\frac{3+5x}{1+2x}} + 2^{\frac{1+3x}{1+2x}} \leqslant 6\sqrt{2} \iff 8t^{-1} + 2t \leqslant 6\sqrt{2} \iff$$
$$\iff (t-\sqrt{2})(t-2\sqrt{2}) \leqslant 0 \iff \sqrt{2} \leqslant t \leqslant 2\sqrt{2} \iff \frac{1}{2} \leqslant \frac{x}{1+2x} \leqslant \frac{3}{2} \iff$$
$$\iff 0 \leqslant \frac{-1}{1+2x} \leqslant 2 \iff 1+2x \leqslant -\frac{1}{2} \iff x \leqslant -\frac{3}{4}.$$

**Ответ:** $x \leqslant -3/4$

**5.** На сторонах $AB$ и $AC$ треугольника $ABC$ отмечены точки $D$ и $E$ соответственно. Точки $B, C, E, D$ лежат на одной окружности. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника $ADC$, если известно, что $\angle CDE = \angle BAC$ и что радиус окружности, описанной около треугольника $ABC$, равен 1.

**Решение:** Заметим, что

$$\angle ABC = \angle DBE + \angle CBE = \angle DCE + \angle CDE = \angle DCE + \angle DAC = 180^\circ - \angle ADC = \angle CDB.$$

Стало быть, $BC = CD$, откуда видим, что радиусы окружностей, описанных около треугольников $ABC$ и $ADC$, равны.

**Ответ:** 1

**6.** Дан куб $ABCDA'B'C'D'$ с основанием $ABCD$ и боковыми рёбрами $AA'$, $BB'$, $CC'$, $DD'$. Найдите расстояние между прямой, проходящей через середины рёбер $AB$ и $AA'$, и прямой, проходящей через середины рёбер $BB'$ и $B'C'$, если ребро куба равно 1.

**Решение:** Заметим, что прямая, проходящая через середины рёбер $AB$ и $AA'$, лежит в плоскости, проходящей через центр куба и перпендикулярной диагонали $DB'$. Прямая же, проходящая через середины рёбер $BB'$ и $B'C'$, лежит в плоскости, проходящей через середины рёбер $BB'$, $B'C'$, $A'B'$, которая также перпендикулярна диагонали $DB'$. При этом эта плоскость делит диагональ $DB'$ в отношении $1:5$. Стало быть, искомое расстояние, равное расстоянию между рассмотренными двумя плоскостями, равно $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)DB' = \sqrt{3}/3 = 1/\sqrt{3}$.

**Ответ:** $1/\sqrt{3}$

**7.** Найдите произведение корней уравнения

$$\sin\frac{x^2+x+1}{2x} + \cos\frac{x^2-x+1}{2x} = \frac{x^2-4x+1}{x}\cdot\cos\frac{\pi-2}{4}.$$

**Решение:** Положим $t = \dfrac{x^2+1}{2x} = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$. Тогда исходное уравнение примет вид

$$\sin\left(t + \frac{1}{2}\right) + \cos\left(t - \frac{1}{2}\right) = 2(t-2)\cos\frac{\pi - 2}{4}.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}\sin(t+1/2) + \cos(t-1/2) &= \sin t(\cos(1/2) + \sin(1/2)) + \cos t(\cos(1/2) + \sin(1/2)) = \\ &= (\sin t + \cos t)(\cos(1/2) + \sin(1/2)) = 2\cos(t - \pi/4)\cos(\pi/4 - 1/2).\end{aligned}$$

Получаем

$$\cos(t - \pi/4) = t - 2.$$

На отрезке $[1, 3]$ функция $\cos(t - \pi/4)$ убывает, ибо $3 < \pi < 4$. Функция же $t - 2$ на этом отрезке возрастает. Следовательно, графики этих функций имеют ровно одну общую точку при некотором $t = t_0$. Поскольку $t_0 > 1$, уравнение $x^2 - 2t_0x + 1 = 0$ имеет два различных корня. Их произведение равно 1.

**Ответ:** 1