

**Вариант 111**  
**вступительный экзамен по МАТЕМАТИКЕ**  
**для поступающих в магистратуру**  
**механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова**  
**по направлениям «Математика» и «Математика и компьютерные науки»**

1. Найдите предел последовательности и доказать  $1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2^2}, 1\frac{1}{2^3}, \dots, 1\frac{1}{2^n}, \dots$
2. Вычислите производную функции  $u(x) = (\ln x)^{\operatorname{arctg} x}$
3. Вычислите интеграл
$$\int \frac{9x^3 + 25x^2 + 14x + 16}{(x+1)(x-2)(3x^2+2x+2)} dx.$$
4. При каких значениях действительных параметров  $a$  и  $b$ , функция  $y = e^{-x}$  является устойчивым по Ляпунову решением дифференциального уравнения  $y''' + ay'' + by' + y = 0$ , но не является асимптотически устойчивым?
5. Найдите формулу общего члена последовательности, заданной рекуррентно
$$a_1 = 2, a_2 = 5, a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}, n > 2.$$
6. Исследуйте на сходимость и на равномерную сходимость ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^4}{n+x+1} \operatorname{arctg} \left( \frac{x^2}{\sqrt{n}} \right)$$
  - a) на  $E_1 = (0; 1)$ ;
  - b) на  $E_2 = (1; +\infty)$ .
7. Пусть  $A = (a_{ij})$  матрица  $n \times n$  ранга  $n - 1$ . Найдите ранг матрицы  $\tilde{A} = (A_{ij})$ , составленной из алгебраических дополнений до элементов  $a_{ij}$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ;  $j = 1, 2, 3, \dots, n$ .

**Вариант 112**  
**вступительный экзамен по МАТЕМАТИКЕ**  
**для поступающих в магистратуру**  
**механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова**  
**по направлениям «Математика» и «Математика и компьютерные науки»**

1. Найдите предел последовательности

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n} - \frac{2}{n} + \frac{3}{n} - \dots + \frac{(-1)^{(n-1)} n}{n} \right|.$$

2. Вычислите производную функции  $y(x) = \ln(\cos^2 x + \sqrt{1 + \cos^4 x})$ .

3. Вычислите интеграл

$$\int \sin x e^{2x} dx.$$

4. Известно, что функция  $y = x + x^4$  является решением однородного дифференциального уравнения  $y' = f(y/x)$ . Найти функцию  $f(z)$  и решить это уравнение.

5. Найдите формулу общего члена последовательности  $\{a_n\}$ , заданной рекуррентно:

$$a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + 8n.$$

Ответ обоснуйте.

6. Исследуйте на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \left( \frac{n+1}{3n+2} \right)^n.$$

7. Найдите угол между двумя различными касательными, проведёнными из точки с координатами  $(1, 2)$  к эллипсу, заданному уравнением

$$x^2 + xy + 2y^2 = 1.$$

**Вариант 113**  
**вступительный экзамен по МЕХАНИКЕ**  
**для поступающих в магистратуру**  
**механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова**  
**по направлению «Механика и математическое моделирование»**

1. Вычислите предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{(x^2 + 1)} - 1}{x^2}.$$

2. Вычислите зависимость скорости материальной точки от времени, движущейся вдоль прямой по закону  $x(t) = (\ln t)^{\operatorname{arctg} t}$

3. Из семейства кривых

$$\int \frac{9x^3 + 25x^2 + 14x + 16}{(x+1)(x-2)(3x^2 + 2x + 2)} dx.$$

найдите интегральную кривую, проходящую через начало координат.

4. При каких значениях параметра  $\gamma > 0$  устойчивое положение равновесия уравнения Ньютона с трением

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} = 1 - x^2$$

будет фокусом на фазовой плоскости  $(x, \dot{x})$ ?

5. Материальная точка движется по плоскости по закону  $x(t) = 36 + 75t - 4t^3$ ,  $y(t) = -4t$ . Найдите перемещение, пройденный путь и модуль изменения скорости точки за третью секунду после начала движения  $t = 0$ . Здесь  $t$  измеряется в секундах, а  $x$  и  $y$  — в метрах.

6. С одной и той же наклонной плоскости с одинаковой высоты скатываются без проскальзывания два тела — сплошной диск и обруч одинаковой массы и одинакового радиуса. Сравните скорости этих тел у основания наклонной плоскости.

7. Старый рыбак, на небольшой лодке с мачтой кружил по озеру по гладкой замкнутой траектории с постоянной по модулю скоростью  $v$ . Клема практически не было, и рыбак сосредоточил свое внимание на поведении флагшка на мачте. За время полного оборота флагшток несколько раз показывал на север, несколько раз на восток, а все остальное время — между этими направлениями. Рыбаку сначала показалось это удивительным, но, немного подумав, он пришел к выводу, что такое может быть лишь при единственном варианте величины и направления скорости ветра. Найдите величину и направление скорости ветра.

**Вариант 114**  
**вступительный экзамен по МЕХАНИКЕ**  
**для поступающих в магистратуру**  
**механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова**  
**по направлению «Механика и математическое моделирование»**

1. Вычислите предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{2n-1}{2^n} \right).$$

2. Вычислите зависимость скорости материальной точки от времени, движущейся вдоль прямой по закону  $x(t) = \ln(\cos^2 t + \sqrt{1 + \cos^4 t})$ .

3. Вычислите интеграл

$$\int \sin x e^{2x} dx.$$

4. Решите систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y - z \\ \dot{y} = x + y \\ \dot{z} = 3x + z \end{cases}$$

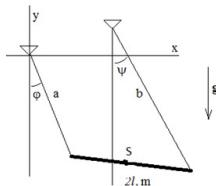
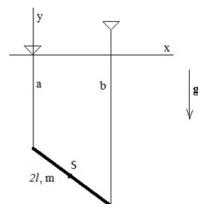
5. Найдите все положения равновесия системы

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -y_1^2 + y_2, \\ \dot{y}_2 = -\ln(1 - y_1 + y_1^2) + \ln 3. \end{cases}$$

Определите, какие устойчивы, а какие нет.

6. Шарик массой 10 г падает с большой высоты без начальной скорости. Численное значение силы сопротивления среды в ньютонах определяется формулой  $|F| = 10^{-3}V^2$ , где  $V$  — значение модуля скорости тела в метрах в секунду. Вычислите приближенно, за какое время шарик пройдет первый сантиметр и первый километр пути? Принимаемые предположения обоснуйте.

7. Отрезок массы  $m$  и длины  $2l$  подведен за концы на невесомых нитях с длинами  $a$  и  $b$  в однородном поле тяжести так, что в положении равновесия нити вертикальны (см. рис.). Найдите частоту малых колебаний отрезка около положения равновесия в вертикальной плоскости.



**Вариант 115**  
**вступительный экзамен по МЕХАНИКЕ**  
**для поступающих в магистратуру**  
**механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова**  
**по направлению «Механика и математическое моделирование»**

1. Вычислите предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} \right).$$

2. Вычислите зависимость скорости материальной точки от времени, движущейся вдоль прямой по закону

$$x(t) = x \operatorname{arctg} t - \frac{1}{2} \ln(1 + t^2) - \frac{1}{2} (\operatorname{arctg} t)^2.$$

3. Вычислите интеграл

$$\int \frac{dx}{x(1+x)(1+x+x^2)}.$$

4. Решите систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - y - z, \\ \dot{y} = x + 2y - z, \\ \dot{z} = x - y + 2z. \end{cases}$$

5. Найдите все положения равновесия системы

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \ln(2 - y_2^2), \\ \dot{y}_2 = e^{y_1} - e^{y_2}. \end{cases}$$

Определите, какие устойчивы, а какие нет.

6. На нити, перекинутой через блок, подвешены два груза различных масс  $m_1$  и  $m_2$ . Найдите ускорение центра масс этой системы. Массами блока и нити можно пренебречь.

7. В сплошном цилиндре радиуса  $R$  параллельно его оси на расстоянии  $R/2$  от нее просверлено круглое отверстие радиуса  $R/2$ . Цилиндр лежит на доске, которую медленно поднимают за один конец. Найдите предельное значение угла наклона доски, при котором цилиндр еще будет находиться в равновесии, при условии, что коэффициент трения цилиндра о доску равен  $k = 0,2$ .