

Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

июль 2013 года

1. Старший коэффициент квадратного трехчлена $f(x)$ равен 2. Один из его корней равен $5/2$. Найдите второй корень, если известно, что $f(0) = 3$.

2. Вычислите $\log_5 27 \cdot \log_9 5$.

3. Решите неравенство

$$12(3 + 3^{-2x})^{-\frac{1}{2}} - (3^{1+2x} + 1)^{\frac{1}{2}} \geq 4 \cdot 3^{\frac{x}{2}}.$$

4. Решите уравнение

$$\frac{\cos 3x}{\sin 2x} + \frac{\sin 3x}{\cos 2x} = \frac{\sin 2x}{\cos 3x} + \frac{\cos 2x}{\sin 3x}.$$

5. В 14:00 из села Верхнее вниз по течению реки в сторону села Нижнее отправился катер “Быстрый”. Когда до Нижнего оставалось плыть 500 метров, ему навстречу из Нижнего вышел катер “Смелый”. В этот же самый момент “Быстрый”, не желая встречи со “Смелым”, развернулся и пошел обратно к Верхнему. В 14:14, когда расстояние по реке от “Быстрого” до Верхнего сравнялось с расстоянием по реке от “Смелого” до “Быстрого”, на “Смелом” осознали, что они идут с “Быстрым” на одинаковой скорости, развернулись и направились обратно к Нижнему. В исходные пункты катера вернулись одновременно в 14:18. Найдите расстояние по реке между Верхним и Нижним, если известно, что оба катера движутся равномерно и с одинаковой собственной скоростью.

6. Трапеция $KLMN$ вписана в окружность радиуса R и описана около окружности радиуса r . Найдите r , если $R = 20$, а косинус угла между диагональю KM и основанием KN равен $4/5$.

7. В основании прямой призмы $ABCA'B'C'$ лежит прямоугольный треугольник ABC , такой что $AC = BC = 1$. На ребре $A'C'$ верхнего основания (параллельном AC) отмечена точка D , так что $A'D : DC' = 2 : 1$. Найдите радиус сферы, вписанной в тетраэдр $AB'CD$, если высота призмы равна 1.

8. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$\cos(x + a \ln|x|) = x - 1$$

имеет бесконечно много решений.