Вступительный экзамен по математике для поступающих в магистратуру МГУ имени М. В. Ломоносова по направлениям «Математика», «Математика и компьютерные науки», «Механика и математическое моделирование»
2023 год

Вариант 2023-06-23

1. Найдите вторую производную функции $f(x) = e^{e^{e^x}}$.

   Ответ: $e^{e^{e^x}} e^{e^x} e^x (e^{e^x} e^x + e^x + 1)$.

   Решение: $\left(e^{e^{e^x}}\right)' = e^{e^{e^x}} \cdot \left(e^{e^x}\right)' = e^{e^{e^x}} \cdot e^{e^x} \cdot e^x$ Дифференцируем ещё раз:
   $$(e^{e^{e^x}} \cdot e^{e^x} \cdot e^x)' = (e^{e^{e^x}})'(e^{e^x} e^x) + e^{e^{e^x}} (e^{e^x} e^x)' =$$
   $$= e^{e^{e^x}} e^{e^x} e^x \cdot e^{e^x} e^x + e^{e^{e^x}} (e^{e^x} e^x \cdot e^x + e^{e^x} e^x) =$$
   $$= e^{e^{e^x}} e^{e^x} e^x (e^{e^x} e^x + e^x + 1).$$

2. Найдите определённый интеграл функции $f(x) = x^5 - 5x^3 - 5x^2 + 1$ от её наименьшей точки экстремума до наибольшей.

   Ответ: $-20\frac{2}{3}$

   Решение: Ищем экстремумы, для чего находим производную:
   $$f'(x) = 5x^4 - 15x^2 - 10x = 5x(x^3 - 3x - 2) = 5x(x^3 - 4x + x - 2) = 5x(x(x^2 - 4) + (x - 2)) =$$
   $$5x(x-2)(x(x+2)+1) = 5x(x-2)(x+1)^2.$$
   Производная равна нулю в точках $-1, 0, 2$, но знак меняет только в 0 и 2. Точка -1 не точка экстремума, поэтому интеграл надо брать от 0 до 2.
   $$\int_0^2 x^5 - 5x^3 - 5x^2 + 1\,dx = \frac{x^6}{6} - \frac{5x^4}{4} - \frac{5x^3}{3} + x\Big|_0^2 =$$
   $$= \frac{64}{6} - \frac{5 \cdot 16}{4} - \frac{5 \cdot 8}{3} + 2 = 10\frac{2}{3} - 20 - 13\frac{1}{3} + 2 = -20\frac{2}{3}.$$

3. Найдите предел последовательности $\{z_n\}$, заданной рекуррентно: $z_n = z_{n-1}^3 + 1$, $z_0 = 1 + i$.

   Ответ: ∞.

   Решение: Посмотрим на модули чисел. Можно оценить, что
   $$|z_{i-1}|^3 - 1 \leqslant |z_i| \leqslant |z_{i-1}|^3 + 1.$$
   То есть, если $|z_i| > \alpha$, где $\alpha^3 - 1 = \alpha$ (α — точка пересечения кубической параболы и прямой $y = x$), то можно утверждать, что в дальнейшем $|z_i|$ устремятся к бесконечности. Модуль $|z_0| = \sqrt{2}$. Так как $2\sqrt{2} - 1 > \sqrt{2}$, то это значит, что $|z_i| > \alpha$, модули $|z_i|$ неограниченно растут, и поэтому предел равен бесконечности.

4. На окружности $x^2 + y^2 = 1$ наугад выбирается точка (распределение вероятности равномерное). Найдите дисперсию координаты y этой точки.

   Ответ: 0.5

   Решение: Выбрать точку на окружности — всё равно, что выбрать угол. Получается, у нас есть равномерно распределённая случайная величина ξ со значениями от 0 до 2π. Плотность ξ равна $\frac{1}{2\pi}$. А координата y выбранной точки выражается как $\sin\xi$. Тогда математическое ожидание равно $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \sin x\, dx = 0$, а дисперсия, в свою очередь, равна $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \sin^2 x\, dx - 0 = \frac{\pi}{2\pi} = 0.5$.

5. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Чему равна A^{-2}?

   Ответ:

$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & -9 & -31 \\ -3 & 7 & 23 \\ -18 & 41 & 143 \end{pmatrix}$$

   Решение: Обращаем матрицу A с помощью элементарных преобразований, умножаем результат сам на себя.

6. Найдите общее решение дифференциального уравнения $y''' + y = \sin\frac{x}{2}$.

   Ответ:

$$c_1 \cdot e^{-x} + c_2 \cdot e^{\frac{x}{2}} \cos\frac{\sqrt{3}x}{2} + c_3 \cdot e^{\frac{x}{2}} \sin\frac{\sqrt{3}x}{2} + \frac{8}{65}\cos\frac{x}{2} + \frac{1}{65}\sin\frac{x}{2}.$$

   Решение: Уравнение — линейное с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^3 + 1 = 0$. Корни равны $-1, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Правая часть — специального вида, ей соответсвует число $\pm\frac{i}{2}$. Его кратность среди корней нулевая. Отсюда находим вид решения

$$c_1 \cdot e^{-x} + c_2 \cdot e^{\frac{x}{2}} \cos\frac{\sqrt{3}x}{2} + c_3 \cdot e^{\frac{x}{2}} \sin\frac{\sqrt{3}x}{2} + A\cos\frac{x}{2} + B\sin\frac{x}{2}.$$

   Значения A и B определяются после подстановки решения в уравнение.

7. Напишите канонические уравнения прямой, которая проходит через начало координат и образует одинаковые углы с векторами $a = (7,4,4)$, $b = (8,4,1)$ и $c = (2,2,1)$.

   Ответ:

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}.$$

   Решение: Сначала найдём вектора v, образующие одинаковые углы с парами векторов. Так как угол ищется так $\cos\phi = \frac{(a,v)}{|a||v|}$, то уравнение будет иметь вид $\frac{(a,v)}{|a||v|} = \frac{(b,v)}{|b||v|}$. На $|v|$ можно сократить, а сами вектора a, b, c — привести к одинаковой длине (в нашем случае достаточно домножить c на 3). Тогда получится уравнение вида $(a - b, v) = 0$, и, для других пар, $(b - c, v) = 0$, $(c - a, v) = 0$. Искомый вектор будет удовлетворять всем трём условиям, поэтому его мы найдём из системы

$$\begin{cases}(a-b,v)=0;\\(b-c,v)=0;\\(c-a,v)=0.\end{cases}$$

После подстановки конкретных значений это будет линейная система на координаты вектора $v=(x,y,z)$, решение которой будет направлящим вектором искомой прямой.

8. Рассмотрим группу подстановок $G=S_{24}$, то есть множество всех биекций на множестве $\{1,2,\dots 24\}$ с операцией композиции. Будем говорить, что подстановка сохраняет чётность, если после её применения к расставленным по порядку числам $\{1,2,\dots 24\}$ на чётных местах будут стоять чётные числа. Аналогично, подстановка сохраняет кратность трём, если если после её применения к расставленным по порядку числам $\{1,2,\dots 24\}$ на местах, номер которых кратен трём, будут числа, кратные трём.

   Сколько элементов в подгруппе L подстановок, сохраняющих и чётность, и кратность трём?

   Ответ: $(4!\cdot 8!)^2$

   Решение: Подстановка из подгруппы L «перемешивает» содержимое следующих 4 подмножеств, не перенося элементы между ними: 1) Числа, одновременно чётные и кратные трём (таких 4, 4! варианта перемешивания); 2) Чётные, но не кратные трём числа (таких 12-4 = 8, 8! вариантов); 3) Кратные трём, но не чётные числа (таких 8 - 4 = 4, 4! варианта); 4) Все оставшиеся (24 - 4 - 8 - 4 = 8, 8! варианта). Всего вариантов $4!\cdot 8!\cdot 4!\cdot 8!$.

Вступительный экзамен по математике для поступающих в магистратуру МГУ имени М. В. Ломоносова по направлениям «Математика», «Математика и компьютерные науки», «Механика и математическое моделирование»
2023 год

Вариант 2023-07-25

1. Найдите предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{6\sin(x^2)-6x^2+x^6}{x\left(e^{x^3}-1-x^3-\frac{1}{2}x^6\right)}$$

Ответ: 0.3

Решение: Разлагаем функции по степеням:

$$\sin(x^2)=x^2-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^{10}}{5!}+o(x^{10}),\qquad e^{x^3}=1+x^3+\frac{x^6}{2!}+\frac{x^9}{3!}+o(x^9).$$

После подстановок в выражение останется:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{6}{5!}x^{10}+o(x^{10})}{\frac{1}{3!}x^9\cdot x+o(x^9\cdot x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{6}{5!}+o(1)}{\frac{1}{3!}+o(1)}=\frac{6\cdot 3!}{5!}=\frac{3}{10}=0.3$$

2. Посчитайте интеграл

$$\int\frac{1}{x^3+2x^2+x}\,dx$$

Ответ:

$$\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+\frac{1}{x+1}+C.$$

Решение: Разлагаем знаменатель на множители, чтобы превратить дробь в сумму элементарных:

$$\frac{1}{x^3+2x^2+x}=\frac{1}{x(x+1)^2}.$$

Значит, элементарное разложение будет иметь вид

$$\frac{1}{x(x+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}.$$

Ищем A,B,C :

$$\frac{1}{x^3+2x^2+x}=\frac{A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx}{x^3+2x^2+x},$$

то есть

$$(A+B)x^2+(2A+B+C)x+A=1.$$

Значит, $A+B=0, 2A+B+C=0, A=1$, откуда $A=1, B=-1, C=-1$. Тогда:

$$\int\frac{1}{x^3+2x^2+x}\,dx=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}\right)dx=$$

$$= \ln|x| - \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C = \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + \frac{1}{x+1} + C.$$

3. Найдите все решения уравнения $(z^3-1)^3 = 8$ в комплексных числах.

   Ответ:

$$\left\{\sqrt[3]{3};\quad \pm\sqrt[6]{3}i;\quad -\frac{\sqrt[3]{3}}{2} \pm \frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{3}}{2}i;\quad \pm\frac{\sqrt[6]{3}\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt[6]{3}}{2}i;\quad \pm\frac{\sqrt[6]{3}\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt[6]{3}}{2}i\right\}$$

   Решение: Находим кубические корни по формуле Муавра:

$$z^3 - 1 = \sqrt[3]{8}$$

$$z^3 = \sqrt[3]{8} + 1$$

$$z^3 = \sqrt[3]{\sqrt[3]{8}+1}$$

$$\sqrt[3]{8} = \{2;\quad -1+\sqrt{3}i;\quad -1-\sqrt{3}i\}$$

$$\sqrt[3]{8}+1 = \{3;\quad \sqrt{3}i;\quad -\sqrt{3}i\}$$

   Извлекаем корни во всех трёх вариантах:

$$\sqrt[3]{3} = \left\{\sqrt[3]{3};\quad -\frac{\sqrt[3]{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{3}}{2}i;\quad -\frac{\sqrt[3]{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{3}}{2}i\right\},$$

$$\sqrt[3]{\sqrt{3}i} = \left\{-\sqrt[6]{3}i;\quad \frac{\sqrt[6]{3}\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt[6]{3}}{2}i;\quad -\frac{\sqrt[6]{3}\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt[6]{3}}{2}i\right\},$$

$$\sqrt[3]{-\sqrt{3}i} = \left\{\sqrt[6]{3}i;\quad \frac{\sqrt[6]{3}\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt[6]{3}}{2}i;\quad -\frac{\sqrt[6]{3}\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt[6]{3}}{2}i\right\}.$$

   Вместе эти варианты образуют ответ, у уравнения 9 разных решений.

4. Возьмём «классическую» игральную кость (кубик, на его гранях нарисованы от 1 до 6 точек, всего получается 1+2+3+4+5+6 = 21 точка). Из этих точек наугад выбираются две, их стирают. Потом кость бросается. Найдите математическое ожидание величины «число выпавших очков».

   Ответ: $3\frac{1}{6}$

   Решение: Значение складывается из двух величин: «число выпавших очков на нетронутом кубике» минус «число выпавших стёртых точек». Их математические ожидания можно считать по отдельности. Математическое ожидание игральной кости равно $(1+2+3+4+5+6)/6 = 3.5$. Найдём математическое ожидание числа выпавших стёртых точек.
   Какие возможны исходы? На кубике 21 точка, из них выбираются 2, это $C_{21}^2 = 210$ вариантов, и в придачу к этому кость падает на одну из шести граней. Следовательно, вероятность конкретного элементарного события равна $\frac{1}{210}\cdot\frac{1}{6}$.
   Число выпавших стёртых точек может быть $0, 1, 2$. Выпишем таблицу. Столбец будет показывать, какая из граней кубика выпала. Строка — число выпавших стёртых точек. На пересечении столбца и строки напишем число исходов, которые приводят

к такому событию.

$$\begin{array}{ccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0: & C_{20}^2 & C_{19}^2 & C_{18}^2 & C_{17}^2 & C_{16}^2 & C_{15}^2 \\ 1: & 1\cdot 20 & 2\cdot 19 & 3\cdot 18 & 4\cdot 17 & 5\cdot 16 & 5\cdot 15 \\ 2: & 0 & C_2^2 & C_3^2 & C_4^2 & C_5^2 & C_6^2 \end{array}$$

Первая строка заполняется так: Если выпала сторона k, то для выбора двух точек остаются все точки, которые не лежат на этой стороне. Их $21-k$, а вариантов, соответственно, C_{21-k}^2. Вторая строка заполняется так: если выпала сторона k, то одну точку надо выбрать на выпавшей стороне (k вариантов), а другую — среди оставшихся сторон ($21-k$ вариантов). Третья строка заполняется так: если выпала сторона k, то обе точки надо выбрать на ней, что даёт C_k^2 вариантов. Сторона 1 исключается, потому что на ней стереть две точки невозможно.
По данным таблицы считаем математическое ожидание:

$$1\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{210}\cdot(1\cdot 20+2\cdot 19+3\cdot 18+4\cdot 17+5\cdot 16+6\cdot 15)+$$

$$+2\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{210}\cdot\left(0+C_2^2+C_3^2+C_4^2+C_5^2+C_6^2\right)=\frac{420}{6\cdot 210}=\frac{1}{3}.$$

Значит, ответ равен $3.5-\frac{1}{3}=3\frac{1}{6}$.

5. Дана матрица
$$\begin{pmatrix}7 & 14 & -13\\ 1 & 2 & -1\\ 6 & 12 & -12\end{pmatrix}$$
Найти угол между собственными векторами с наибольшим и наименьшим собственными значениями.
Собственные значения сравниваются с учётом знака, например, $-5<1$. Так как собственный вектор может смотреть и вперёд, и назад, в ответе засчитывается любой возможный из вариантов.
Ответ: $\arccos\frac{5}{2\sqrt{7}}$ (или $\pi-\arccos\frac{5}{2\sqrt{7}}$).
Решение: Ищём собственные значения
$$\begin{vmatrix}7-\lambda & 14 & -13\\ 1 & 2-\lambda & -1\\ 6 & 12 & -12-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3-3\lambda^2+18\lambda=-\lambda(\lambda+6)(\lambda-3).$$
Собственные значения равны $-6,3,0$. Для поиска угла нужны наибольшее и наименьшее, это -6 и 3. Подставив эти значения в матрицу на место λ и решив систему, мы получаем собственные вектора, например $(1,0,1)$ и $(3,1,2)$. Угол между векторами ищется по формуле $\arccos\frac{(u,v)}{|u||v|}=\arccos\frac{5}{\sqrt{2}\sqrt{14}}=\arccos\frac{5}{2\sqrt{7}}$, чему и равен возможный ответ. Другой возможный вариант ответа: $\pi-\arccos\frac{5}{2\sqrt{7}}$.

6. Найдите общее решение дифференциального уравнения
$$y'x\ln x-y-2y^{-1}\ln^6 x=0.$$

Ответ:
$$y = \pm\sqrt{\ln^6 x + C\ln^2 x}.$$

Решение:
$$y'x\ln x - y = 2y^{-1}\ln^6 x / \cdot y$$
$$y'yx\ln x - y^2 = 2\ln^6 x$$
Замена: $y^2 = z$, $2y'y = z'$, замена превращает уравнение Бернулли в линейное:
$$z'\frac{x\ln x}{2} - z = 2\ln^6 x.$$

Решаем однородное (учитывая, что $x > 0$ по условию, и что $z = 0$ — решение):
$$\frac{z'}{z} = \frac{2}{x\ln x},$$
$$\ln|z| = \int\frac{dz}{z} = \int\frac{2\,dx}{x\ln x} = \int\frac{2\,d\ln x}{\ln x} = 2\ln|\ln x| + c,$$
итого:
$$z = c\cdot\ln^2 x.$$

Дальше решаем методом вариации постоянной $c = c(x)$:
$$c'\ln^2 x\cdot\frac{x\ln x}{2} = 2\ln^6 x,$$
$$c' = \frac{4\ln^3 x}{x},$$
$$c(x) = \ln^4 x + C,$$

откуда получаем, что
$$z = \ln^6 x + C\ln^2 x, \quad y = \pm\sqrt{\ln^6 x + C\ln^2 x}.$$

7. Дана прямая $\frac{x-8}{7} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{2}$ и плоскость $3x + 2y + 5z + 5 = 0$. Прямая отражается от плоскости, как от зеркала. Найдите уравнение отражённой прямой.

Ответ:
$$\frac{x-1}{34} = \frac{y-1}{-47} = \frac{z+2}{-127}.$$

Решение: Для начала найдём, в какой точке происходит отражение, то есть где прямая пересечёт плоскость. Эта точка должна удовлетворять как уравнениям прямой, так уравнению плоскости, поэтому находится она из системы
$$\begin{cases} 3x + 2y + 5z + 5 = 0, \\ \frac{x-8}{7} = \frac{y-2}{1}, \\ \frac{y-2}{1} = \frac{z}{2}. \end{cases}$$

Решая систему, получаем точку $(1, 1, -2)$.
Дальше нужно понять, какой у отражённой прямой направляющий вектор. Для этого возьмём вектор исходной прямой $(7, 1, 2)$, проведём из его конца перпендикуляр

к плоскости и отложим его дважды. Получившийся вектор будет симметричен исходному.

Нормаль к плоскости видна из уравнения, это $(3, 2, 5)$. Скалярное произведение направляющей и нормали равно $7 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 = 33$. Оно положительно, значит вектора смотрят по одну сторону плоскости. Проекция направляющего вектора на нормальное направление равна скалярному произведению, делённому на длину нормали, что будет $33/\sqrt{38}$. Значит, нужен вектор такой длины, направленный противоположно нормали $(3, 2, 5)$. Делим нормаль на её длину, умножаем на требуемую длину, затем на минус единицу, получаем $-\frac{33}{38}(3, 2, 5)$.

Дважды откладываем от конца направляющего вектора полученный, чтобы получить зеркальный: $(7, 1, 2) - 2 \cdot \frac{33}{38}(3, 2, 5) = (\frac{68}{38}, \frac{-94}{38}, \frac{-254}{38})$. Впрочем, вектор $(34, -47, -127)$ будет смотреть туда же.

В конце нужно написать уравнение прямой с таким направляющим вектором, проходящей через точку $(1, 1, -2)$. Получаем ответ:

$$\frac{x-1}{34} = \frac{y-1}{-47} = \frac{z+2}{-127}.$$

8. Какой порядок у группы поворотов пространства, переводящих икосаэдр в себя?

   Ответ: 60.

   Решение: Если отметить на икосаэдре грань, а на этой грани выделить вершину, то новое положение икосаэдра однозначно описывается тем, на какую из 20 граней пришлась закрашенная, и в какую из трёх возможных сторон на этой грани смотрит отмеченная вершина. $20 \cdot 3 = 60$.

Вступительный экзамен по математике для поступающих в магистратуру МГУ имени М. В. Ломоносова по направлениям «Математика», «Математика и компьютерные науки», «Механика и математическое моделирование»
2023 год

Вариант 2023-07-28

1. Вычислите предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^8}{2\cos(x^2) - 2 + x^4}$$

Ответ: 12

Решение: Разлагаем функции по степеням:

$$\cos(x^2) = 1 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!} + o(x^8)$$

После подстановок в выражение останется:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^8}{\frac{2}{4!}x^8 + o(x^8)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{2}{4!} + o(1)} = \frac{4!}{2} = 12.$$

2. Найдите неопределённый интеграл

$$\int \frac{1}{x^3 - 2x^2 + x}\, dx$$

Ответ:

$$\ln\left|\frac{x}{x-1}\right| - \frac{1}{x-1} + C.$$

Решение: Разлагаем знаменатель на множители, чтобы превратить дробь в сумму элементарных:

$$\frac{1}{x^3 - 2x^2 + x} = \frac{1}{x(x-1)^2}.$$

Значит, элементарное разложение будет иметь вид

$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}.$$

Ищем A, B, C :

$$\frac{1}{x^3 - 2x^2 + x} = \frac{A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx}{x^3 - 2x^2 + x},$$

то есть

$$(A+B)x^2 + (-2A - B + C)x + A = 1.$$

Значит, $A + B = 0, -2A - B + C = 0, A = 1$, откуда $A = 1, B = -1, C = 1$. Тогда:

$$\int \frac{1}{x^3 + 2x^2 + x}\, dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\right) dx =$$

$$= \ln|x| - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C = \ln\left|\frac{x}{x-1}\right| - \frac{1}{x-1} + C.$$

3. Решите систему в комплексных числах:

$$\begin{cases} |z| = \sqrt{2}, \\ |z-1| = 1. \end{cases}$$

   Ответ: $z = 1 \pm i$.

   Решение: Её лучше всего решать графически. Первое уравнение даёт окружность на плоскости с центром в нуле, радиуса $\sqrt{2}$, а второе — тоже окружность, радиуса 1, но с центром в точке $(1, 0)$. Эти окружности пересекаются в точках $(1, 1)$ и $(1, -1)$. Переводим точки плоскости в комплексные числа и получаем ответ: $z = 1 \pm i$.

4. Есть 6 нулей и 3 единицы. Их в случайном порядке записывают в виде матрицы размером 3 на 3. С какой вероятностью у получившейся матрицы будет ненулевой определитель?

   Ответ:
$$\frac{9 \cdot 4 \cdot 1}{3! \cdot C_9^3} = \frac{1}{14}$$

   Решение: Есть 9 мест, на которые можно разместить 3 единички — число возможных вариантов равно $C_9^3 = \frac{9!}{3!6!}$. Сколько способов разместить единицы дадут ненулевой определитель? Первая единица может выпасть куда угодно — это 9 вариантов. Вторая единица может выпасть куда угодно, кроме занятых первой единицей строки и столбца (иначе из-за недостатка единиц получится нулевая строка или столбец) — это 4 варианта. Третья не может попять в уже занятые строки и столбцы, поэтому ей остаётся единственная клетка. Значит, $9 \cdot 4 \cdot 1$ вариантов, и это количество надо поделить на количество перестановок трёх элементов, 3!, потому что подсчёт вёлся с учётом порядка, а он здесь не важен. В итоге мы получаем ответ: число матриц с ненулевым определителем делить на число всех возможных матриц, то есть

$$\frac{9 \cdot 4 \cdot 1}{3!} \cdot \frac{1}{C_9^3} = \frac{9 \cdot 4 \cdot 3! \cdot 6!}{3! \cdot 9!} = \frac{9 \cdot 4}{7 \cdot 8 \cdot 9} = \frac{1}{14}.$$

5. При каких значениях параметра λ вектора $(\lambda^2, 1, 1), (\lambda, -1, 0), (1, 0, 1)$ линейно зависимы?

   Ответ:
$$\lambda = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

   Решение: Линейную зависимость определяем с помощью определителя. Когда он равен нулю?
$$\begin{vmatrix} \lambda^2 & 1 & 1 \\ \lambda & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\lambda^2 - \lambda + 1 = 0.$$

   Остаётся решить квадратное уравнение. Корнями будут $\lambda = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$.

6. Найдите общее решение дифференциального уравнения

$$y'''' - y'' = e^x.$$

Ответ: $y = C_1 + C_2x + C_3e^x + C_4e^{-x} + 0.5xe^x$.

Решение: Это — линейное дифференциальное уравнение высокого порядка с правой частью специального вида. Решим однородное уравнение. Ему соответствует характеристический многочлен $\lambda^4 - \lambda^2 = 0$. Находим корни: $\lambda = 0, 0, 1, -1$. Таким корням, с учётом их кратности, соответствует решение $y = C_1 + C_2x + C_3e^x + C_4e^{-x}$. Решение неоднородного ищется в виде Axe^x (e^x соответствует число $\mu = 1$, и среди λ один такой корень есть). Подставляя Axe^x в уравнение, мы узнаём, что $4Ae^x + Axe^x - 2Ae^x - Axe^x = e^x$, то есть $A = 0.5$. Получаем ответ: $y = C_1 + C_2x + C_3\cos x + C_4\sin x + 0.5xe^x$.

7. Дана прямая $\frac{x-8}{7} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{2}$ и плоскость $3x+2y+5z+5 = 0$. Прямая ортогонально проецируется на плоскость. Найдите уравнения спроецированной прямой.

   Ответ:
$$\frac{x-1}{167} = \frac{y-1}{-28} = \frac{z+2}{-89}.$$

   Решение: Для начала найдём, в какой точке прямая пересечёт плоскость. Эта точка должна удовлетворять как уравнениям прямой, так уравнению плоскости, поэтому находится она из системы
$$\begin{cases} 3x + 2y + 5z + 5 = 0, \\ \frac{x-8}{7} = \frac{y-2}{1}, \\ \frac{y-2}{1} = \frac{z}{2}. \end{cases}$$

   Решая систему, получаем точку $(1, 1, -2)$.
   Дальше нужно понять, какой у спроецированной прямой направляющий вектор. Для этого возьмём вектор исходной прямой $(7, 1, 2)$ и проведём из его конца перпендикуляр к плоскости. Получившийся вектор будет проекцией.
   Нормаль к плоскости видна из уравнения, это $(3, 2, 5)$. Скалярное произведение направляющей и нормали равно $7\cdot3+1\cdot2+2\cdot5 = 33$. Оно положительно, значит вектора смотрят по одну сторону плоскости. Проекция направляющего вектора на нормальное направление равна скалярному произведению, делённому на длину нормали, что будет $33/\sqrt{38}$. Значит, нужен вектор такой длины, направленный противоположно нормали $(3, 2, 5)$. Делим нормаль на её длину, умножаем на требуемую длину, затем на минус единицу, получаем $-\frac{33}{38}(3, 2, 5)$.
   Откладываем от конца направляющего вектора полученный, чтобы получить вектор спроецированной прямой: $(7, 1, 2) - \frac{33}{38}(3, 2, 5) = (\frac{167}{38}, \frac{-28}{38}, \frac{-89}{38})$. Впрочем, вектор $(167, -28, -89)$ будет смотреть туда же.
   В конце нужно написать уравнение прямой с таким направляющим вектором, проходящей через точку $(1, 1, -2)$. Получаем ответ:
$$\frac{x-1}{167} = \frac{y-1}{-28} = \frac{z+2}{-89}.$$

8. Чему равно 7^{-1} в поле Z_{11}?

   Ответ: 8

   Решение: Умножаем 7 на числа от 1 до 11: это будет 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 77. Из этих чисел только одно выглядит как $1 + 11 \cdot k$. Это 56, $56 = 7 \cdot 8$, следовательно $7 \cdot 8 = 1 \pmod{11}$, поэтому ответ равен 8.

Вступительный экзамен по математике для поступающих в магистратуру МГУ имени М. В. Ломоносова по направлениям «Математика», «Математика и компьютерные науки», «Механика и математическое моделирование»
2023 год

Вариант 2023-08-30

1. Найдите точки минимума функции

$$y = \left|(x-3)^3 + 1\right| - 1.$$

Ответ: $x = 2$

Решение: Раскрываем модуль — при $x \geqslant 2$ получаем $y = (x-3)^3$, при $x < 2$ будет $y = -(x-3)^3 - 2$. Ноль производной будет в точке $x = 3$, но это не точка минимума, потому что производная не меняет знака. Из-за раскрытия модуля выпала точка $x = 2$, функция в ней не дифференцируема, но при переходе через эту точку производная меняет знак с - на $+$. Поэтому $x = 2$ — точка минимума.

2. Решите в комплексных числах уравнение

$$|z - 1 - i| = |z + 1 + i|$$

Ответ: $z = \lambda - \lambda i$ при $\lambda \in \mathbb{R}$.

Решение: Проще всего решать уравнение графически. Если сказать, что

$$|z - 1 - i| = c = |z + 1 + i|,$$

то мы увидим, что модуль с левой стороны соответствует окружности радиуса c с центром в $1 + i$, а модулю справа, аналогично, соответствует окружность радиуса c с центром в $-1 - i$. Точки пересечения этих окружностей будут лежать на серединном перпендикуляре к отрезку, соединяющему их центры. Несложно найти этот серединный перпендикуляр — им будет прямая $z = \lambda - \lambda i$ при $\lambda \in \mathbb{R}$.

3. Решите матричное уравнение $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 6 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ответ:

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{8}{15} & -\frac{1}{3} & \frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & 0 & -\frac{2}{5} \\ \frac{11}{10} & -\frac{1}{2} & \frac{11}{5} \end{pmatrix}$$

Решение: Если $AX = B$, то $X = A^{-1}B$.

$$X = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 \\ 12 & 6 & -12 \\ -6 & -3 & 21 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{8}{15} & -\frac{1}{3} & \frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & 0 & -\frac{2}{5} \\ \frac{11}{10} & -\frac{1}{2} & \frac{11}{5} \end{pmatrix}$$

4. Жаба умеет прыгать на случайное расстояние ξ, где $0 \leqslant \xi \leqslant 1$, и ξ распределено равномерно между 0 и 1. Жаба три раза прыгает в одну сторону (длины прыжков независимы друг от друга). С какой вероятностью она окажется на расстоянии, которое больше 1, но меньше 2?

   Ответ: $\frac{2}{3}$

   Решение: Здесь нам тоже поможет графическое представление. Результаты трёх прыжков можно представить в виде куба со стороной 1, где точка с координатами (x, y, z) значит, что длина первого прыжка x, второго y, а третьего z. Каждая координата принимает значения от 0 до 1. Рассмотрим случаи $x + y + z = 1$, $x + y + z = 2$. Геометрически это две параллельные плоскости, проходящие через куб. Первая плоскость проходит через вершины $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$, вторая — через $(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)$. Вероятность пройти от 1 до 2 равна объёму куба, оставшемуся между плоскостями. Найти его проще от обратного — отняв от объёма куба объёмы двух треугольных пирамидок, отсечённых плоскостями. Несложно заметить, что объём каждой равен $\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}$ ($\frac{1}{3}$ из формулы объёма пирамиды, основание — половинка грани куба площадью $\frac{1}{2}$, а высота — ребро куба, длиной 1). Итого, в ответ идёт число $1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$.

5. Найдите неопределённый интеграл

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x}$$

   Ответ:

$$\frac{1}{4}\left(\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| - \frac{2\cos x}{\sin^2 x}\right)$$

   Решение:

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x} = \int \frac{\sin x \ dx}{\sin^4 x} = -\int \frac{d\cos x}{\sin^4 x} = -\int \frac{d\cos x}{(1-\cos^2 x)^2} = -\int \frac{d\cos x}{(1-\cos x)^2(1+\cos x)^2}$$

   Обозначаем $\cos x$ как t и продолжаем:

$$-\int \frac{dt}{(1-t)^2(1+t)^2}.$$

   Раскладываем дробь на элементарные:

$$\frac{-1}{(1-t)^2(1+t)^2} = \frac{A}{(1-t)} + \frac{B}{(1-t)^2} + \frac{C}{(1+t)} + \frac{D}{(1+t)^2}$$

   Если привести дроби справа к общему знаменателю и сложить, в числителе будет

$$A(1-t)(1+t)^2 + B(1+t)^2 + C(1+t)(1-t)^2 + D(1-t)^2 =$$

$$= (-A + C)t^3 + (-A + B - C + D)t^2 + (A + 2B - C - 2D)t + (A + B + C + D)$$

Получаем такую систему:

$$\begin{cases} A + B + C + D = -1, \\ A + 2B - C - 2D = 0, \\ -A + B - C + D = 0, \\ -A + C = 0. \end{cases}$$

Её решение $A = -0.25, B = -0.25, C = -0.25, D = -0.25$. Получаем интегралы

$$-\frac{1}{4}\left(\int \frac{1}{1-t}dt + \int \frac{1}{(1-t)^2}dt + \int \frac{1}{1+t}dt + \int \frac{1}{(1+t)^2}dt\right) =$$

$$-\frac{1}{4}\left(-\int \frac{1}{1-t}d(1-t) - \int \frac{1}{(1-t)^2}d(1-t) + \int \frac{1}{1+t}d(1+t) + \int \frac{1}{(1+t)^2}d(1+t)\right) =$$

$$-\frac{1}{4}\left(-\ln|1-t| + \frac{1}{1-t} + \ln|1+t| - \frac{1}{1+t}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right| - \frac{2t}{1-t^2}\right) = (\text{обратно меняем t на } \cos x) = \frac{1}{4}\left(\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| - \frac{2\cos x}{\sin^2 x}\right).$$

6. Решите дифференциальное уравнение

$$xy' = \sqrt{4x^2 - y^2} + y.$$

Ответ: $y = 2x\sin(\ln|x| + c)\,; \quad y = \pm 2x$

Решение: Уравнение однородное, проводим замену $z = \frac{y}{x}$.

$$xy' = \sqrt{4x^2 - y^2} + y,$$

$$y' = \sqrt{4 - \frac{y^2}{x^2}} + \frac{y}{x},$$

$$z'x + z = \sqrt{4 - z^2} + z,$$

$$\frac{dz}{\sqrt{4 - z^2}} = \frac{dx}{x}$$

$$\arcsin\frac{z}{2} = \ln|x| + c$$

$$y = 2x\sin(\ln|x| + c)\,;$$

В процессе мы делили на $\sqrt{4 - z^2}$, так что проверяем, решения ли $z = \pm 2$, $y = \pm 2x$.

7. Дана плоскость $4x + 2y + z = 0$ и вершины треугольника $(1, 2, 3), (0, 1, -1), (7, 0, 0)$. Треугольник ортогонально проецируется на плоскость. Найдите площадь его проекции.

Ответ: $\frac{33}{\sqrt{21}}$

Решение: Можно искать вручную проекции этих точек на плоскость, а можно поступить иначе. Площадь проекции будет равна площади самого треугольника, умноженной на косинус угла между плоскостью-треугольником и плоскостью-экраном. Этот угол равен углу между нормалями к этим плоскостям. Ищем векторное произведение векторов-сторон треугольника: $v_1 = (1, 1, 4), v_2 = (7, -1, 1)$, $v_1 \times v_2 = (5, 27, -8)$.

Так как векторное произведение даёт площадь параллелограмма, а не треугольника — поделим вектор пополам. Итак, вектор $(2.5, 13.5, -4)$. Нормаль к плоскости равна $(4, 2, 1)$. Чтобы получить площадь проекции, нужно скалярно перемножить эти два вектора, поделив на длину второго, нормали к плоскости. Получается $(10 + 27 - 4)/\sqrt{21} = \frac{33}{\sqrt{21}}$.

8. Имеется M точек $A_1, A_2, \ldots, A_M$, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Сколько существует разных способов провести N отрезков с концами в отмеченных точках (в зависимости от N и M)? Отрезки могут пересекаться и иметь общие концы.

   Ответ: $C_{C_M^2}^N$.

   Решение: Отрезок может соединять две точки из M, это C_M^2 возможных мест. Теперь из этих мест нужно выбрать N занятых, получится $C_{C_M^2}^N$.