Вступительный экзамен по математике
для поступающих в магистратуру
механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова
по направлениям «Математика», «Математика и компьютерные науки»,
«Механика и математическое моделирование»
2017 год

Вариант 2017-06-21

1. Вычислите предел
$$\lim_{x\to 1} \frac{x^4 - 3x + 2}{x^5 - 4x + 3}.$$

2. Найдите общее решение системы дифференциальных уравнений
$$\begin{cases} \dot{x} = x - y - z, \\ \dot{y} = x + y, \\ \dot{z} = 3x + z. \end{cases}$$

3. Изобразите множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию
$$\frac{|z + 2i|}{|z - i|} \geqslant 2,$$
где z – комплексная переменная, i – мнимая единица.

4. Вычислите объем тела вращения, образованного вращением вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной гиперболой $y = \dfrac{4}{x}$, осью абсцисс, и прямыми $x = 1$ и $x = 4$.

5. Определите координаты центра и радиус окружности
$$x^2 + y^2 + z^2 - 12x + 4y - 6z + 24 = 0, \quad 2x + 2y + z + 1 = 0.$$

6. Вычислите ранг матрицы Q для всех значений параметра q
$$Q = \begin{pmatrix} 3+q & 3 & -6 \\ 3 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1+q \end{pmatrix}.$$

7. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды имеет постоянную заданную длину и составляет с плоскостью основания угол α. При каком значении угла α объем пирамиды является наибольшим?

Экзамен по направлению "Математика"

для поступающих в магистратуру

Вариант 01

2017 год

1. Найдите все предельные точки последовательности

$$x_n = \cos\frac{\pi n}{2}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n, \qquad n\in\mathbb{N}.$$

2. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} \dfrac{x^2y-4x-4xy+16}{\sqrt{8-y}} = 0, \\ y = ax \end{cases}$$

имеет ровно два решения?

3. Найдите множество сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^{2n}+1}, \qquad x\in\mathbb{R}.$$

4. Определите тип кривой второго порядка, заданной в полярных координатах уравнением

$$r\sin^2(\varphi/2) = 1.$$

5. Вычислите интеграл

$$\int_{|z-1|=2}\frac{\operatorname{tg} z}{z}\,dz, \qquad z\in\mathbb{C}$$

(окружность $|z-1|=2$ ориентирована против часовой стрелки).

6. Найдите коэффициенты разложения вектора $\vec{x}$ по базису $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, если $\vec{x} = (0,0,1)$, $\vec{e}_1 = (1,1,-1)$, $\vec{e}_2 = (1,0,1)$, $\vec{e}_3 = (1,1,0)$.

7. Функция $x(t)$ задана на отрезке $[0,T]$ условиями

$$x'' + x = u, \qquad x(0)=0, \quad x'(0)=1, \quad x(T)=0,$$

где u — константа. При каком значении параметра $u\in[-1,1]$ величина $T>0$ будет минимальной?

8. Точки A и B движутся с постоянными (различными) скоростями по окружностям, образованным пересечением сферы радиуса 1 с плоскостями α и β соответственно. Известно, что обе плоскости проходят через центр сферы и перпендикулярны друг другу. Какое наибольшее значение может принимать длина вектора $\overrightarrow{AB}$, если в начальный момент времени $A=B$, точка A делает полный оборот за время $t=2/3$, а точка B — за время $t=2$?

Экзамен по направлению "Математика"

для поступающих в магистратуру

Вариант 02

2017 год

1. Найдите все предельные точки последовательности

$$x_n = \sin\frac{\pi n}{2}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^n, \qquad n\in\mathbb{N}.$$

2. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases}\dfrac{3y^2x+6xy-4y-8}{\sqrt{4+x}}=0,\\ x=ay\end{cases}$$

имеет ровно два решения?

3. Найдите множество сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{x^{2n}+1}, \qquad x\in\mathbb{R}.$$

4. Определите тип кривой второго порядка, заданной в полярных координатах уравнением

$$r^2(\sin 2\varphi+\cos 2\varphi+2)=8.$$

5. Вычислите интеграл

$$\int_{|z+1|=3} z\operatorname{ctg} z\,dz, \qquad z\in\mathbb{C}$$

(окружность $|z+1|=3$ ориентирована против часовой стрелки).

6. Найдите коэффициенты разложения вектора $\vec{x}$ по базису $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$, если $\vec{x}=(1,0,0)$, $\vec{e}_1=(0,1,1)$, $\vec{e}_2=(1,0,-1)$, $\vec{e}_3=(-1,1,0)$.

7. Функция $x(t)$ задана на отрезке $[0,T]$ условиями

$$x''-x+u=0, \qquad x(0)=1, \quad x'(0)=0, \quad x(T)=0,$$

где u — константа. При каком значении параметра $u\in[0,2]$ величина $T>0$ будет минимальной?

8. Точки A и B движутся с постоянными (различными) скоростями по окружностям, образованным пересечением сферы радиуса 1 с плоскостями α и β соответственно. Известно, что обе плоскости проходят через центр сферы и перпендикулярны друг другу. Какое наименьшее значение может принимать длина вектора $\overrightarrow{AB}$, если в начальный момент времени это расстояние равно 2, точка A делает полный оборот за время $t=1$, а точка B — за время $t=1/3$?

Экзамен по направлению "Математика"

для поступающих в магистратуру

Вариант 03

2017 год

1. Найдите верхний предел $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$ и нижний предел $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$ последовательности

$$x_n = \cos\frac{\pi n}{3} + \frac{\sqrt{4n^2-2}}{n+1}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

2. При каком значении параметра a вектор $\vec{l}\{3+a, 2a\}$ сонаправлен с вектором $\overrightarrow{BL}$, где $B(-1,-1)$, $A(1,0)$, $C(2,-7)$, BL — биссектриса угла ABC?

3. Найдите все точки $\lambda \in \mathbb{R}$, при которых определено классическое преобразование Фурье $\hat{f}(\lambda) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\lambda x}dx$ функции

$$f(x) = \frac{e^{3ix}}{\sqrt[4]{x^4+2}}.$$

4. Напишите уравнение касательной прямой в точке $M(1,1)$ к кривой, заданной на плоскости $\mathbb{R}^2$ уравнением

$$x^3 + y^3 + xy = 3.$$

5. Выпишите ряд Лорана $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n z^n$ функции

$$w = \frac{1}{z^2+2z}$$

комплексного переменного z, сходящийся в точке $z_0 = 3$.

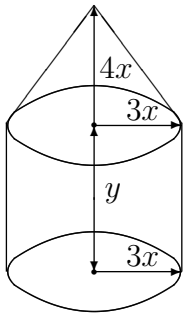
6. Найдите матрицу X такую, что $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Функции $x(t)$, $y(t)$ заданы при $t \geqslant 0$ условиями

$$\begin{cases} x' = x+1, \\ y' = 2x - y, \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0) = x_0, \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Найдите все пары вещественных чисел (x_0, y_0), при которых обе функции $x(t)$ и $y(t)$ имеют конечные пределы $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t)$ и $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t)$.

8. Домик состоит из прямого кругового цилиндра с радиусом $3x$ и высотой y и крыши, имеющей форму прямого кругового конуса с радиусом $3x$ и высотой $4x$. Необходимо спроектировать домик общего объема $V = 48\pi$ м^3 при условии $y \geqslant 4x$, имеющий минимальную площадь боковой поверхности (поверхность, составленная из боковой поверхности цилиндра и боковой поверхности конуса). Найдите значения параметров x и y.



Экзамен по направлению "Математика"

для поступающих в магистратуру

Вариант 04

2017 год

1. Найдите верхний предел $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$ и нижний предел $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$ последовательности

$$x_n = \sin\frac{\pi n}{4} + \frac{\sqrt{9n^2-5}}{n+3}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

2. При каком значении параметра a вектор $\vec{l}\{3a, 2-a\}$ сонаправлен с вектором $\overrightarrow{BL}$, где $B(2,2)$, $A(0,6)$, $C(8,5)$, BL — биссектриса угла ABC?

3. Найдите все точки $\lambda \in \mathbb{R}$, при которых определено классическое преобразование Фурье $\hat{f}(\lambda) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\lambda x}dx$ функции

$$f(x) = \frac{e^{2ix}}{\sqrt{x^2+1}}.$$

4. Напишите уравнение касательной прямой в точке $M(-1,-1)$ к кривой, заданной на плоскости $\mathbb{R}^2$ уравнением

$$x^3 + y^3 - xy = -3.$$

5. Выпишите ряд Лорана $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n z^n$ функции

$$w = \frac{1}{z^3 - 3z^2}$$

комплексного переменного z, сходящийся в точке $z_0 = 4$.

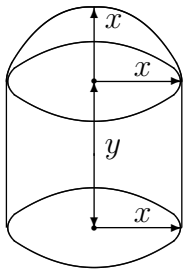
6. Найдите матрицу X такую, что $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$.

7. Функции $x(t)$, $y(t)$ заданы при $t \leqslant 0$ условиями

$$\begin{cases} x' = x + 4y, \\ y' = -y + 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0) = x_0, \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Найдите все пары вещественных чисел (x_0, y_0), при которых обе функции $x(t)$ и $y(t)$ имеют конечные пределы $\lim\limits_{t\to-\infty} x(t)$ и $\lim\limits_{t\to-\infty} y(t)$.

8. Домик состоит из прямого кругового цилиндра с радиусом x и высотой y и крыши, имеющей форму полусферы с радиусом x. Необходимо спроектировать домик общего объема $V = 45\pi$ м^3 при условии $y \geqslant x$, имеющий минимальную площадь боковой поверхности (поверхность, составленная из боковой поверхности цилиндра и полусферы). Найдите значения параметров x и y.



Экзамен по направлению "Математика"

для поступающих в магистратуру

Вариант 05

2017 год

1. Найдите верхний предел $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$ и нижний предел $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$ последовательности

$$x_n = \operatorname{tg}\frac{\pi + 2\pi n}{4} - \frac{3n-1}{\sqrt{n^2+2}}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

2. При каком значении параметра a вектор $\vec{l}\{2a, a-4\}$ сонаправлен с вектором $\overrightarrow{BL}$, где $B(1,1)$, $A(-1,-2)$, $C(7,-3)$, BL — биссектриса угла ABC?

3. Найдите все точки $\lambda \in \mathbb{R}$, при которых определено классическое преобразование Фурье $\hat{f}(\lambda) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx$ функции

$$f(x) = \frac{e^{ix}}{\sqrt[6]{x^6+3}}.$$

4. Напишите уравнение касательной прямой в точке $M(1,-1)$ к кривой, заданной на плоскости $\mathbb{R}^2$ уравнением

$$y^3 - x^3 + xy = -3.$$

5. Выпишите ряд Лорана $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n z^n$ функции

$$w = \frac{z^2}{z-4}$$

комплексного переменного z, сходящийся в точке $z_0 = -8$.

6. Найдите матрицу X такую, что $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

7. Функции $x(t)$, $y(t)$ заданы при $t \leqslant 0$ условиями

$$\begin{cases} x' = x - 3y, \\ y' = 2y + 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0) = x_0, \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Найдите все пары вещественных чисел (x_0, y_0), при которых обе функции $x(t)$ и $y(t)$ имеют конечные пределы $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t)$ и $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t)$.

8. Домик состоит из прямой правильной четырехугольной призмы со стороной основания $3x$ и высотой y и крыши, имеющей форму правильной четырехугольной пирамиды с высотой $2x$. Необходимо спроектировать домик общего объема $V = 264\,\text{м}^3$ при условии $y \geqslant 3x$, имеющий минимальную площадь боковой поверхности (поверхность, составленная из боковых поверхностей призмы и пирамиды). Найдите значения параметров x и y.