

Вступительный экзамен по математике
для поступающих в магистратуру
механико-математического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова
по направлениям «Математика», «Математика и компьютерные науки», «Механика и
математическое моделирование»
2015 год

Вариант 2015-06-23

1. Найдите предел функции

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$

2. Вычислите производную функции

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}} + \frac{1}{x + 1}$$

и значение этой производной при $x = 1$.

3. Найдите $\min |3 + 2i - z|$ внутри круга $|z| \leq 1$.

4. Вычислите неопределенный интеграл:

$$\int (5x^2 + 1)e^{2x} dx.$$

5. Найдите угол между плоскостями

$$x - 2y + 2z - 8 = 0, \quad x + z - 6 = 0.$$

6. Решите дифференциальное уравнение

$$y'' - 2y' + y = 6xe^x.$$

7. Решите в натуральных числах уравнение

$$x! - 1 = y^2.$$

**Вступительный экзамен по математике
для поступающих в магистратуру
механико-математического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова
по направлениям «Математика», «Математика и компьютерные науки»,
«Механика и математическое моделирование»
2015 год**

Вариант 2015-07-15-1

1. Пусть последовательность x_n ($n = 1, 2, \dots$) сходится, а последовательность y_n ($n = 1, 2, \dots$) расходится. Что можно утверждать о сходимости последовательностей:

а) $x_n + y_n$; б) $x_n y_n$?

Приведите соответствующие примеры.

2. Найдите наименьший модуль комплексного числа, удовлетворяющего условию

$$|z + \sqrt{3}| = |z - i|.$$

3. Найдите предел функции

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}.$$

4. Для дифференциального уравнения

$$\ddot{x} + 4x = 0$$

нарисуйте траектории на фазовой плоскости, укажите направление движения. По рисунку сделайте вывод о поведении решений при $t \rightarrow +\infty$.

5. Вычислите сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}.$$

6. Вычислите определитель порядка $2n$

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & \dots & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & b & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & b & \dots & a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & \dots & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

7. Можно ли утверждать, что две случайные величины x и y зависимы, если они коррелированы?
Ответ поясните.

8. Найдите наименьшее значение функции $y = \sqrt{x^2 + 6x + 25} + \sqrt{x^2 - 10x + 29}$.

9. Решите в натуральных числах уравнение

$$4x^2 + 12xy + 5y^2 = 2015.$$

**Вступительный экзамен по математике
для поступающих в магистратуру
механико-математического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова
по направлениям «Математика», «Математика и компьютерные науки»,
«Механика и математическое моделирование»
2015 год**

Вариант 2015-07-15-2

1. Пусть последовательности x_n и y_n ($n = 1, 2, \dots$) расходятся. Можно ли утверждать, что последовательности:

а) $x_n + y_n$; б) $x_n y_n$
также расходятся? Приведите соответствующие примеры.

2. Из всех комплексных чисел, удовлетворяющих условию $z \cdot \bar{z} = 41$, найдите такие, для которых сумма $|z - 9| + |z - 9i|$ принимает наименьшее значение.

3. Найдите предел функции

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}}{x^4}.$$

4. Для дифференциального уравнения

$$\ddot{x} - x = 0$$

нарисуйте траектории на фазовой плоскости, укажите направление движения. По рисунку сделайте вывод о поведении решений при $t \rightarrow +\infty$.

5. Вычислите сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}.$$

6. Вычислите определитель порядка $n \geq 2$

$$\begin{vmatrix} x & y & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x & y \\ y & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & x \end{vmatrix}$$

7. Можно ли утверждать, что две случайные величины x и y коррелированы, если они зависимы?
Ответ поясните.

8. Найдите наименьшее значение функции $y = \sqrt{x^2 + 8x + 20} + \sqrt{x^2 - 16x + 73}$.

9. Решите в целых числах уравнение

$$2^x - 2^y - 1 = 2015.$$

**Вступительный экзамен по математике
для поступающих в магистратуру
механико-математического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова
по направлениям «Математика», «Математика и компьютерные науки»,
«Механика и математическое моделирование»
2015 год**

Вариант 2015-07-21-3

1. Пусть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0.$$

Следует ли отсюда, что

$$\text{либо } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0, \text{ либо } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0?$$

2. Найдите линию на комплексной плоскости, которую образует точка z^2 , если точка z последовательно обходит стороны квадрата с вершинами $-1 - i, 2 - i, 2 + 2i, -1 + 2i$.

3. Найдите предел функции

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{x}{x+1} \right).$$

4. Для дифференциального уравнения

$$\ddot{x} + \dot{x} = 1$$

нарисуйте траектории на фазовой плоскости, укажите направление движения. По рисунку сделайте вывод о поведении решений при $t \rightarrow +\infty$.

5. Вычислите сумму ряда

$$x - 4x^2 + 9x^3 - 16x^4 + \dots$$

6. Вычислите определитель порядка $n \geq 2$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix}$$

7. Случайная величина X принимает значения $\{0; 1; -1\}$ с вероятностями $\{1/3; 1/2; 1/6\}$ соответственно. Вычислите коэффициент корреляции ρ_{xx^2} .

8. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$|x^2 + 2x - 3| - 2a = |x - a| + 3$$

имеет ровно три различных корня.

9. Решите в целых числах уравнение

$$x^2 + 10xy - 5^y = 3.$$

**Вступительный экзамен по математике
для поступающих в магистратуру
механико-математического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова
по направлению «Механика и математическое моделирование»
2015 год
Вариант 2015-08-04-4**

1. Пусть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$$

и $y_n, n = 1, 2, \dots$ – произвольная последовательность. Можно ли утверждать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0?$$

Ответ поясните.

2. Изобразите множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию

$$\operatorname{Re} \frac{2}{\bar{z} + 1} < 1.$$

3. Вычислите значение производной функции

$$f(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$$

при значении независимой переменной $x = \pi/2$.

4. Для дифференциального уравнения

$$\ddot{x} - \dot{x} = 1$$

изобразите траектории на фазовой плоскости, укажите направление движения. По рисунку сделайте вывод о поведении решений при $t \rightarrow +\infty$.

5. Вычислите сумму ряда

$$x + 2x^2 + 3x^3 + \dots$$

6. Вычислите определитель порядка $n \geq 2$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

7. Компоненты случайных векторов $x = (x_1, x_2)^T$ и $y = (y_1, y_2)^T$ связаны преобразованием вращения:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \cos \alpha + x_2 \sin \alpha, \\ y_2 = -x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha, \end{cases} M[\overset{\circ}{x} \overset{\circ}{x}^T] = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

При каком значении α компоненты вектора y будут некоррелированы?

8. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x - 4 \sin z)^2 + (y + 4 \cos z)^2 = 1, \\ |x| + |y| = a. \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x; y; z)$.

9. Решите в целых числах уравнение

$$3^x = y^2 + 1.$$

**Вступительный экзамен по математике
для поступающих в магистратуру
механико-математического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова
по направлениям «Математика», «Математика и компьютерные науки»,
«Механика и математическое моделирование»
2015 год
Вариант 2015-08-29-5**

1. Существует ли предел последовательности $\{a_n\}$, где

$$a_n = \frac{\sin n}{n} ?$$

Если существует, то чему он равен?

2. Изобразите множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию

$$\operatorname{Im} \frac{2}{z-1} \leq -1.$$

3. Вычислите значение производной функции

$$f(x) = \cos^2 3x$$

при значении независимой переменной $x = \pi/12$.

4. Решите дифференциальное уравнение

$$y'' - 2y' - 3y = e^{4x}.$$

5. Исследуйте ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

на сходимость.

6. Вычислите определитель порядка $n \geq 2$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

7. Компоненты векторов $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ и $y = (y_1, y_2)^T$ связаны преобразованием:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3, \\ y_2 = x_1 - 2x_2 + x_3, \end{cases} \quad M[\overset{\circ}{x} \overset{\circ}{x}^T] = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \overset{\circ}{x} = x - M[x].$$

Определите момент корреляции $K_{y_1 y_2}$.

8. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-5)^2 = 9, \\ y = |x-a| + 2 \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

9. Может ли произведение всех цифр десятичной записи натурального числа равняться 2015?