

Вступительный экзамен по математике для поступающих в магистратуру  
МГУ имени М. В. Ломоносова по направлениям «Математика»,  
«Математика и компьютерные науки», «Механика и математическое  
моделирование»  
2023 год

**Вариант 2023-06-23**

1. Найдите вторую производную функции  $f(x) = e^{e^x}$ .
2. Найдите определённый интеграл функции  $f(x) = x^5 - 5x^3 - 5x^2 + 1$  от её наименьшей точки экстремума до наибольшей.
3. Найдите предел последовательности  $\{z_n\}$ , заданной рекуррентно:  $z_n = z_{n-1}^3 + 1$ ,  $z_0 = 1 + i$ .
4. На окружности  $x^2 + y^2 = 1$  наугад выбирается точка (распределение вероятности равномерное). Найдите дисперсию координаты  $y$  этой точки.
5. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Чему равна  $A^{-2}$ ?

6. Найдите общее решение дифференциального уравнения  $y''' + y = \sin \frac{x}{2}$ .
7. Напишите канонические уравнения прямой, которая проходит через начало координат и образует одинаковые углы с векторами  $a = (7, 4, 4)$ ,  $b = (8, 4, 1)$  и  $c = (2, 2, 1)$ .
8. Рассмотрим группу подстановок  $G = S_{24}$ , то есть множество всех биекций на множестве  $\{1, 2, \dots, 24\}$  с операцией композиции. Будем говорить, что подстановка сохраняет чётность, если после её применения к расставленным по порядку числам  $\{1, 2, \dots, 24\}$  на чётных местах будут стоять чётные числа. Аналогично, подстановка сохраняет кратность трём, если после её применения к расставленным по порядку числам  $\{1, 2, \dots, 24\}$  на местах, номер которых кратен трём, будут числа, кратные трём.

Сколько элементов в подгруппе  $L$  подстановок, сохраняющих и чётность, и кратность трём?

Вступительный экзамен по математике для поступающих в магистратуру  
МГУ имени М. В. Ломоносова по направлениям «Математика»,  
«Математика и компьютерные науки», «Механика и математическое  
моделирование»  
2023 год

**Вариант 2023-07-25**

1. Найдите предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 \sin(x^2) - 6x^2 + x^6}{x \left( e^{x^3} - 1 - x^3 - \frac{1}{2}x^6 \right)}$$

2. Посчитайте интеграл

$$\int \frac{1}{x^3 + 2x^2 + x} dx$$

3. Найдите все решения уравнения  $(z^3 - 1)^3 = 8$  в комплексных числах.

4. Возьмём «классическую» игральную кость (кубик, на его гранях нарисованы от 1 до 6 точек, всего получается  $1+2+3+4+5+6 = 21$  точка). Из этих точек наугад выбираются две, их стирают. Потом кость бросается. Найдите математическое ожидание величины «число выпавших очков».

5. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} 7 & 14 & -13 \\ 1 & 2 & -1 \\ 6 & 12 & -12 \end{pmatrix}$$

Найти угол между собственными векторами с наибольшим и наименьшим собственными значениями.

Собственные значения сравниваются с учётом знака, например,  $-5 < 1$ . Так как собственный вектор может смотреть и вперёд, и назад, в ответе засчитывается любой возможный из вариантов.

6. Найдите общее решение дифференциального уравнения

$$y'x \ln x - y - 2y^{-1} \ln^6 x = 0.$$

7. Дана прямая  $\frac{x-8}{7} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{2}$  и плоскость  $3x + 2y + 5z + 5 = 0$ . Прямая отражается от плоскости, как от зеркала. Найдите уравнение отражённой прямой.

8. Какой порядок у группы поворотов пространства, переводящих икосаэдр в себя?

Вступительный экзамен по математике для поступающих в магистратуру  
МГУ имени М. В. Ломоносова по направлениям «Математика»,  
«Математика и компьютерные науки», «Механика и математическое  
моделирование»  
2023 год

**Вариант 2023-07-28**

1. Вычислите предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^8}{2 \cos(x^2) - 2 + x^4}$$

2. Найдите неопределённый интеграл

$$\int \frac{1}{x^3 - 2x^2 + x} dx$$

3. Решите систему в комплексных числах:

$$\begin{cases} |z| = \sqrt{2}, \\ |z - 1| = 1. \end{cases}$$

4. Есть 6 нулей и 3 единицы. Их в случайном порядке записывают в виде матрицы размером 3 на 3. С какой вероятностью у получившейся матрицы будет ненулевой определитель?

5. При каких значениях параметра  $\lambda$  вектора  $(\lambda^2, 1, 1)$ ,  $(\lambda, -1, 0)$ ,  $(1, 0, 1)$  линейно зависимы?

6. Найдите общее решение дифференциального уравнения

$$y'''' - y'' = e^x.$$

7. Дана прямая  $\frac{x-8}{7} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{2}$  и плоскость  $3x + 2y + 5z + 5 = 0$ . Прямая ортогонально проектируется на плоскость. Найдите уравнения спроецированной прямой.

8. Чему равно  $7^{-1}$  в поле  $Z_{11}$ ?

Вступительный экзамен по математике для поступающих в магистратуру  
МГУ имени М. В. Ломоносова по направлениям «Математика»,  
«Математика и компьютерные науки», «Механика и математическое  
моделирование»  
2023 год

**Вариант 2023-08-30**

1. Найдите точки минимума функции

$$y = |(x - 3)^3 + 1| - 1.$$

2. Решите в комплексных числах уравнение

$$|z - 1 - i| = |z + 1 + i|$$

3. Решите матричное уравнение  $AX = B$ , где

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 6 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

4. Жаба умеет прыгать на случайное расстояние  $\xi$ , где  $0 \leq \xi \leq 1$ , и  $\xi$  распределено равномерно между 0 и 1. Жаба три раза прыгает в одну сторону (длины прыжков независимы друг от друга). С какой вероятностью она окажется на расстоянии, которое больше 1, но меньше 2?

5. Найдите неопределённый интеграл

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x}$$

6. Решите дифференциальное уравнение

$$xy' = \sqrt{4x^2 - y^2} + y.$$

7. Дана плоскость  $4x + 2y + z = 0$  и вершины треугольника  $(1, 2, 3)$ ,  $(0, 1, -1)$ ,  $(7, 0, 0)$ . Треугольник ортогонально проецируется на плоскость. Найдите площадь его проекции.
8. Имеется  $M$  точек  $A_1, A_2, \dots, A_M$ , никакие три из которых не лежат на одной прямой. Сколько существует разных способов провести  $N$  отрезков с концами в отмеченных точках (в зависимости от  $N$  и  $M$ )? Отрезки могут пересекаться и иметь общие концы.