

Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

июль 2013 года

1. Старший коэффициент квадратного трехчлена $f(x)$ равен 2. Один из его корней равен $5/2$. Найдите второй корень, если известно, что $f(0) = 3$.

2. Вычислите $\log_{16} 6 \cdot \log_6 8$.

3. Решите неравенство

$$15(4 + 4^{-2x})^{-\frac{1}{2}} - (4^{1+2x} + 1)^{\frac{1}{2}} \geq 20^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{\frac{x}{2}}.$$

4. Решите уравнение

$$\frac{\sin 3x}{\sin x} + \frac{\cos 3x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\sin 3x} + \frac{\cos x}{\cos 3x}.$$

5. От биостанции до границы заповедника вверх по реке ровно 14 км. В 7:00 браконьеры вошли на катере в заповедник и направились в сторону биостанции. Через некоторое время им навстречу с биостанции вышел катер рыбинспекции. Браконьеры тут же развернулись и направились обратно к границе заповедника. В 7:38, когда браконьеры оказались ровно посередине между рыбинспекторами и границей, рыбинспекторы осознали, что они идут с браконьерами на одинаковой скорости, развернулись и направились обратно на биостанцию. До биостанции они добрались ровно в тот момент, когда браконьеры выехали за пределы заповедника — в 7:50. Найдите наименьшее расстояние, на котором находились браконьеры и рыбинспекторы, если известно, что оба катера движутся равномерно и с одинаковой собственной скоростью.

6. Трапеция $KLMN$ вписана в окружность радиуса R и описана около окружности радиуса r , причем $R = \frac{3}{2}r$. Найдите среднюю линию трапеции, если диагональ KM равна 3.

7. В основании прямой призмы $KLMK'L'M'$ лежит прямоугольный треугольник KLM , такой что $KM = LM = 1$. На ребре $K'L'$ верхнего основания (параллельном KL) отмечена точка N , так что $K'N : NL' = 1 : 3$. Найдите радиус сферы, вписанной в тетраэдр $KLM'N$, если высота призмы равна 1.

8. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$\sin\left(x + \frac{a}{x}\right) = x + 1$$

имеет бесконечно много решений.