

Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

июль 2013 года

1. Старший коэффициент квадратного трехчлена $f(x)$ равен -3 . Один из его корней равен $7/3$. Найдите второй корень, если известно, что $f(0) = 4$.

2. Вычислите $\log_8 10 \cdot \log_{10} 4$.

3. Решите неравенство

$$\frac{9}{2} \left(1 + 2^{1-2x}\right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \left(2^{2x} + 2\right)^{\frac{1}{2}} \geq 3^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{x}{2}}.$$

4. Решите уравнение

$$\frac{\sin 5x}{\sin x} - \frac{\cos 5x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\sin 5x} - \frac{\cos x}{\cos 5x}.$$

5. От биостанции до границы заповедника вниз по реке ровно 8 км. В 8:00 браконьеры вошли на катере в заповедник и направились в сторону биостанции. В это же время им навстречу с биостанции вышел катер с рыбинспекторами. Через 6 минут, когда рыбинспекторы были ровно посередине между биостанцией и браконьерами, браконьеры заметили катер рыбинспекции, тут же развернулись и направились обратно к границе заповедника. Когда браконьеры достигли границы, рыбинспекторы с чувством выполненного долга развернулись и отправились обратно на биостанцию, куда прибыли в 08:25. Найдите наименьшее расстояние, на котором находились браконьеры от рыбинспекторов, если известно, что оба катера движутся равномерно и с одинаковой собственной скоростью.

6. Трапеция $KLMN$ вписана в окружность радиуса R и описана около окружности радиуса r . Найдите r , если $R = 20$, а косинус угла между диагональю KM и основанием KN равен $4/5$.

7. В основании прямой призмы $ABCA'B'C'$ лежит прямоугольный треугольник ABC , такой что $AC = BC = 1$. На ребре $A'B'$ верхнего основания (параллельном AB) отмечена точка D , так что $A'D : DB' = 1 : 2$. Найдите радиус сферы, вписанной в тетраэдр $ABC'D$, если высота призмы равна 1.

8. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$\sin(x - a \ln|x|) = x + 1$$

имеет бесконечно много решений.