Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

ВАРИАНТ 201

1. Известно, что $f(x) = \dfrac{x}{1+x} + \dfrac{1-x}{x} - \dfrac{1}{24}$. Найдите $f\left(\dfrac{3}{5}\right)$.

2. Найдите сумму всех натуральных чисел, не превосходящих 105, которые делятся на 3, но не делятся на 5.

3. Решите уравнение $\operatorname{tg} 2x = 2\cos 2x \operatorname{ctg} x$.

4. Решите неравенство $\log_{2x} 16 - \log_{4x} 8 \leqslant 1$.

5. В равнобедренном треугольнике ABC с равными сторонами AB и BC проведены биссектрисы AD и CE. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB и BC в точках K и L соответственно. Найдите DE, если $AC = 12$ и $KL = 9$.

6. Дана треугольная призма $ABCA'B'C'$ с основанием ABC и боковыми рёбрами AA', BB', CC'. На диагоналях AB', BC', CA' отмечены точки D, E, F соответственно. Найдите отношение, в котором плоскость DEF делит отрезок AA', если $AD : DB' = 1 : 1$, $BE : EC' = 1 : 2$, $CF : FA' = 1 : 3$.

7. Найдите все положительные значения параметра a, при которых уравнение

$$\log_{2-x}\left(a^{2+x} + 2a^{1-x} + x - 1\right) + \log_{2+x}\left(a^{2-x} + 2a^{1+x} - x - 1\right) = 2$$

имеет ровно одно решение (относительно x).

Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

ВАРИАНТ 202

1. Известно, что $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x+4} + \dfrac{1}{x-3} + \dfrac{19}{x}}$. Найдите $f(12)$.

2. Дана возрастающая геометрическая прогрессия $b_1, b_2, b_3, \ldots$, состоящая из положительных чисел. Известно, что сумма первого и третьего членов этой прогрессии равна второму члену, умноженному на 10/3. Найдите отношение $b_6 + b_7 + b_8 + b_9 + b_{10}$ к $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5$.

3. Решите уравнение $\sin x + \cos x = 2\sqrt{2}\sin x \cos x$.

4. Решите неравенство $\log_{\left|2x-\frac{1}{2}\right|}\left(x+1+\dfrac{1}{x}\right) \geqslant \log_{\left|2x-\frac{1}{2}\right|}\left(x^2+1+\dfrac{1}{x^2}\right)$.

5. На высоте AH остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность. Эта окружность пересекает стороны AB и AC в точках D и E соответственно. Найдите отношение $BH : HC$, если $BD : DA = 2 : 1$ и $AE : EC = 3 : 1$.

6. Дан тетраэдр $ABCD$. Известно, что $AB = BC = CD = 5$ и $CA = AD = DB = 6$. Найдите косинус угла между рёбрами BC и AD.

7. Найдите все пары положительных чисел (x, y), удовлетворяющих уравнению

$$\log_{2x^2y+1}(x^4+y^2+1) = \log_{y^4+x^2+1}(2xy^2+1).$$

Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

ВАРИАНТ 203.

1. Найдите целое число, задаваемое выражением:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^2.$$

2. Числа a_1, a_2, a_3, ..., a_{20} образуют арифметическую прогрессию. Известно, что сумма первых десяти членов этой прогрессии равна 9, а сумма последних десяти членов равна 11. Найдите сумму $a_6+a_7+\ldots+a_{14}+a_{15}$.

3. Решите уравнение:

$$\cos x\cdot(2\cos x-\cos 3x)=1.$$

4. Решите неравенство:

$$3^x-2^{x+1}\leqslant\sqrt{2\cdot 9^x-10\cdot 6^x+2^{2x+3}}.$$

5. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C проведены биссектриса AL и высота CH. Найдите косинус угла $\angle BAC$, если $HL\parallel AC$.

6. Дан куб $ABCDA'B'C'D'$ с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA', BB', CC', DD'. Найдите объем многогранника с вершинами, являющимися серединами ребер AB, AD, AA', CC', $C'B'$, $C'D'$, если известно, что ребро куба равно 1.

7. Найдите все значения параметра a из промежутка $[0,2\pi)$, при которых уравнение

$$\sqrt{\frac{3}{2}x^2-xy+\frac{3}{2}y^2}=x\cos a+y\sin a$$

имеет хотя бы одно решение (x,y), отличное от $(0,0)$.

Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

ВАРИАНТ 204

1. Найдите целое число, задаваемое выражением $\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}+\dfrac{2}{\sqrt{5}+1}\right)\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}+\dfrac{2}{\sqrt{5}-1}\right)$.

2. Дана арифметическая прогрессия. Её двадцатый член равен 1, а член с номером 2000 равен 199. Найдите член этой прогрессии с номером 2020.

3. Решите уравнение $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)-\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)+\cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}$.

4. Решите неравенство $\log_x\big(\log_{\sqrt{x}}(10x-4-4x^2)\big)\geqslant\log_{\sqrt{x}}\big(\log_x(10x-4-4x^2)\big)$.

5. Окружность, проходящая через вершины A и B прямоугольника $ABCD$, пересекает сторону BC в точке E, а диагональ AC — в точке F. Найдите площадь четырёхугольника $ABEF$, если $BE=8$, $EC=4$, а точки D, F, E лежат на одной прямой.

6. Дана правильная треугольная пирамида. Известно, что центр сферы, описанной около этой пирамиды, равноудалён от боковых рёбер и от плоскости основания пирамиды. Найдите радиус сферы, вписанной в эту пирамиду, если длина ребра её основания равна 12.

7. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$2x^2y^2+x^2y+xy^2+(1-a)(x^2+y^2)-a(x+y+2)=0$$

имеет ровно одно решение (относительно (x,y)).

Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

ВАРИАНТ 205

1. Найдите целое число, ближайшее к числу $2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)$.

2. Дана геометрическая прогрессия. Её четвёртый член равен 5, а член с номером 54 равен 160. Найдите член этой прогрессии с номером 64.

3. Решите уравнение $9\operatorname{tg}^2 x - 2\cos 2x = 2$.

4. Решите неравенство $8 + \log_{\sqrt{x}} 8 \leqslant 4\log_x \sqrt{17x^2 - 2}$.

5. Произведение оснований трапеции равно 18. Найдите периметр трапеции, если известно, что в неё вписана окружность, а диагонали делят среднюю линию на три равные части.

6. В основании четырёхугольной пирамиды $ABCDS$ лежит параллелограмм $ABCD$. На ребре SB отмечена точка E, так что $SE : EB = 2 : 1$. На ребре SD отмечена точка F, так что $SF : FD = 1 : 2$. Найдите отношение, в котором плоскость AEF делит объём пирамиды.

7. Найдите все положительные значения параметра a, при которых сумма различных корней уравнения

$$\log_2(ax) + \log_2(1-x) = \cos\left((x - x^2)a\pi\right)$$

максимальна.

Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

ВАРИАНТ 206

1. Найдите наибольшее целое число, не превосходящее $\sqrt{\dfrac{4^3+3^4}{3^4-4^3}}$.

2. Сумма первых ста членов арифметической прогрессии равна 750. Найдите член этой прогрессии с номером 99, если известно, что второй член этой прогрессии равен 7.

3. Решите уравнение $\sin x \cos 3x = \sin 3x \cos 5x$.

4. Решите неравенство $2^{\frac{3+5x}{1+2x}} + 2^{\frac{1+3x}{1+2x}} \leqslant 6\sqrt{2}$.

5. На сторонах AB и AC треугольника ABC отмечены точки D и E соответственно. Точки B, C, E, D лежат на одной окружности. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ADC, если известно, что $\angle CDE = \angle BAC$ и что радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 1.

6. Дан куб $ABCDA'B'C'D'$ с основанием $ABCD$ и боковыми рёбрами AA', BB', CC', DD'. Найдите расстояние между прямой, проходящей через середины рёбер AB и AA', и прямой, проходящей через середины рёбер BB' и $B'C'$, если ребро куба равно 1.

7. Найдите произведение корней уравнения

$$\sin\frac{x^2+x+1}{2x} + \cos\frac{x^2-x+1}{2x} = \frac{x^2-4x+1}{x}\cdot\cos\frac{\pi-2}{4}.$$