Г.И.Фалин

ВСТУПИТЕЛЬНОЕ ИСПЫТАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ В МГУ

Учебное пособие

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ, ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

Москва 2024

УДК 519.7
ББК 22.18
Ф19

Фалин Г.И.

Вступительное испытание по математике в МГУ: Учебное пособие. — 2-е изд., перераб. и доп. – М.: 2024. – 301 с., ил.

ISBN

Книга содержит варианты дополнительных вступительных испытаний по математике в МГУ им. М. В. Ломоносова с 2011 по 2023 гг. с подробными решениями и комментариями для одного варианта каждого года. Она может быть использована абитуриентами для повторения математики и ознакомления с форматом экзамена и типами задач.

Ключевые слова: МГУ им. М.В. Ломоносова, вступительные испытания, математика, алгебра, геометрия, тригонометрия, уравнения, неравенства, функции, текстовые задачи, векторы, декартовы координаты

Gennady Falin

MSU Mathematics Admissions Test

The book contains past exam papers of Lomonosov Moscow State University Mathematics Admissions Test from year 2011 to 2023 with detailed solutions and comments. It can be used by prospective university students to revise for mathematics and familiarise themselves with the test format and style of problems.

Key words: Lomonosov Moscow State University, admissions test, mathematics, algebra, geometry, trigonometry, equations, inequalities, functions, word problems, vectors, Cartesian coordinates

Оглавление

Предисловие

Правилами приёма в Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова установлено, что приём на первый курс проводится по результатам ЕГЭ и проводимого МГУ дополнительного вступительного испытания профильной, творческой или профессиональной направленности (ДВИ). Дополнительное вступительное испытание по математике проводят следующие факультеты МГУ: механико-математический, факультет вычислительной математики и кибернетики, геологический, факультет наук о материалах, экономический, социологический (направление подготовки «менеджмент»), факультет биоинженерии и биоинформатики, факультет фундаментальной физико-химической инженерии (направление подготовки «прикладные математика и физика»), высшая школа государственного аудита (направление подготовки «экономика»), факультет государственного управления (направления подготовки «управление персоналом» и «государственное и муниципальное управление», «менеджмент»), Московская школа экономики, Высшая школа управления и инноваций, факультет космических исследований, филиал МГУ в г. Севастополь (направления подготовки «прикладная математика и информатика», «экономика», «государственное и муниципальное управление»).

Программа проводимого МГУ ДВИ по математике формируется на основе федерального государственного образовательного стандарта среднего общего образования и федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования. Она включает основные разделы обычного школьного курса математики, так что абитуриент, хорошо усвоивший школьную программу, может рассчитывать на достаточно высокую оценку по ДВИ.

С 2011 по 2019 гг. вариант ДВИ по математике состоял из 8 задач. С 2020 года экзамен стали проводить дистанционно, а его продолжительность уменьшили с 4 до 3 часов. Уменьшилось и число задач в вариантах, сейчас их 7. Первая и вторая задачи довольно лёгкие, третья и четвёртая немного сложнее (обычно это тригонометрическое уравнение и неравенство — логарифмическое, показательное, иррациональное), пятой обычно предлагается задача по планиметрии средней сложности. Последние две задачи варианта (одна из них по стереометрии, а вторая — задача с параметром, на экстремум функции нескольких переменных с ограничениями и т.п.) требуют не просто хорошего знания школьной математики, а свободного владения всеми затрагиваемыми в школьных учебниках темами, что предполагает большой опыт решения задач и требует изучения дополнительной литературы по элементарной математике. Для поступления в МГУ абитуриент вовсе не обязан решить все задачи из варианта ДВИ. Например, в 2019 г. даже для поступления на механико-математический факультет (правда, на коммерческое обучение и только при условии высоких баллов по результатам ЕГЭ) было достаточно решить 4 задачи (что обеспечивало 55 баллов по принятой сейчас 100 бальной шкале).

При подготовке к университетскому вступительному экзамену следует не просто повторять основные стандартные темы и глубже, чем принято в школе, изучать более сложные разделы элементарной математики; изучение теории должно сопровождаться разбором типичных задач. Для закрепления знаний, контроля усвоения материала, выработки определённого автоматизма исключительно важно самостоятельно решать много задач по каждой теме, делая упор на задачи, предлагавшиеся на вступительных экзаменах в МГУ в прошлые годы. При систематической, на протяжении 2-3 лет, подготовке, на заключительном её этапе следует разбирать варианты прошлых лет как целое и самостоятельно решать такие варианты, имитируя дома настоящий экзамен. Именно этот этап подготовки я имел в виду, когда работал над книгой. Впрочем, она может помочь и быстро повторить основные темы за несколько месяцев до экзамена даже абитуриенту, который не занимался систематически. В первой части книги приведены варианты ДВИ по математике в МГУ с 2011 по 2023 год, обычно по четыре варианта для каждого года. Изучение этой части позволит школьнику понять как общие черты вариантов, так и возможные их индивидуальные особенности – с такого общего анализа варианта следует начинать работу на реальном экзамене. Особо подчеркну, что я не являюсь автором задач, из которых составлены эти варианты. Варианты вступительных экзаменов в МГУ составляют коллективы преподавателей механико-математического факультета и факультета вычислительной математики и кибернетики; фамилии авторов задач никогда не раскрываются. Центральная приёмная комиссия МГУ, приёмная комиссия механико-математического факультета, приёмная комиссия факультета вычислительной математики и кибернетики на своих сайтах размещают фотокопии вариантов прошлых лет с краткими решениями или ответами – именно эти сайты были использованы при подготовке первой части книги. Условия некоторых задач отредактированы, чтобы исправить стилистические, пунктуационные и т.п. ошибки.

Во второй части для одного варианта каждого года приведены подробные решения. Предложенные решения отличаются от решений, предложенных авторами задач, не только использованными методами, но и подробностью изложения. В частности, решения геометрических задач иллюстрируются большим числом рисунков (нумерация рисунков и формул начинается заново для каждого года). Я старался, насколько это возможно в рамках небольшой книги, показывать общие принципы решения задач и применение общих математических понятий и методов с тем, чтобы решения повышали уровень знаний и математическую культуру абитуриента. По этой причине в тех случаях, где это оправдано, я приводил несколько способов решения одной и той же задачи и давал дополнительные комментарии. По поводу разных способов решения одной и той же задачи нужно сделать важное замечание: математическая задача считается решённой, если она решена – фразы вроде «я задачу решил, но с небольшими ошибками» совершенно бессмысленны. «Решена» означает (в соответствии с Программой по математике для поступающих в МГУ), что задача решена логически правильно, решение излагается полно и последовательно, с необходимыми пояснениями. Отсюда следует, что все решения задачи совершенно равноценны и, в частности, не может быть никаких «нерациональных» способов решения.

Хорошо известно, что сложные задачи ЕГЭ по математике обычно соответствуют стандартным задачам вступительных экзаменов по математике в МГУ прошлых лет. Поэтому я уверен, что книга будет полезна не только школьникам, мечтающим поступить в МГУ, но и тем, кто хотел бы получить высокий балл на ЕГЭ.

Для более основательной подготовки я рекомендую использовать пособия профессоров и преподавателей МГУ, упомянутые в списке литературы в конце книги.

При компьютерном наборе неизбежны опечатки и другие неточности, за которые я заранее приношу свои извинения. Я был бы благодарен читателям за отзывы и советы по поводу книги, которые прошу направлять по адресу: Москва 119992, МГУ им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, проф. Г.И. Фалину.

д.ф.м.н., проф. Г.И.Фалин

29 апреля 2024 г.

Часть 1

Варианты

Варианты 2011 г.

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова
Дополнительное вступительное испытание по математике 2011 г. (вариант 111)

1. Вычислите значение функции $x^2 - 0.625x - \frac{1}{8}$ в точке $x = \frac{4}{5}$.

2. Решите уравнение $(\sin x + \cos x)^2 = 1$.

3. Решите уравнение $\log_2(3x-4) = \log_4(2-x)$.

4. Решите неравенство $\frac{\sqrt{5x+3}-1}{\sqrt{3x+2}-1} > 1$.

5. Медианы AL и BM треугольника ABC пересекаются в точке K. Найдите длину отрезка CK, если $AB = \sqrt{3}$ и известно, что вокруг четырёхугольника $KLCM$ можно описать окружность.

6. Найдите наибольшее значение функции

$$\frac{9^x}{4^x - 6^x + 9^x}$$

и точку x, в которой это значение достигается.

7. В закрытой коробке, имеющей форму куба со стороной 5, лежат два шара. Радиус первого из них равен 2. Этот шар касается плоскости основания и двух соседних боковых граней куба. Второй шар касается двух других боковых граней куба, плоскости основания и первого шара. Чему равен радиус второго шара?

8. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 2x^2 + 4xy + 11y^2 \le 1, \\ 4x + 7y \ge 3. \end{cases}$$

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова
Дополнительное вступительное испытание по математике 2011 г. (вариант 112)

1. Вычислите значение функции $\dfrac{x^2-5}{x-0.2}$ в точке $x=\dfrac{9}{4}$.

2. Решите уравнение $(\sin x+\cos x)^2=2$.

3. Решите уравнение $\log_3(5-2x)=\log_9(5+x)$.

4. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{2+3x}-1}<1$.

5. Медианы AP и BQ треугольника ABC пересекаются в точке D. Найдите длину отрезка AB, если $CD=\sqrt{12}$ и известно, что вокруг четырёхугольника $PCQD$ можно описать окружность.

6. Найдите наибольшее значение функции

$$\frac{6^x}{9^{x+1}+6^x+4^{x-1}}$$

и точку x, в которой это значение достигается.

7. Внутри куба с ребром 3 расположены две сферы. Первая касается плоскости основания и двух соседних боковых граней куба. Вторая сфера касается тех же двух боковых граней, грани куба, параллельной основанию, и первой сферы. Чему равен радиус второй сферы, если радиус первой равен 1?

8. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 3x^2+4xy+12y^2\le 1, \\ 5x+6y\le -3. \end{cases}$$

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова
Дополнительное вступительное испытание по математике 2011 г. (вариант 113)

1. Вычислите значение функции $0.125x^2-\frac{1}{3}x+\frac{1}{9}$ в точке $x=\frac{1}{2}$.

2. Решите уравнение $(\cos x-\sin x)^2=1$.

3. Решите уравнение $\log_2(1-3x)=\log_4(5x-1)$.

4. Решите неравенство $\frac{\sqrt{4x-2}-1}{\sqrt{3x-1}-1}>1$.

5. Медианы KC и LD треугольника KLM пересекаются в точке E. Найдите длину отрезка EM, если $KL=3$ и известно, что вокруг четырёхугольника $ECMD$ можно описать окружность.

6. Найдите наибольшее значение функции

$$\frac{4^x}{2\cdot 5^{2x}-10^x+4^x}$$

и точку x, в которой это значение достигается.

7. В закрытой коробке, имеющей форму куба со стороной 8, лежат два шара. Радиус первого из них равен 2. Он касается плоскости основания и двух соседних боковых граней куба. Второй шар радиуса 3 касается двух других боковых граней куба и первого шара. На какой высоте над дном коробки находится центр второго шара?

8. Решите систему неравенств

$$\begin{cases}4x^2-2xy+7y^2\le 1,\\ 2x-5y\ge 2.\end{cases}$$

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова
Дополнительное вступительное испытание по математике 2011 г. (вариант 114)

1. Вычислите значение функции $\dfrac{x^2-1.75}{x+5}$ в точке $x=\dfrac{4}{3}$.

2. Решите уравнение $\left(\sin x-\cos x\right)^2=2$.

3. Решите уравнение $\log_3\left(2x+1\right)=\log_9\left(4+3x\right)$.

4. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{1-3x}-1}{\sqrt{2+x}-1}<1$.

5. Медианы PE и QF треугольника PQR пересекаются в точке S. Найдите длину отрезка PQ, если $SR=2$ и известно, что вокруг четырёхугольника $SERF$ можно описать окружность.

6. Найдите наибольшее значение функции
$$\frac{10^x}{25^{x-1}+10^x+4^{x+1}}.$$

7. В кубе с ребром 1 расположены две сферы различных радиусов. Первая касается плоскости основания и двух соседних боковых граней куба. Вторая сфера касается двух других боковых граней куба, грани куба, параллельной основанию, и первого шара. Чему равна сумма радиусов сфер?

8. Решите систему неравенств
$$\begin{cases}5x^2-2xy+9y^2\le 1,\\ 3x-5y\le -2.\end{cases}$$

Варианты 2012 г.

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова
Дополнительное вступительное испытание по математике 2012 г. (вариант 121)

1. Найдите многочлен второй степени, если известно, что его корни равны $-\frac{2}{5}$ и $\frac{11}{3}$, а средний коэффициент равен -7.

2. Вычислите $\log_3\left(-\log_6\frac{7}{1512}\right)$.

3. Решите неравенство $\left(4^x-2^{x+3}+15\right)\cdot\sqrt{3^x-9}\geq 0$.

4. Решите уравнение $\cos 4x-\sqrt{2}\cos 3x+\cos 2x=0$.

5. Найдите площадь фигуры, состоящей из точек (x,y) координатной плоскости, удовлетворяющих уравнению $|2x+y|+|y|+2|x-1|=2$.

6. Окружность с центром, лежащим на стороне BC треугольника ABC, касается сторон AB и AC в точках D и E соответственно и пересекает сторону BC в точках F,G (точка F лежит между точками B и G). Найдите CG, если известно, что $BF=1$ и $BD:DA=AE:EC=1:2$.

7. Определите, при каких значениях параметра a уравнение

$$a\sqrt{x+y}=\sqrt{2x}+\sqrt{y}$$

имеет единственное решение (x,y).

8. В основании пирамиды лежит правильный треугольник ABC со стороной $\sqrt{3}$, боковые рёбра AS,BS,CS пирамиды равны соответственно 4, 4 и 5. Прямой круговой цилиндр расположен так, что окружность его верхнего основания имеет ровно одну общую точку с каждой из боковых граней пирамиды, а окружность нижнего основания лежит в плоскости ABC и касается ровно одного из рёбер основания пирамиды. Найдите радиус основания цилиндра.

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова
Дополнительное вступительное испытание по математике 2012 г. (вариант 122)

1. Найдите многочлен второй степени, если известно, что его корни равны $-\frac{4}{7}$ и $\frac{5}{3}$, а свободный член равен -2.

2. Вычислите $\log_2 \log_{81} \frac{417}{139}$.

3. Решите неравенство $\left(9^x - 3^{x+2} + 14\right) \cdot \sqrt{4 - 2^x} \le 0$.

4. Решите уравнение $\sin 3x = \sqrt{2} \cos x - \sin x$.

5. Найдите площадь фигуры, состоящей из точек (x, y) координатной плоскости, удовлетворяющих уравнению $|x| + |x + 3y| + 3|y - 2| = 6$.

6. Окружность касается сторон AB и BC треугольника ABC в точках D и E соответственно и пересекает сторону AC в точках F, G (точка F лежит между точками A и G). Найдите радиус этой окружности, если известно, что $AF = 5$, $GC = 2$, $AD : DB = 2 : 1$ и $BE = EC$.

7. Определите, при каких значениях параметра a уравнение

$$a\sqrt{x + y} = \sqrt{3x} + 2\sqrt{y}$$

имеет единственное решение (x, y).

8. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник ABC со сторонами $AC = BC = 5$ и $AB = 6$, боковые рёбра AS, BS, CS пирамиды равны соответственно 7, 7 и 4. Прямой круговой цилиндр расположен так, что окружность его верхнего основания имеет ровно одну общую точку с каждой из боковых граней пирамиды, а окружность нижнего основания лежит в плоскости ABC и касается прямых AC и BC. Найдите высоту цилиндра.

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова
Дополнительное вступительное испытание по математике 2012 г. (вариант 123)

1. Найдите многочлен второй степени, если известно, что его корни равны $-\frac{3}{5}$ и $\frac{13}{7}$, а средний коэффициент равен -4.

2. Вычислите $\log_5\left(-\log_3\frac{8}{1944}\right)$.

3. Решите неравенство $\left(9^x-2\cdot 3^{x+1}+8\right)\cdot\sqrt{4-2^x}\geq 0$.

4. Решите уравнение $\sin 4x+\sqrt{3}\sin 3x+\sin 2x=0$.

5. Найдите площадь фигуры, состоящей из точек (x,y) координатной плоскости, удовлетворяющих уравнению $2|x+2|+|y|+|2x-y|=4$.

6. Окружность с центром, лежащим на стороне BC треугольника ABC, касается сторон AB и AC в точках K и L соответственно и пересекает сторону BC в точках M, N (точка M лежит между точками B и N). Найдите CN, если известно, что $BM=8$ и $BK:KA=AL:LC=2:1$.

7. Определите, при каких значениях параметра a уравнение

$$a\sqrt{x+y}=\sqrt{x}+\sqrt{3y}$$

имеет единственное решение (x,y).

8. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник ABC со сторонами $AC=BC=4$ и $AB=\frac{8}{3}$, боковые рёбра AS, BS, CS пирамиды равны соответственно 3, 3 и 5. Прямой круговой цилиндр расположен так, что окружность его верхнего основания имеет ровно одну общую точку с каждой из боковых граней пирамиды, а окружность нижнего основания лежит в плоскости ABC и касается ровно одного из рёбер основания пирамиды. Найдите высоту цилиндра.

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова
Дополнительное вступительное испытание по математике 2012 г. (вариант 124)

1. Найдите многочлен второй степени, если известно, что его корни равны $-\frac{5}{7}$ и $\frac{9}{4}$, а свободный член равен -5.

2. Вычислите $\log_3 \log_{64} \frac{716}{179}$.

3. Решите неравенство $\left(4^x - 7 \cdot 2^x + 12\right) \cdot \sqrt{3^{x+1} - 1} \leq 0$.

4. Решите уравнение $\cos 3x = \cos x + \sqrt{3} \sin x$.

5. Найдите площадь фигуры, состоящей из точек (x, y) координатной плоскости, удовлетворяющих уравнению $|2y - x| + 2|y + 4| + |x| = 8$.

6. Окружность касается сторон AB и BC треугольника ABC в точках K и L соответственно и пересекает сторону AC в точках M, N (точка M лежит между точками A и N). Найдите радиус этой окружности, если известно, что $AM = 1$, $NC = 3$, $AK : KB = 2 : 1$ и $BL : LC = 1 : 4$.

7. Определите, при каких значениях параметра a уравнение

$$a\sqrt{x + y} = \sqrt{2x} + \sqrt{3y}$$

имеет единственное решение (x, y).

8. В основании пирамиды лежит правильный треугольник ABC со стороной 5, боковые рёбра AS, BS, CS пирамиды равны соответственно 7, 7 и 3. Прямой круговой цилиндр расположен так, что окружность его верхнего основания имеет ровно одну общую точку с каждой из боковых граней пирамиды, а окружность нижнего основания лежит в плоскости ABC и касается прямых AC и BC. Найдите радиус основания цилиндра.

Варианты 2013 г.

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова
Дополнительное вступительное испытание по математике 2013 г. (вариант 131)

1. Старший коэффициент квадратного трёхчлена $f(x)$ равен -3. Один из его корней равен $7/3$. Найдите второй корень, если известно, что $f(0)=4$.

2. Вычислите $\log_8 10 \cdot \log_{10} 4$.

3. Решите неравенство $\dfrac{9}{2}\left(1+2^{1-2x}\right)^{-1/2} - \dfrac{1}{2}\left(2^{2x}+2\right)^{1/2} \ge 3^{1/2}\cdot 2^{x/2}$.

4. Решите уравнение $\dfrac{\sin 5x}{\sin x} - \dfrac{\cos 5x}{\cos x} = \dfrac{\sin x}{\sin 5x} - \dfrac{\cos x}{\cos 5x}$.

5. От биостанции до границы заповедника вниз по реке ровно 8 км. В 8:00 браконьеры вошли на катере в заповедник и направились в сторону биостанции. В это же время им навстречу с биостанции вышел катер с рыбинспекторами. Через 6 минут, когда рыбинспекторы были ровно посередине между биостанцией и браконьерами, браконьеры заметили катер рыбинспекции, тут же развернулись и направились обратно к границе заповедника. Когда браконьеры достигли границы, рыбинспекторы с чувством выполненного долга развернулись и отправились обратно на биостанцию, куда прибыли в 08:25. Найдите наименьшее расстояние, на котором находились браконьеры от рыбинспекторов, если известно, что оба катера движутся равномерно и с одинаковой собственной скоростью.

6. Трапеция $KLMN$ вписана в окружность радиуса R и описана около окружности радиуса r. Найдите r, если $R=20$, а косинус угла между диагональю KM и основанием KN равен $4/5$.

7. В основании прямой призмы $ABCA'B'C'$ лежит прямоугольный треугольник ABC, такой что $AC=BC=1$. На ребре $A'B'$ верхнего основания (параллельном AB), отмечена точка D так, что $A'D:DB'=1:2$. Найдите радиус сферы, вписанной в тетраэдр $ABC'D$, если высота призмы равна 1.

8. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\sin\left(x-a\ln|x|\right)=x+1$$

имеет бесконечно много решений.

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова
Дополнительное вступительное испытание по математике 2013 г. (вариант 132)

1. Старший коэффициент квадратного трёхчлена $f(x)$ равен -2. Один из его корней равен $3/2$. Найдите второй корень, если известно, что $f(0)=1$.

2. Вычислите $\log_{12} 3 \cdot \log_9 12$.

3. Решите неравенство $12\left(3+3^{-2x}\right)^{-1/2}-\left(3^{1+2x}+1\right)^{1/2} \geq 4 \cdot 3^{x/2}$.

4. Решите уравнение $\dfrac{\cos 3x}{\sin 2x}+\dfrac{\sin 3x}{\cos 2x}=\dfrac{\sin 2x}{\cos 3x}+\dfrac{\cos 2x}{\sin 3x}$.

5. В 14:00 из села Верхнее вниз по течению реки в сторону села Нижнее отправился катер «Быстрый». Когда до Нижнего оставалось плыть 500 метров, ему навстречу из Нижнего вышел катер «Смелый». В этот же самый момент «Быстрый», не желая встречи со «Смелым», развернулся и пошёл обратно к Верхнему. В 14:14, когда расстояние по реке от «Быстрого» до Верхнего сравнялось с расстоянием по реке от «Смелого» до «Быстрого», на «Смелом» осознали, что они идут с «Быстрым» на одинаковой скорости, развернулись и направились обратно к Нижнему. В исходные пункты катера вернулись одновременно в 14:18. Найдите расстояние по реке между Верхним и Нижним, если известно, что оба катера движутся равномерно и с одинаковой собственной скоростью.

6. Трапеция $ABCD$ вписана в окружность радиуса R и описана около окружности радиуса r, причём $R=2r$. Найдите среднюю линию трапеции, если диагональ AC равна 4.

7. В основании прямой призмы $KLMK'L'M'$ лежит прямоугольный треугольник KLM, такой что $KM=LM=1$. На ребре $K'M'$ верхнего основания (параллельном KM), отмечена точка N так, что $K'N:NM'=3:1$. Найдите радиус сферы, вписанной в тетраэдр $KL'MN$, если высота призмы равна 1.

8. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\cos\left(x-\frac{a}{x}\right)=x-1$$

имеет бесконечно много решений.

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова
Дополнительное вступительное испытание по математике 2013 г. (вариант 133)

1. Старший коэффициент квадратного трёхчлена $f(x)$ равен 2. Один из его корней равен $5/2$. Найдите второй корень, если известно, что $f(0) = 3$.

2. Вычислите $\log_{16} 6 \cdot \log_6 8$.

3. Решите неравенство $15\left(4+4^{-2x}\right)^{-1/2} - \left(4^{1+2x}+1\right)^{1/2} \geq 20^{1/2} \cdot 4^{x/2}$.

4. Решите уравнение $\dfrac{\sin 3x}{\sin x} + \dfrac{\cos 3x}{\cos x} = \dfrac{\sin x}{\sin 3x} + \dfrac{\cos x}{\cos 3x}$.

5. От биостанции до границы заповедника вверх по реке ровно 14 км. В 7:00 браконьеры вошли на катере в заповедник и направились в сторону биостанции. Через некоторое время им навстречу с биостанции вышел катер рыбинспекции. Браконьеры тут же развернулись и направились обратно к границе заповедника. В 7:38, когда браконьеры оказались ровно посередине между рыбинспекторами и границей, рыбинспекторы осознали, что они идут с браконьерами на одинаковой скорости, развернулись и отправились обратно на биостанцию. До биостанции они добрались ровно в тот момент, когда браконьеры выехали за пределы заповедника в 7:50. Найдите наименьшее расстояние, на котором находились браконьеры и рыбинспекторы, если известно, что оба катера движутся равномерно и с одинаковой собственной скоростью.

6. Трапеция $KLMN$ вписана в окружность радиуса R и описана около окружности радиуса r, причём $R = 3r/2$. Найдите среднюю линию трапеции, если диагональ KM равна 3.

7. В основании прямой призмы $KLMK'L'M'$ лежит прямоугольный треугольник KLM, такой что $KM = LM = 1$. На ребре $K'L'$ верхнего основания (параллельном KL), отмечена точка N так, что $K'N : NL' = 1 : 3$. Найдите радиус сферы, вписанной в тетраэдр $KLM'N$, если высота призмы равна 1.

8. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\sin\left(x + \frac{a}{x}\right) = x + 1$$

имеет бесконечно много решений.

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова
Дополнительное вступительное испытание по математике 2013 г. (вариант 134)

1. Старший коэффициент квадратного трёхчлена $f(x)$ равен 2. Один из его корней равен $5/2$. Найдите второй корень, если известно, что $f(0) = 3$.

2. Вычислите $\log_5 27 \cdot \log_9 5$.

3. Решите неравенство $12\left(3+3^{-2x}\right)^{-1/2} - \left(3^{1+2x}+1\right)^{1/2} \geq 4\cdot 3^{x/2}$.

4. Решите уравнение $\dfrac{\cos 3x}{\sin 2x} + \dfrac{\sin 3x}{\cos 2x} = \dfrac{\sin 2x}{\cos 3x} + \dfrac{\cos 2x}{\sin 3x}$.

5. В 14:00 из села Верхнее вниз по течению реки в сторону села Нижнее отправился катер «Быстрый». Когда до Нижнего оставалось плыть 500 метров, ему навстречу из Нижнего вышел катер «Смелый». В этот же самый момент «Быстрый», не желая встречи со «Смелым», развернулся и пошёл обратно к Верхнему. В 14:14, когда расстояние по реке от «Быстрого» до Верхнего сравнялось с расстоянием по реке от «Смелого» до «Быстрого», на «Смелом» осознали, что они идут с «Быстрым» на одинаковой скорости, развернулись и направились обратно к Нижнему. В исходные пункты катера вернулись одновременно в 14:18. Найдите расстояние по реке между Верхним и Нижним, если известно, что оба катера движутся равномерно и с одинаковой собственной скоростью.

6. Трапеция $KLMN$ вписана в окружность радиуса R и описана около окружности радиуса r. Найдите r, если $R = 20$, а косинус угла между диагональю KM и основанием KN равен $4/5$.

7. В основании прямой призмы $ABCA'B'C'$ лежит прямоугольный треугольник ABC, такой что $AC = BC = 1$. На ребре $A'C'$ верхнего основания (параллельном AC), отмечена точка D так, что $A'D : DC' = 2:1$. Найдите радиус сферы, вписанной в тетраэдр $AB'CD$, если высота призмы равна 1.

8. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\cos\left(x + a\ln|x|\right) = x - 1$$

имеет бесконечно много решений.

Варианты 2014 г.

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова
Дополнительное вступительное испытание по математике 2014 г. (вариант 141)

1. Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением $\sqrt{7-4\sqrt{3}}\cdot\left(8+4\sqrt{3}\right)$.

2. Найдите максимальное значение функции $\log_{1/2}\left(x^2-6x+17\right)$.

3. Найдите все положительные x, удовлетворяющие неравенству $x^{3x+7}>x^{12}$.

4. Решите уравнение $\cos^2 x-\cos x\cdot\sin^2\left(\frac{5x}{4}-\frac{5\pi}{12}\right)+\frac{1}{4}=0.$

5. Окружности Ω_1 и Ω_2 с центрами в точках O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке A. Общая внешняя касательная к этим окружностям касается Ω_1 и Ω_2 соответственно в точках B_1 и B_2. Общая касательная к окружностям, проходящая через точку A, пересекает отрезок B_1B_2 в точке C. Прямая, делящая угол ACO_2 пополам, пересекает прямые O_1B_1, O_1O_2, O_2B_2 в точках D_1, L, D_2 соответственно. Найдите отношение $LD_2:O_2D_2$, если известно, что $CD_1=CO_1$.

6. Найдите все положительные x,y, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} x^{3/2}+y & =16, \\ x+y^{2/3} & =8. \end{cases}$$

7. В основании прямой призмы лежит правильный треугольник со стороной 1. Высота призмы равна $\sqrt{2}$. Найдите расстояние между скрещивающимися диагоналями боковых граней.

8. Пусть

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \sqrt{-6x^2-14y^2-18xy+6}+y, \\ g(x,y) &= -\sqrt{-6x^2-14y^2-18xy+6}+y. \end{aligned}$$

Найдите все значения, которые может принимать хотя бы одна из этих функций.

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова
Дополнительное вступительное испытание по математике 2014 г. (вариант 142)

1. Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением $\sqrt{5-2\sqrt{6}}\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$.

2. Найдите максимальное значение функции $\log_{1/3}\left(x^2+4x+31\right)$.

3. Найдите все положительные x, удовлетворяющие неравенству $x^{-5x-3}<x^{-7}$.

4. Решите уравнение $\sin^2 x+\sqrt{2}\cdot|\sin x|\cos\left(\frac{5x}{2}-\frac{5\pi}{8}\right)+\frac{1}{2}=0$.

5. Окружности Ω_1 и Ω_2 с центрами в точках O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке A. Общая внешняя касательная к этим окружностям касается Ω_1 в точке B и пересекает в точке C общую касательную этих окружностей, проходящую через точку A. Прямая, делящая угол ACO_1 пополам, пересекает прямые O_1O_2 и BO_1 в точках L и D соответственно. Найдите CO_2, если известно, что $LO_1=2$, а прямые CO_2 и DO_2 перпендикулярны.

6. Найдите все x, y на интервале $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\cos^3 x}+\dfrac{1}{\sin^3 y}=16,\\ \operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 y=6.\end{cases}$$

7. В основании прямой призмы лежит квадрат со стороной 1. Высота призмы равна $\sqrt{7}$. Найдите расстояние между большой диагональю призмы и скрещивающейся с ней диагональю боковой грани.

8. Пусть

$$\begin{aligned}f(x,y)&=\sqrt{-5x^2-13y^2-16xy+2}+y,\\ g(x,y)&=-\sqrt{-5x^2-13y^2-16xy+2}+y.\end{aligned}$$

Найдите все значения, которые может принимать хотя бы одна из этих функций.

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова
Дополнительное вступительное испытание по математике 2014 г. (вариант 143)

1. Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением $\sqrt{6+4\sqrt{2}}\cdot\left(8-4\sqrt{2}\right)$.

2. Найдите максимальное значение функции $\log_{1/2}\left(x^2-8x+20\right)$.

3. Найдите все положительные x, удовлетворяющие неравенству $x^{4x-5}>x^{-2}$.

4. Решите уравнение $\sin^2 x-\sin x\cdot\cos^2\left(\dfrac{5x}{4}-\dfrac{17\pi}{24}\right)+\dfrac{1}{4}=0$.

5. Окружности Ω_1 и Ω_2 с центрами в точках O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке A. Общая внешняя касательная к этим окружностям касается Ω_1 и Ω_2 соответственно в точках B_1 и B_2. Общая касательная к окружностям, проходящая через точку A, пересекает отрезок B_1B_2 в точке C. Прямая, делящая угол ACO_2 пополам, пересекает прямые O_1B_1, O_1O_2, O_2B_2 в точках D_1, L, D_2 соответственно. Найдите отношение $CD_1:CO_1$, если известно, что $LD_2=O_2D_2$.

6. Найдите все положительные x,y, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} x+y^{3/2} & =54,\\ x^{2/3}+y & =18. \end{cases}$$

7. В основании прямой призмы лежит правильный треугольник со стороной 2. Высота призмы равна $\sqrt{3}$. Найдите расстояние между скрещивающимися диагоналями боковых граней.

8. Пусть

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \sqrt{-5x^2-17y^2-18xy+12}+y,\\ g(x,y) &= -\sqrt{-5x^2-17y^2-18xy+12}+y. \end{aligned}$$

Найдите все значения, которые может принимать хотя бы одна из этих функций.

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова
Дополнительное вступительное испытание по математике 2014 г. (вариант 144)

1. Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением $\sqrt{7+2\sqrt{10}}\cdot\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)$.

2. Найдите максимальное значение функции $\log_{1/3}\left(x^2+10x+34\right)$.

3. Найдите все положительные x, удовлетворяющие неравенству $x^{-7x+5}<x^{-4}$.

4. Решите уравнение $\cos^2 x+\sqrt{2}\cdot\left|\cos x\right|\sin\left(\dfrac{5x}{2}-\dfrac{\pi}{8}\right)+\dfrac{1}{2}=0$.

5. Окружности Ω_1 и Ω_2 с центрами в точках O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке A. Общая внешняя касательная к этим окружностям касается Ω_1 в точке B и пересекает в точке C общую касательную этих окружностей, проходящую через точку A. Прямая, делящая угол ACO_1 пополам, пересекает прямые O_1O_2 и BO_1 в точках L и D соответственно. Найдите LO_1, если известно, что $CO_2=2$, а прямые CO_2 и DO_2 перпендикулярны.

6. Найдите все x, y на интервале $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\sin^3 x}+\dfrac{1}{\cos^3 y}=54,\\ \operatorname{ctg}^2 x+\operatorname{tg}^2 y=16.\end{cases}$$

7. В основании прямой призмы лежит квадрат со стороной 1. Высота призмы равна $\sqrt{3}$. Найдите расстояние между большой диагональю призмы и скрещивающейся с ней диагональю боковой грани.

8. Пусть

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \sqrt{-6x^2-11y^2-16xy+5}+y,\\ g(x,y) &= -\sqrt{-6x^2-11y^2-16xy+5}+y. \end{aligned}$$

Найдите все значения, которые может принимать хотя бы одна из этих функций.

Варианты 2015 г.

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова
Дополнительное вступительное испытание по математике 2015 г. (вариант 151)

1. Найдите $f(2)$, если $f(x)=\frac{x}{5}+\frac{3}{x}+\frac{1}{10}$.

2. Найдите сумму квадратов корней уравнения $x^2-7x+5=0$.

3. Решите неравенство $\cos x+\sqrt{2}\cos 2x-\sin x\ge 0$.

4. Решите уравнение $\log_x\left|2x^2-3\right|=4\log_{\left|2x^2-3\right|}x$.

5. Окружность радиуса $3/2$ касается середины стороны BC треугольника ABC и пересекает сторону AB в точках D и E так, что $AD:DE:EB=1:2:1$. Чему может равняться AC, если $\angle BAC=30^\circ$?

6. Велосипедист Василий выехал из пункта А в пункт Б. Проехав треть пути, Василий наткнулся на выбоину, вследствие чего велосипед безнадёжно вышел из строя. Не теряя времени, Василий бросил сломавшийся велосипед и пошёл пешком обратно в пункт А за новым велосипедом. В момент поломки из пункта А выехал мотоциклист Григорий. На каком расстоянии от пункта А он встретит Василия, если пункт Б отстоит от пункта А на 4 км, а Василий доберётся до пункта А тогда же, когда Григорий до пункта Б? Скорости велосипеда, мотоцикла и пешехода считать постоянными.

7. В правильную треугольную призму с основаниями ABC, $A'B'C'$ и рёбрами AA', BB', CC' вписана сфера. Найдите её радиус, если известно, что расстояние между прямыми AE и BD равно $\sqrt{13}$, где E и D – точки, лежащие на $A'B'$ и $B'C'$ соответственно, и $A'E:EB'=B'D:DC'=1:2$.

8. Найдите все пары $(\alpha;\beta)$, при которых достигается минимум выражения

$$\frac{4-3\sin\alpha}{2+\cos 2\alpha}+\frac{2+\cos 2\alpha}{\beta^2+\beta+1}+\frac{\beta^2+\beta+1}{\sqrt{\beta}+1}+\frac{\sqrt{\beta}+1}{4-3\sin\alpha}.$$

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова
Дополнительное вступительное испытание по математике 2015 г. (вариант 152)

1. Найдите $f\left(3\right)$, если $f(x)=\dfrac{x}{4}+\dfrac{5}{x}+\dfrac{7}{12}$.

2. Найдите сумму квадратов корней уравнения $x^2+9x-2=0$.

3. Решите неравенство $\sin x+\sqrt{\dfrac{2}{3}}\cos 2x+\cos x\le 0$.

4. Решите уравнение $\log_{\sqrt{x+1}}\left|4x-1\right|=4\log_{|4x-1|}\sqrt{x+1}$.

5. Окружность радиуса 2 касается середины стороны AC треугольника ABC и пересекает сторону BC в точках K и L так, что $BK=KL=LC$. Чему может равняться AB, если $\angle ABC=45^\circ$?

6. Лыжник Григорий ехал по довольно пологому склону, но проехав две трети пути, проявил неуклюжесть и сломал лыжи. Отбросив их за ненадобностью, он тут же побрёл обратно. В момент поломки с вершины горы стартовал лыжник Василий и, проехав 800 метров, встретил Григория. Найдите длину трассы, если известно, что Василий закончил спуск ровно тогда, когда Григорий добрался до вершины горы. Скорости лыжников и пешехода считать постоянными.

7. В правильную треугольную призму с основаниями ABC, $A'B'C'$ и рёбрами AA', BB', CC' вписана сфера радиуса $\sqrt{21}$. Найдите расстояние между прямыми $A'K$ и $B'L$, где K и L – точки, лежащие на AB и BC соответственно, и $AK:KB=BL:LC=2:3$.

8. Найдите все пары $(x;y)$, при которых достигается минимум выражения

$$\frac{2-\cos x}{2-\cos 2x}+\frac{2-\cos 2\alpha}{\left(y^2+1\right)^2}+\frac{\left(y^2+1\right)^2}{|y|+1}+\frac{|y|+1}{2-\cos x}.$$

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова
Дополнительное вступительное испытание по математике 2015 г. (вариант 153)

1. Найдите $f(5)$, если $f(x)=\dfrac{x}{3}+\dfrac{4}{x}-\dfrac{7}{15}$.

2. Найдите сумму квадратов корней уравнения $x^2-8x-3=0$.

3. Решите неравенство $\cos x-\sqrt{2}\cos 2x+\sin x\le 0$.

4. Решите уравнение $\log_x\left|3x^2-4\right|=4\log_{\left|3x^2-4\right|}x$.

5. Окружность касается середины стороны BC треугольника ABC и пересекает сторону AB в точках D и E так, что $AD:DE:EB=1:2:1$. Чему может равняться радиус окружности, если $\angle BAC=30^\circ$ и $AC=2/3$?

6. Велосипедист Василий выехал из пункта А в пункт Б. Проехав четверть пути, Василий наткнулся на выбоину, вследствие чего велосипед безнадёжно вышел из строя. Не теряя времени, Василий бросил сломавшийся велосипед и пошёл пешком обратно в пункт А за новым велосипедом. В момент поломки из пункта А выехал мотоциклист Григорий и, проехав 4 км, встретил Василия. Найдите расстояние между пунктами А и Б, если известно, что Василий добрался до пункта А тогда же, когда Григорий до пункта Б? Скорости велосипеда, мотоцикла и пешехода считать постоянными.

7. В правильную треугольную призму с основаниями ABC, $A'B'C'$ и рёбрами AA', BB', CC' вписана сфера радиуса $\sqrt{13}$. Найдите расстояние между прямыми AE и BD, где E и D — точки, лежащие на $A'B'$ и $B'C'$ соответственно, и $A'E:EB'=B'D:DC'=1:2$.

8. Найдите все пары $(\alpha;\beta)$, при которых достигается минимум выражения

$$\frac{4-3\cos\alpha}{2-\cos 2\alpha}+\frac{2-\cos 2\alpha}{2\beta^4+\beta^2+1}+\frac{2\beta^4+\beta^2+1}{|\beta|+1}+\frac{|\beta|+1}{4-3\cos\alpha}.$$

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова
Дополнительное вступительное испытание по математике 2015 г. (вариант 154)

1. Найдите $f(3)$, если $f(x)=\frac{x}{7}+\frac{2}{x}-\frac{2}{21}$.

2. Найдите сумму квадратов корней уравнения $x^2+10x+4=0$.

3. Решите неравенство $\cos x-\sqrt{\frac{2}{3}}\cos 2x-\sin x\ge 0$.

4. Решите уравнение $\log_{\sqrt{x+1}}|5x-1|=4\log_{|5x-1|}\sqrt{x+1}$.

5. Окружность касается середины стороны AC треугольника ABC и пересекает сторону BC в точках K и L так, что $BK=KL=LC$. Чему может равняться радиус окружности, если $\angle ABC=45^\circ$ и $AB=1$?

6. Лыжник Григорий ехал по довольно пологому склону, но проехав три четверти пути, проявил неуклюжесть и сломал лыжи. Отбросив их за ненадобностью, он тут же побрёл обратно. В момент поломки с вершины горы стартовал лыжник Василий. На каком расстоянии от вершины он встретит Григория, если длина трассы равна 2100 метров, а Василий закончит спуск ровно тогда, когда Григорий доберётся до вершины горы? Скорости лыжников и пешехода считать постоянными.

7. В правильную треугольную призму с основаниями ABC, $A'B'C'$ и рёбрами AA', BB', CC' вписана сфера. Найдите её радиус, если известно, что расстояние между прямыми $A'K$ и $B'L$ равно $\sqrt{21}$, где K и L – точки, лежащие на AB и BC соответственно, и $AK:KB=BL:LC=2:3$.

8. Найдите все пары $(x;y)$, при которых достигается минимум выражения

$$\frac{2-\sin x}{2+\cos 2x}+\frac{2+\cos 2\alpha}{(y+1)^2}+\frac{(y+1)^2}{2\sqrt{y}+1}+\frac{2\sqrt{y}+1}{2-\sin x}.$$

Варианты 2016 г.

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова
Дополнительное вступительное испытание по математике 2016 г. (вариант 161)

1. Найдите $f\left(\frac{2}{7}\right)$, если $f(x)=\frac{x}{1-x}+\frac{3}{7}$.

2. Разность между наибольшим и наименьшим корнями уравнения $x^2+ax-6=0$ равна 5. Найдите все возможные значения a.

3. Решите уравнение $2\cos^2 x+3\sin 2x=4+3\cos 2x$.

4. Решите неравенство $\log_{1-\log_3 x}\left(1+\log_x^2 3\right)\le 1$.

5. Две окружности касаются внутренним образом в точке T. Хорда AB внешней окружности касается внутренней окружности в точке S. Прямая TS пересекает внешнюю окружность в точках T и C. Найдите площадь четырёхугольника $TACB$, если известно, что $CB=TB=3$, а радиусы окружностей относятся как $5:8$.

6. Ровно в 9:00 из пункта А в пункт Б выехал автомобиль. Проехав две третьих пути, наблюдательный водитель автомобиля заметил, что мимо него в сторону пункта А проехал некий велосипедист. В тот самый момент, когда автомобиль прибыл в пункт Б, из пункта Б в пункт А выехал автобус. Когда до пункта А оставалось две пятых пути, не менее наблюдательный водитель автобуса заметил, что он поравнялся с тем самым велосипедистом. Во сколько приедет велосипедист в пункт А, если известно, что автобус прибыл в пункт А ровно в 11:00? Скорости велосипедиста, автомобиля и автобуса считать постоянными.

7. В основании правильной пирамиды с вершиной S лежит шестиугольник $ABCDEF$ со стороной 14. Плоскость π параллельна ребру AB, перпендикулярна плоскости DES и пересекает ребро BC в точке K так, что $BK:KC=3:4$. Кроме того, прямые, по которым π пересекает плоскости BCS и AFS, параллельны. Найдите площадь треугольника, отсекаемого плоскостью π от грани CDS.

8. Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{106+\log_a^2\cos ax+\log_a\cos^{10}ax}+\sqrt{58+\log_a^2\sin ax-\log_a\sin^6 ax}$$
$$+\sqrt{5+\log_a^2\operatorname{tg} ax+\log_a\operatorname{tg}^2 ax}$$

и все пары $(a;x)$, при которых оно достигается.

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова
Дополнительное вступительное испытание по математике 2016 г. (вариант 162)

1. Найдите $f\left(\frac{7}{3}\right)$, если $f(x)=\frac{x}{x-1}+\frac{5}{3}$.

2. Разность между наибольшим и наименьшим корнями уравнения $x^2+ax-10=0$ равна 7. Найдите все возможные значения a.

3. Решите уравнение $8\cos^2 x+\sin 2x=3+2\cos 2x$.

4. Решите неравенство $\log_{1-\log_x 2}\left(1+\log_2^2 x\right)\le 1$.

5. Две окружности касаются внутренним образом в точке A. Хорда BC внешней окружности касается внутренней окружности в точке D. Прямая AD пересекает внешнюю окружность в точках A и E. Найдите BE, если известно, что $EC=CA$, площадь четырёхугольника $ABEC$ равна $3\sqrt{3}$, а радиусы окружностей относятся как $2:3$.

6. Ровно в 10:00 из пункта А в пункт Б выехала маршрутка. Проехав треть пути, наблюдательный водитель маршрутки заметил, что мимо него в сторону пункта А проехал некий велосипедист. В тот самый момент, когда маршрутка прибыла в пункт Б, из пункта Б в пункт А выехал грузовик. Когда до пункта А оставалась шестая часть пути, не менее наблюдательный водитель грузовика заметил, что он поравнялся с тем самым велосипедистом. Во сколько приехал грузовик в пункт А, если известно, что велосипедист прибыл в пункт А ровно в 15:00? Скорости велосипедиста, маршрутки и грузовика считать постоянными.

7. В основании правильной пирамиды с вершиной V лежит шестиугольник $KLMNOP$ со стороной 5. Плоскость π параллельна ребру KL, перпендикулярна плоскости NOV и пересекает ребро LM в точке T так, что $LT:TM=3:2$. Кроме того, прямые, по которым π пересекает плоскость LMV и плоскость основания, перпендикулярны. Найдите площадь треугольника, отсекаемого плоскостью π от грани MNV.

8. Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{13+\log_a^2\cos\frac{x}{a}+\log_a\cos^4\frac{x}{a}}+\sqrt{97+\log_a^2\sin\frac{x}{a}-\log_a\sin^8\frac{x}{a}}$$
$$+\sqrt{20+\log_a^2\operatorname{tg}\frac{x}{a}+\log_a\operatorname{tg}^4\frac{x}{a}}$$

и все пары $(a;x)$, при которых оно достигается.

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова
Дополнительное вступительное испытание по математике 2016 г. (вариант 163)

1. Найдите $f\left(\frac{3}{5}\right)$, если $f(x)=\frac{x}{1-x}-\frac{5}{7}$.

2. Разность между наибольшим и наименьшим корнями уравнения $x^2+ax+6=0$ равна 1. Найдите все возможные значения a.

3. Решите уравнение $6\cos^2 x+3\cos 2x=5\sin 2x-2$.

4. Решите неравенство $\log_{1+\log_5 x}\left(1+\log_x^2 5\right)\le 1$.

5. Две окружности касаются внутренним образом в точке S. Хорда AB внешней окружности касается внутренней окружности в точке T. Прямая ST пересекает внешнюю окружность в точках S и C. Найдите площадь четырёхугольника $SACB$, если известно, что $CA=5$, $CB \parallel AS$, а радиусы окружностей относятся как $11:16$.

6. Ровно в 11:00 из пункта А в пункт Б выехал велосипедист. Проехав две пятых пути, наблюдательный велосипедист заметил, что мимо него в сторону пункта А прошёл некий пешеход. В тот самый момент, когда велосипедист прибыл в пункт Б, из пункта Б в пункт А выехал мотоциклист. Когда до пункта А оставалось две седьмых пути, не менее наблюдательный мотоциклист заметил, что он поравнялся с тем самым пешеходом. Во сколько придёт пешеход в пункт А, если известно, что мотоциклист прибыл в пункт А ровно в 12:00? Скорости пешехода, велосипедиста и мотоциклиста считать постоянными.

7. В основании правильной пирамиды с вершиной S лежит шестиугольник $ABCDEF$ со стороной 20. Плоскость π параллельна ребру BC, перпендикулярна плоскости EFS и пересекает ребро CD в точке K так, что $CK:KD=2:3$. Кроме того, прямые, по которым π пересекает плоскости CDS и ABS, параллельны. Найдите площадь треугольника, отсекаемого плоскостью π от грани DES.

8. Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{157+\log_a^2\cos\frac{x}{a}-\log_a\cos^{12}\frac{x}{a}}+\sqrt{29+\log_a^2\sin\frac{x}{a}+\log_a\sin^4\frac{x}{a}}$$
$$+\sqrt{47+\log_a^2\operatorname{tg}\frac{x}{a}-\log_a\operatorname{tg}^6\frac{x}{a}}$$

и все пары $(a;x)$, при которых оно достигается.

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова
Дополнительное вступительное испытание по математике 2016 г. (вариант 164)

1. Найдите $f\left(\frac{5}{3}\right)$, если $f(x)=\frac{x}{x-1}-\frac{4}{9}$.

2. Разность между наибольшим и наименьшим корнями уравнения $x^2+ax+10=0$ равна 3. Найдите все возможные значения a.

3. Решите уравнение $2\cos 2x+3\sin 2x+4\cos^2 x=-1$.

4. Решите неравенство $\log_{1+\log_x 7}\left(1+\log_7^2 x\right)\le 1$.

5. Две окружности касаются внутренним образом в точке P. Хорда QR внешней окружности касается внутренней окружности в точке S. Прямая PS пересекает внешнюю окружность в точках P и T. Найдите QT, если известно, что $PQ \parallel RT$, площадь четырёхугольника $PQTR$ равна $5\sqrt{5}$, а радиусы окружностей относятся как $7:10$.

6. Ровно в 13:00 из пункта А в пункт Б выехал мотоциклист. Проехав четверть пути, наблюдательный мотоциклист заметил, что мимо него в сторону пункта А прошёл некий пешеход. В тот самый момент, когда мотоциклист прибыл в пункт Б, из пункта Б в пункт А выехал автомобиль. Когда до пункта А оставалось пятая часть пути, не менее наблюдательный водитель автомобиля заметил, что он поравнялся с тем самым пешеходом. Во сколько приехал автомобиль в пункт А, если известно, что пешеход прибыл в пункт А ровно в 17:00? Скорости пешехода, мотоцикла и автомобиля считать постоянными.

7. В основании правильной пирамиды с вершиной V лежит шестиугольник $KLMNOP$ со стороной 10. Плоскость π параллельна ребру LM, перпендикулярна плоскости OPV и пересекает ребро MN в точке T так, что $MT:TN=1:4$. Кроме того, прямые, по которым π пересекает плоскость MNV и плоскость основания, перпендикулярны. Найдите площадь треугольника, отсекаемого плоскостью π от грани NOV.

8. Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{65+\log_a^2\cos ax-\log_a\cos^8 ax}+\sqrt{10+\log_a^2\sin ax+\log_a\sin^2 ax}$$
$$+\sqrt{125+\log_a^2\operatorname{tg} ax-\log_a\operatorname{tg}^{10} ax}$$

и все пары $(a;x)$, при которых оно достигается.

Варианты 2017 г.

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова
Дополнительное вступительное испытание по математике 2017 г. (вариант 171)

1. Какое число больше: $\sqrt{\frac{6}{7}+7+\frac{7}{6}}$ или 3?

2. Известно, что $a+b+c=5$ и $ab+bc+ac=4$. Найдите $a^2+b^2+c^2$.

3. Решите уравнение $\sin 7x+\sin 6x=\sin x$.

4. Решите неравенство $x^2\log_7^2 x+3\log_6^2 x\le x\log_7 x\cdot\log_6 x^4$.

5. Через вершины A и B треугольника ABC проведена окружность, касающаяся прямых AC и BC. На этой окружности выбрана точка D (внутри треугольника), лежащая на расстоянии $\sqrt{2}$ от прямой AB и на расстоянии $\sqrt{5}$ от прямой BC. Найдите угол $\angle DBC$, если известно, что $\angle ABD=\angle BCD$.

6. Василий с друзьями решили устроить пикник. Для этого им от пункта А нужно добраться вниз по реке до пункта В, причём в их распоряжении было два катера. Считая себя самым ответственным, Василий вызвался самостоятельно доехать до пункта В на более быстроходном катере и начать готовить место для пикника. Оба катера вышли одновременно из пункта А. Однако, промчавшись восемь километров, Василий заметил на берегу машущего ему рукой Григория, который просил по старой дружбе довести его до пункта С. И хоть пункт С Василий уже проехал, он согласился. По пути в пункт С Василий с Григорием встретили идущий навстречу второй катер с друзьями Василия, откуда те крикнули, что им до пункта В осталась треть пути и чтобы Василий нигде не задерживался. Доставив Григория в пункт С, Василий немедленно помчался догонять друзей. Найдите расстояние между пунктами В и С, если известно, что оба катера пришли в пункт В одновременно, скорости катеров постоянны, а Василий действительно нигде не задерживался.

7. Из вершины D пирамиды $ABCD$ на плоскость основания ABC опущена высота DH. Найдите объём этой пирамиды, если известно, что площади треугольников HBC, HAC, HAB равны соответственно $\frac{2}{9},\frac{1}{3},\frac{4}{9}$ и что все три плоских угла при вершине D прямые.

8. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x}{\cos\left(x^2-y^2\right)}-y\cdot\operatorname{tg}\left(x^2-y^2\right) & =\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}, \\ \dfrac{y}{\cos\left(x^2-y^2\right)}-x\cdot\operatorname{tg}\left(x^2-y^2\right) & =\sqrt{\dfrac{\pi}{3}}. \end{cases}$$

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова
Дополнительное вступительное испытание по математике 2017 г. (вариант 172)

1. Какое число больше: $\sqrt{\frac{7}{8}+7+\frac{8}{7}}$ или 3?

2. Известно, что $a+b+c=6$ и $a^2+b^2+c^2=16$. Найдите $ab+bc+ac$.

3. Решите уравнение $\cos 6x+\cos 5x=\sin x$.

4. Решите неравенство $x^2\log_6^2 x+6\log_5^2 x\le x\log_6 x\cdot\log_5 x^5$.

5. Через вершины K и L треугольника KLM проведена окружность, касающаяся прямых KM и LM. На этой окружности выбрана точка S (внутри треугольника), лежащая на расстоянии 1 от прямой KL. Найдите расстояние от точки S до прямой LM, если известно, что $\angle KLS=\angle LMS$ и что $\angle SLM=45^\circ$.

6. Анатолий с друзьями решили устроить пикник. Для этого им от пункта А нужно добраться вверх по реке до пункта В, причём в их распоряжении было два катера. Считая себя самым ответственным, Анатолий вызвался самостоятельно доехать до пункта В на более быстроходном катере и начать готовить место для пикника. Оба катера вышли одновременно из пункта А. Однако, промчавшись 8 км, Анатолий заметил на берегу машущего ему рукой Бориса, который просил по старой дружбе довести его до пункта С. И хоть пункт С Анатолий уже проехал, он согласился. По пути в пункт С Анатолий с Борисом встретили идущий навстречу второй катер с друзьями Анатолий, откуда те крикнули, что пункт В уже совсем близко и чтобы Анатолий нигде не задерживался. Доставив Бориса в пункт С, Анатолий немедленно помчался догонять друзей. Определите, какую долю пути оставалось пройти друзьям Анатолия от момента встречи с ним и Борисом, если известно, что оба катера пришли в пункт В одновременно, расстояние между пунктами В и С равно 2 км, скорости катеров постоянны, а Анатолий действительно нигде не задерживался.

7. Из вершины S пирамиды $KLMS$ на плоскость основания KLM опущена высота SH. Найдите объём этой пирамиды, если известно, что площади треугольников HLM, HKM, HKL равны соответственно $\frac{2}{10},\frac{3}{10},\frac{1}{2}$ и что все три плоских угла при вершине S прямые.

8. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{x}{\sin\left(x^2-y^2\right)}+y\cdot\operatorname{ctg}\left(x^2-y^2\right)=\sqrt{\dfrac{2\pi}{3}},\\[2ex]\dfrac{y}{\sin\left(x^2-y^2\right)}+x\cdot\operatorname{ctg}\left(x^2-y^2\right)=-\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}.\end{cases}$$

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова
Дополнительное вступительное испытание по математике 2017 г. (вариант 173)

1. Какое число больше: $\sqrt{\frac{7}{9}+7+\frac{9}{7}}$ или 3?

2. Известно, что $a+b+c=4$ и $ab+bc+ac=5$. Найдите $a^2+b^2+c^2$.

3. Решите уравнение $\sin 8x-\sin 7x=\sin x$.

4. Решите неравенство $x^2\log_5^2 x+5\log_4^2 x\le x\log_5 x\cdot\log_4 x^6$.

5. Через вершины A и C треугольника ABC проведена окружность, касающаяся прямых AB и BC. На этой окружности выбрана точка D (внутри треугольника), лежащая на расстоянии 1 от прямой AC и на расстоянии $\sqrt{7}$ от прямой AB. Найдите угол $\angle DAB$, если известно, что $\angle CAD=\angle ABD$.

6. Григорий с друзьями решили устроить пикник. Для этого им от пункта А нужно добраться вниз по реке до пункта В, причём в их распоряжении было два катера. Считая себя самым ответственным, Григорий вызвался самостоятельно доехать до пункта В на более быстроходном катере и начать готовить место для пикника. Оба катера вышли одновременно из пункта А. Однако, промчавшись шесть километров, Григорий заметил на берегу машущего ему рукой Василия, который просил по старой дружбе довести его до пункта С. И хоть пункт С Григорий уже проехал, он согласился. По пути в пункт С Григорий с Василием встретили идущий навстречу второй катер с друзьями Григория, откуда те крикнули, что им до пункта В осталась четверть пути и чтобы Григорий нигде не задерживался. Доставив Василия в пункт С, Григорий немедленно помчался догонять друзей. Найдите расстояние между пунктами В и С, если известно, что оба катера пришли в пункт В одновременно, скорости катеров постоянны, а Григорий действительно нигде не задерживался.

7. Из вершины D пирамиды $ABCD$ на плоскость основания ABC опущена высота DH. Найдите объём этой пирамиды, если известно, что площади треугольников ΔHBC, ΔHAC, ΔHAB равны соответственно $\frac{2}{11},\frac{4}{11},\frac{5}{11}$ и что все три плоских угла при вершине D прямые.

8. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{x}{\cos\left(x^2-y^2\right)}+y\cdot\operatorname{tg}\left(x^2-y^2\right)=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}},\\ \dfrac{y}{\cos\left(x^2-y^2\right)}+x\cdot\operatorname{tg}\left(x^2-y^2\right)=-\sqrt{\dfrac{\pi}{6}}.\end{cases}$$

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова
Дополнительное вступительное испытание по математике 2017 г. (вариант 174)

1. Какое число больше: $\sqrt{\frac{8}{9}+7+\frac{9}{8}}$ или 3?

2. Известно, что $a+b+c=7$ и $a^2+b^2+c^2=19$. Найдите $ab+bc+ac$.

3. Решите уравнение $\cos 8x-\cos 9x=\sin x$.

4. Решите неравенство $x^2\log_4^2 x+10\log_3^2 x\le x\log_4 x\cdot\log_3 x^7$.

5. Через вершины M и K треугольника KLM проведена окружность, касающаяся прямых ML и KL. На этой окружности выбрана точка S (внутри треугольника), лежащая на расстоянии $\sqrt{2}$ от прямой MK. Найдите расстояние от точки S до прямой KL, если известно, что $\angle MKS=\angle KLS$ и что $\angle SKL=60^\circ$.

6. Борис с друзьями решили устроить пикник. Для этого им от пункта А нужно добраться вверх по реке до пункта В, причём в их распоряжении было два катера. Считая себя самым ответственным, Борис вызвался самостоятельно доехать до пункта В на более быстроходном катере и начать готовить место для пикника. Оба катера вышли одновременно из пункта А. Однако, промчавшись 10 км, Борис заметил на берегу машущего ему рукой Анатолия, который просил по старой дружбе довести его до пункта С. И хоть пункт С Борис уже проехал, он согласился. По пути в пункт С Борис с Анатолием встретили идущий навстречу второй катер с друзьями Бориса, откуда те крикнули, что пункт В уже совсем близко и чтобы Борис нигде не задерживался. Доставив Анатолия в пункт С, Борис немедленно помчался догонять друзей. Определите, какую долю пути оставалось пройти друзьям Бориса от момента встречи с ним и Анатолием, если известно, что оба катера пришли в пункт В одновременно, расстояние между пунктами В и С равно 2 км, скорости катеров постоянны, а Борис действительно нигде не задерживался.

7. Из вершины S пирамиды $KLMS$ на плоскость основания KLM опущена высота SH. Найдите объём этой пирамиды, если известно, что площади треугольников HLM, HKM, HKL равны соответственно $\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{5}{12}$, и что все три плоских угла при вершине S прямые.

8. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{x}{\sin\left(x^2-y^2\right)}-y\cdot\operatorname{ctg}\left(x^2-y^2\right)=\sqrt{\dfrac{5\pi}{6}},\\[2mm] \dfrac{y}{\sin\left(x^2-y^2\right)}-x\cdot\operatorname{ctg}\left(x^2-y^2\right)=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}.\end{cases}$$

Варианты 2018 г.

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова
Дополнительное вступительное испытание по математике 2018 г. (вариант 181)

1. Какое из чисел $\frac{49}{18}$ и $\frac{79}{24}$ ближе к 3?

2. Найдите все значения параметра a, при которых разность между корнями уравнения $x^2+3ax+a^4=0$ максимальна.

3. Решите уравнение $\sin 4x\cdot\cos 10x=\sin x\cdot\cos 7x$.

4. Решите неравенство $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{\log_{\sqrt{3}-\sqrt{2}}x}\geq\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{\log_x\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}$.

5. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Пусть M – середина отрезка AD, а N – произвольная точка отрезка BC. Пусть K – пересечение отрезков CM и DN, а L – пересечение отрезков MN и AC. Найдите все возможные значения площади треугольника DMK, если известно, что $AD:BC=3:2$, а площадь треугольника ABL равна 4.

6. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} ax^2+4ax-8y+6a+28 \leq 0, \\ ay^2-6ay-8x+11a-12 \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

7. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$ с боковыми рёбрами AA', BB', CC', DD'. На рёбрах AB, BC, CD, DA нижнего основания отмечены соответственно точки K,L,M,N таким образом, что $AK:KB=4:5$, $BL:LC=3:1$, $CM:MD=7:2$, $DN:NA=3:1$. Пусть P,Q,R — центры сфер, описанных около тетраэдров $AKNA'$, $BLKB'$, $CMLC'$ соответственно. Найдите PQ, если известно, что $QR=1$ и $AB:BC=3:2$.

8. Найдите все пары чисел x,y из промежутка $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, при которых достигается минимум выражения

$$\left(\frac{\sqrt{3}\sin y}{\sqrt{2}\sin(x+y)}+1\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}\sin x}{3\sin y}+1\right)^2\cdot\left(\frac{\sin(x+y)}{7\sqrt{3}\sin x}+1\right)^4.$$

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова
Дополнительное вступительное испытание по математике 2018 г. (вариант 182)

1. Какое из чисел $\dfrac{49}{32}$ и $\dfrac{59}{24}$ ближе к 2?

2. Найдите все значения параметра p, при которых разность между корнями уравнения $x^2+px+3p^4=0$ максимальна.

3. Решите уравнение $\cos 10x\cdot\cos 7x=\cos 4x\cdot\cos x$.

4. Решите неравенство $\left(2+\sqrt{3}\right)^{\log_{2-\sqrt{3}}x}\geq\left(2-\sqrt{3}\right)^{\log_x\left(2+\sqrt{3}\right)}$.

5. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Пусть M – середина отрезка AD, а N – произвольная точка отрезка BC. Пусть K – пересечение отрезков CM и DN, а L – пересечение отрезков MN и AC. Найдите все возможные значения площади треугольника ABL, если известно, что $AD:BC=5:2$, а площадь треугольника DMK равна 5.

6. Найдите все значения параметра p, при которых система

$$\begin{cases} px^2+6px-12y+11p+18 \leq 0, \\ py^2-2py-12x+3p-30 \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

7. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$ с боковыми рёбрами AA', BB', CC', DD'. На рёбрах AB, BC, CD, DA нижнего основания отмечены соответственно точки K,L,M,N таким образом, что $AK:KB=7:9$, $BL:LC=2:1$, $CM:MD=3:1$, $DN:NA=2:1$. Пусть P,Q,R — центры сфер, описанных около тетраэдров $AKNA'$, $BLKB'$, $CMLC'$ соответственно. Найдите PQ, если известно, что $QR=1$ и $AB:BC=4:3$.

8. Найдите все пары чисел x,y из промежутка $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$, при которых достигается минимум выражения

$$\left(\frac{\sqrt{5}\cos y}{2\sin(x+y)}+1\right)\cdot\left(\frac{2\cos x}{3\cos y}+1\right)^2\cdot\left(\frac{\sin(x+y)}{7\sqrt{5}\cos x}+1\right)^4.$$

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова
Дополнительное вступительное испытание по математике 2018 г. (вариант 183)

1. Какое из чисел $\frac{55}{21}$ и $\frac{95}{28}$ ближе к 3?

2. Найдите все значения параметра a, при которых разность между корнями уравнения $x^2+5ax+a^4=0$ максимальна.

3. Решите уравнение $\sin 7x\cdot\cos 11x=\sin x\cdot\cos 5x$.

4. Решите неравенство $\left(\sqrt{5}+2\right)^{\log_{\sqrt{5}-2}x}\ge\left(\sqrt{5}-2\right)^{\log_x\left(\sqrt{5}+2\right)}$.

5. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Пусть M – середина отрезка AD, а N – произвольная точка отрезка BC. Пусть K – пересечение отрезков CM и DN, а L – пересечение отрезков MN и AC. Найдите все возможные значения площади треугольника DMK, если известно, что $AD:BC=4:3$, а площадь треугольника ABL равна 3.

6. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} ax^2+2ax+8y+3a-36 \ge 0, \\ ay^2-8ay+8x+18a+4 \ge 0 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

7. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$ с боковыми рёбрами AA', BB', CC', DD'. На рёбрах AB, BC, CD, DA нижнего основания отмечены соответственно точки K, L, M, N таким образом, что $AK:KB=5:4$, $BL:LC=CM:MD=2:1$, $DN:NA=5:1$. Пусть P, Q, R — центры сфер, описанных около тетраэдров $AKNA'$, $BLKB'$, $CMLC'$ соответственно. Найдите QR, если известно, что $PQ=1$ и $AB:BC=3:2$.

8. Найдите все пары чисел x, y из промежутка $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, при которых достигается минимум выражения

$$\left(\frac{\sqrt{6}\sin y}{\sqrt{5}\sin(x+y)}+1\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{5}\sin x}{3\sin y}+1\right)^2\cdot\left(\frac{\sin(x+y)}{7\sqrt{6}\sin x}+1\right)^4.$$

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова
Дополнительное вступительное испытание по математике 2018 г. (вариант 184)

1. Какое из чисел $\frac{53}{36}$ и $\frac{68}{27}$ ближе к 2?

2. Найдите все значения параметра p, при которых разность между корнями уравнения $x^2+px+5p^4=0$ максимальна.

3. Решите уравнение $\cos 12x\cdot\cos 5x=\cos 8x\cdot\cos x$.

4. Решите неравенство $\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)^{\log_{\sqrt{6}-\sqrt{5}}x}\geq\left(\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)^{\log_x\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)}$.

5. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Пусть M — середина отрезка AD, а N — произвольная точка отрезка BC. Пусть K — пересечение отрезков CM и DN, а L — пересечение отрезков MN и AC. Найдите все возможные значения площади треугольника ABL, если известно, что $AD:BC=4:5$, а площадь треугольника DMK равна 2.

6. Найдите все значения параметра p, при которых система

$$\begin{cases} px^2+8px+12y+18p-30 & \geq 0,\\ py^2-4py+12x+6p+42 & \geq 0\end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

7. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$ с боковыми рёбрами AA', BB', CC', DD'. На рёбрах AB, BC, CD, DA нижнего основания отмечены соответственно точки K, L, M, N таким образом, что $AK:KB=9:7$, $BL:LC=7:5$, $CM:MD=5:3$, $DN:NA=3:1$. Пусть P, Q, R — центры сфер, описанных около тетраэдров $AKNA'$, $BLKB'$, $CMLC'$ соответственно. Найдите QR, если известно, что $PQ=1$ и $AB:BC=4:3$.

8. Найдите все пары чисел x, y из промежутка $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, при которых достигается минимум выражения

$$\left(\frac{\sqrt{7}\cos y}{\sqrt{6}\sin(x+y)}+1\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{6}\cos x}{3\cos y}+1\right)^2\cdot\left(\frac{\sin(x+y)}{7\sqrt{7}\cos x}+1\right)^4.$$

Варианты 2019 г.

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова
Дополнительное вступительное испытание по математике 2019 г. (вариант 191)

1. Найдите наибольшее целое число, не превосходящее $\sqrt{2019\cdot 2029-2016\cdot 2032}$.

2. Найдите $a+b+c$, если известно, что $a+2b=3$, $b+2c=4$, $c+2a=5$.

3. Решите уравнение $7\sin x+2\cos 2x=5$.

4. Решите неравенство $2^{\log_2^2 x}+7x^{\log_2 x}<16$.

5. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC отмечены точки D и E таким образом, что $AD:DB=BE:EA=1:4$. Найдите AB, если известно, что площадь треугольника ABC равна 18, а тангенс угла $\angle DCE$ равен $5/3$.

6. Найдите все пары вещественных чисел (a,b), при которых неравенство

$$2a(x+2)^4+9b(x-2)^4\ge x^4+24x^2+16$$

справедливо для всех вещественных x.

7. Плоскость π проходит через три вершины прямоугольного параллелепипеда, отсекая от него тетраэдр. Два шара максимально возможных радиусов находятся внутри сферы, описанной около этого параллелепипеда, по разные стороны от плоскости π. Найдите отношение радиусов этих шаров, если известно, что рёбра параллелепипеда равны $1,\sqrt{2},2$.

8. Найдите все x, y из полуинтервала $(-\pi,\pi]$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} 10\sqrt{6}\sin x+5\sin y+4\sqrt{3}\sin\dfrac{x+y}{2}=6\sqrt{6}, \\ 5\sin x\sin y+4\sqrt{3}\sin x\sin\dfrac{x+y}{2}+\sqrt{2}\sin y\sin\dfrac{x+y}{2}=\dfrac{6\sqrt{6}}{5}. \end{cases}$$

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова
Дополнительное вступительное испытание по математике 2019 г. (вариант 192)

1. Найдите наибольшее целое число, не превосходящее $\sqrt{2019\cdot 2031-2017\cdot 2033}$.

2. Найдите $a+b+c$, если известно, что $a+3b=2$, $b+3c=4$, $c+3a=6$.

3. Решите уравнение $5\sin x+3\cos 2x=4$.

4. Решите неравенство $3^{\log_3^2 x}+5x^{\log_3 x}<18$.

5. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC отмечены точки D и E таким образом, что $AD:DB=BE:EA=1:5$. Найдите AB, если известно, что площадь треугольника ABC равна 30, а тангенс угла $\angle DCE$ равен 2.

6. Найдите все пары вещественных чисел (a,b), при которых неравенство

$$3a(x+3)^4+8b(x-3)^4\geq x^4+54x^2+81$$

справедливо для всех вещественных x.

7. Плоскость π проходит через три вершины прямоугольного параллелепипеда, отсекая от него тетраэдр. Два шара максимально возможных радиусов находятся внутри сферы, описанной около этого параллелепипеда, по разные стороны от плоскости π. Найдите отношение радиусов этих шаров, если известно, что рёбра параллелепипеда равны 1, 2, 4.

8. Найдите все x, y из полуинтервала $(-\pi,\pi]$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} 28\sqrt{3}\cos x+7\cos y+4\sqrt{6}\cos\dfrac{x+y}{2}=12\sqrt{3}, \\ 7\cos x\cos y+4\sqrt{6}\cos x\cos\dfrac{x+y}{2}+\sqrt{2}\cos y\cos\dfrac{x+y}{2}=\dfrac{12\sqrt{3}}{7}. \end{cases}$$

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова
Дополнительное вступительное испытание по математике 2019 г. (вариант 193)

1. Найдите наибольшее целое число, не превосходящее $\sqrt{2019\cdot 2009-2007\cdot 2021}$.

2. Найдите $a+b+c$, если известно, что $a+2b=4$, $b+2c=5$, $c+2a=6$.

3. Решите уравнение $7\sin x+4\cos 2x=3$.

4. Решите неравенство $7^{\log_7^2 x}+2x^{\log_7 x}<21$.

5. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC отмечены точки D и E таким образом, что $AD:DB=BE:EA=1:6$. Найдите AB, если известно, что площадь треугольника ABC равна 42, а тангенс угла $\angle DCE$ равен $5/2$.

6. Найдите все пары вещественных чисел (a,b), при которых неравенство

$$4a(x+2)^4+7b(x-2)^4\le x^4+24x^2+16$$

справедливо для всех вещественных x.

7. Плоскость π проходит через три вершины прямоугольного параллелепипеда, отсекая от него тетраэдр. Два шара максимально возможных радиусов находятся внутри сферы, описанной около этого параллелепипеда, по разные стороны от плоскости π. Найдите отношение радиусов этих шаров, если известно, что рёбра параллелепипеда равны $1, \sqrt{3}, 3$.

8. Найдите все x, y из полуинтервала $(-\pi,\pi]$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} 24\sqrt{7}\sin x+8\sin y+3\sqrt{14}\sin\dfrac{x+y}{2}=9\sqrt{7}, \\ 8\sin x\sin y+3\sqrt{14}\sin x\sin\dfrac{x+y}{2}+\sqrt{2}\sin y\sin\dfrac{x+y}{2}=\dfrac{9\sqrt{7}}{8}. \end{cases}$$

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова
Дополнительное вступительное испытание по математике 2019 г. (вариант 194)

1. Найдите наибольшее целое число, не превосходящее $\sqrt{2019\cdot 2007-2006\cdot 2020}$.

2. Найдите $a+b+c$, если известно, что $a+3b=1$, $b+3c=2$, $c+3a=5$.

3. Решите уравнение $5\sin x+7\cos 2x=6$.

4. Решите неравенство $5^{\log_5^2 x}+3x^{\log_5 x}<20$.

5. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC отмечены точки D и E таким образом, что $AD:DB=BE:EA=1:7$. Найдите AB, если известно, что площадь треугольника ABC равна 56, а тангенс угла $\angle DCE$ равен 3.

6. Найдите все пары вещественных чисел (a,b), при которых неравенство

$$5a(x+3)^4+6b(x-3)^4\le x^4+54x^2+81$$

справедливо для всех вещественных x.

7. Плоскость π проходит через три вершины прямоугольного параллелепипеда, отсекая от него тетраэдр. Два шара максимально возможных радиусов находятся внутри сферы, описанной около этого параллелепипеда, по разные стороны от плоскости π. Найдите отношение радиусов этих шаров, если известно, что рёбра параллелепипеда равны $1,\sqrt{5},5$.

8. Найдите все x, y из полуинтервала $(-\pi,\pi]$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} 36\sqrt{5}\cos x+9\cos y+4\sqrt{10}\cos\dfrac{x+y}{2}=12\sqrt{5}, \\ 9\cos x\cos y+4\sqrt{10}\cos x\cos\dfrac{x+y}{2}+\sqrt{2}\cos y\cos\dfrac{x+y}{2}=\dfrac{4\sqrt{5}}{3}. \end{cases}$$

Варианты 2020 г.

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова
Дополнительное вступительное испытание по математике 2020 г. (вариант 201)

1. Известно, что $f(x)=\dfrac{x}{1+x}+\dfrac{1-x}{x}-\dfrac{1}{24}$. Найдите $f\left(\dfrac{3}{5}\right)$.

2. Найдите сумму всех натуральных чисел, не превосходящих 105, которые делятся на 3, но не делятся на 5.

3. Решите уравнение $\operatorname{tg}2x=2\cos 2x\operatorname{ctg}x$.

4. Решите неравенство $\log_{2x}16-\log_{4x}8\le 1$.

5. В равнобедренном треугольнике ABC с равными сторонами AB и BC проведены биссектрисы AD и CE. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB и BC в точках K и L соответственно. Найдите DE, если $AC=12$ и $KL=9$.

6. Дана треугольная призма $ABCA'B'C'$ с основанием ABC и боковыми рёбрами AA', BB', CC'. На диагоналях AB', BC', CA' отмечены точки D, E, F соответственно. Найдите отношение, в котором плоскость DEF делит отрезок AA', если $AD:DB'=1:1$, $BE:EC'=1:2$, $CF:FA'=1:3$.

7. Найдите все положительные значения параметра a, при которых уравнение

$$\log_{2-x}\left(a^{2+x}+2a^{1-x}+x-1\right)+\log_{2+x}\left(a^{2-x}+2a^{1+x}-x-1\right)=2$$

имеет ровно одно решение (относительно x).

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова
Дополнительное вступительное испытание по математике 2020 г. (вариант 202)

1. Известно, что $f(x)=\sqrt{\frac{1}{x+4}+\frac{1}{x-3}+\frac{19}{x}}$. Найдите $f(12)$.

2. Дана возрастающая геометрическая прогрессия $b_1, b_2, b_3, \ldots$, состоящая из положительных чисел. Известно, что сумма первого и третьего членов этой прогрессии равна второму члену, умноженному на $10/3$. Найдите отношение $b_6+b_7+b_8+b_9+b_{10}$ к $b_1+b_2+b_3+b_4+b_5$.

3. Решите уравнение $\sin x+\cos x=2\sqrt{2}\sin x\cos x$.

4. Решите неравенство $\log_{\left|2x-\frac{1}{2}\right|}\left(x+1+\frac{1}{x}\right)\geq\log_{\left|2x-\frac{1}{2}\right|}\left(x^2+1+\frac{1}{x^2}\right)$.

5. На высоте AH остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность. Эта окружность пересекает стороны AB и AC в точках D и E соответственно. Найдите отношение $BH:HC$, если $BD:DA=2:1$ и $AE:EC=3:1$.

6. Дан тетраэдр $ABCD$. Известно, что $AB=BC=CD=5$ и $CA=AD=DB=6$. Найдите косинус угла между рёбрами BC и AD.

7. Найдите все пары положительных чисел $(x;y)$, удовлетворяющих уравнению

$$\log_{2x^2y+1}\left(x^4+y^2+1\right)=\log_{y^4+x^2+1}\left(2xy^2+1\right).$$

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова
Дополнительное вступительное испытание по математике 2020 г. (вариант 203)

1. Найдите целое число, задаваемое выражением

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^2.$$

2. Числа $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{20}$ образуют арифметическую прогрессию. Известно, что сумма первых десяти членов этой прогрессии равна 9, а сумма последних десяти членов равна 11. Найдите сумму $a_6+a_7+\ldots+a_{14}+a_{15}$.

3. Решите уравнение $\cos x\cdot(2\cos x-\cos 3x)=1$.

4. Решите неравенство $3^x-2^{x+1}\le\sqrt{2\cdot 9^x-10\cdot 6^x+2^{2x+3}}$.

5. В прямоугольном треугольнике ABC с острым углом C проведены биссектриса AL и высота CH. Найдите косинус угла BAC, если $HL \parallel AC$.

6. Дана куб $ABCDA'B'C'D'$ с основанием $ABCD$ и боковыми рёбрами AA', BB', CC', DD'. Найдите объём многогранника с вершинами, являющимися серединами рёбер $AB, AD, AA', CC', C'B', C'D'$, если известно, что ребро куба равно 1.

7. Найдите все значения параметра a из промежутка $[0, 2\pi)$, при которых уравнение

$$\sqrt{\frac{3}{2}x^2-xy+\frac{3}{2}y^2}=x\cos a+y\sin a$$

имеет хотя бы одно решение (x, y), отличное от $(0,0)$.

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова
Дополнительное вступительное испытание по математике 2020 г. (вариант 204)

1. Найдите целое число, задаваемое выражением $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\frac{2}{\sqrt{5}+1}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}+\frac{2}{\sqrt{5}-1}\right)$.

2. Дана арифметическая прогрессия. Её двадцатый член равен 1, а член с номером 2000 равен 199. Найдите член этой прогрессии с номером 2020.

3. Решите уравнение $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}$.

4. Решите неравенство $\log_x\left(\log_{\sqrt{x}}\left(10x-4-4x^2\right)\right)\geq\log_{\sqrt{x}}\left(\log_x\left(10x-4-4x^2\right)\right)$.

5. Окружность, проходящая через вершины A и B прямоугольника $ABCD$, пересекает сторону BC в точке E, а диагональ AC — в точке F. Найдите площадь четырёхугольника $ABEF$, если $BE=8$, $EC=4$, а точки D, F, E лежат на одной прямой.

6. Дана правильная треугольная пирамида. Известно, что центр сферы, описанной около этой пирамиды, равноудалён от боковых рёбер и от плоскости основания пирамиды. Найдите радиус сферы, вписанной в эту пирамиду, если длина ребра её основания равна 12.

7. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$2x^2y^2+x^2y+xy^2+(1-a)\left(x^2+y^2\right)-a(x+y+2)=0$$

имеет ровно одно решение (относительно (x,y)).

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова
Дополнительное вступительное испытание по математике 2020 г. (вариант 205)

1. Найдите целое число, ближайшее к числу $2\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)$.

2. Дана геометрическая прогрессия. Её четвёртый член равен 5, а член с номером 54 равен 160. Найдите член этой прогрессии с номером 64.

3. Решите уравнение $9\operatorname{tg}^2 x-2\cos 2x=2$.

4. Решите неравенство $8+\log_{\sqrt{x}} 8\le 4\log_x \sqrt{17x^2-2}$.

5. Произведение оснований трапеции равно 18. Найдите периметр трапеции, если известно, что в неё вписана окружность, а диагонали трапеции делят среднюю линию на три равные части.

6. В основании четырёхугольной пирамиды $ABCDS$ лежит параллелограмм $ABCD$. На ребре SB отмечена точка E так, что $SE:EB=2:1$. На ребре SD отмечена точка F так, что $SF:FD=1:2$. Найдите отношение, в котором плоскость AEF делит объём пирамиды.

7. Найдите все положительные значения параметра a, при которых сумма различных корней уравнение

$$\log_2(ax)+\log_2(1-x)=\cos\left(\left(x-x^2\right)a\pi\right)$$

максимальна.

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова
Дополнительное вступительное испытание по математике 2020 г. (вариант 206)

1. Найдите наибольшее целое число, не превосходящее $\sqrt{\dfrac{4^3+3^4}{3^4-4^3}}$.

2. Сумма первых ста членов арифметической прогрессии равна 750. Найдите член этой прогрессии с номером 99, если известно, что второй член этой прогрессии равен 7.

3. Решите уравнение $\sin x \cos 3x = \sin 3x \cos 5x$.

4. Решите неравенство $2^{\frac{3+5x}{1+2x}} + 2^{\frac{1+3x}{1+2x}} \le 6\sqrt{2}$.

5. На сторонах AB и AC треугольника ABC отмечены точки D и E соответственно. Точки B, C, E, D лежат на одной окружности. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ADC, если известно, что $\angle CDE = \angle BAC$ и что радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 1.

6. Дан куб $ABCDA'B'C'D'$ с основанием $ABCD$ и боковыми рёбрами AA', BB', CC', DD'. Найдите расстояние между прямой, проходящей через середины рёбер AB и AA', и прямой, проходящей через середины рёбер BB' и $B'C'$, если ребро куба равно 1.

7. Найдите произведение корней уравнения

$$\sin\frac{x^2+x+1}{2x} + \cos\frac{x^2-x+1}{2x} = \frac{x^2-4x+1}{x}\cdot\cos\frac{\pi-2}{4}.$$

Варианты 2021 г.

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова
Дополнительное вступительное испытание по математике 2021 г. (вариант 213)

1. Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением $\left(\dfrac{3\sin\frac{\pi}{2}}{\log_2 16}-\sqrt{\dfrac{4}{9}}\right)^{-1}$.

2. Автовладелец Авдей продал автосалону свой автомобиль за 60% его первоначальной стоимости. Автосалон выставил на продажу этот автомобиль за цену, на 20% большую уплаченной Авдею. Какова доля получившейся цены по отношению к первоначальной?

3. Решите уравнение $2\cdot\dfrac{\sin 3x-\sin x}{\cos 3x+\cos x}=\sqrt{3}\cdot\left(1-\operatorname{tg}^2 x\right)$.

4. Решите неравенство $\log_{x-1}(x+1)-\log_{\sqrt{x+1}}(x-1)\geq 1$.

5. В четырёхугольник $ABCD$ площади 2 вписана окружность, касающаяся сторон AB и CD в точках K и L соответственно. Отрезок KL пересекает диагональ AC в точке M. Найдите BD, если известно, что $AM=MC=1$.

6. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство

$$\sin^6 x+\cos^6 x+a\cdot\sin 2x\geq a^2$$

выполняется для всех действительных x.

7. Вписанная в треугольную пирамиду $ABCD$ сфера касается граней BCD, ACD, ABD и ABC в точках A_1, B_1, C_1 и D_1 соответственно. Известно, что D_1 является точкой пересечения высот треугольника ABC, что плоскости ABC и $A_1B_1C_1$ параллельны и что радиус окружности, описанной около треугольника ABC в четыре раза больше радиуса окружности, описанной около треугольника $A_1B_1C_1$. Найдите отношение, в котором сфера делит отрезок DD_1, считая от вершины D.

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике 2021 г. (вариант 214)

1. Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением $\left(\frac{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}-\frac{2\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}\right)^2$.

2. Бобёр доплывает от своей норы вниз по реке до осиновой рощи за три минуты. Подкрепившись, он плывёт обратно к своей норе, на что у него уходит четыре минуты. Во сколько раз собственная скорость бобра превышает скорость течения? Собственную скорость бобра считать постоянной.

3. Решите уравнение $\cos 4x+\cos 2x+\operatorname{ctg}^2 x=0$.

4. Решите неравенство $\log_2 x+\log_3 x\le\log_2 3\cdot\log_x 6$.

5. На сторонах AB и AC треугольника ABC отмечены точки K и L соответственно. Известно, что $AB=BC=1$, что площади треугольников AKC и BCL равны и что около четырёхугольника $AKML$, где M — точка пересечения отрезков BL и CK можно описать окружность. Найдите все возможные значения AC.

6. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\left(\sqrt{3+2x-x^2}-\sqrt{3-2x-x^2}\right)\left(\sqrt{a-x^2}-\sqrt{3-2x-x^2}\right)\left(\sqrt{a-x^2}-\sqrt{3+2x-x^2}\right)=0$$

имеет ровно одно решение.

7. Дан тетраэдр $ABCD$. Известно, что центр сферы, описанной около этого тетраэдра, лежит на AB, что плоскости ABC и ABD перпендикулярны и что $AD=DC=CB$. Найдите угол между прямыми AD и CB.

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова
Дополнительное вступительное испытание по математике 2021 г. (вариант 215)

1. Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением $\dfrac{27^{1/3}}{25^{1/2}}+\dfrac{\log_5 25}{3\sqrt{2}\cdot\cos\dfrac{\pi}{4}}+\dfrac{41}{15}$.

2. Любитель коктейлей Игнат смешал 300 мл морковного сока с 200 мл сливок. Тщательно перемешав полученную смесь, Игнат попробовал её на вкус и решил, что сливок оказалось слишком много. Игнат налил в полулитровый графин 200 мл морковного сока, а оставшиеся 300 мл заполнил приготовленной смесью. Каково процентное содержание сливок в полученном напитке?

3. Решите уравнение $4\sin 2x\cos 3x-2\sin 5x=\operatorname{tg} 2x$.

4. Решите неравенство $\log_{x-1}\left(4^{\log_3 x}-6x^{\log_3 2}+10\right)\le 0$.

5. Дана равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD. Известно, что окружности, вписанные в треугольники ABC и ACD, касаются диагонали AC в одной и той же точке. При этом точка касания первой окружности со стороной BC делит эту сторону пополам. Найдите отношение, в котором точка касания второй окружности со стороной AD делит эту сторону, считая от точки A.

6. Найдите все пары (x,y) действительных чисел с наименьшим возможным значением y, удовлетворяющие неравенству

$$\log_{x^2-y}\left(x-y^2+\frac{7}{4}\right)\ge 1.$$

7. Сфера касается всех рёбер тетраэдра $ABCD$. Известно, что произведения длин скрещивающихся рёбер равны. Известно также, что $AB=3$, $BC=1$. Найдите AC.

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова
Дополнительное вступительное испытание по математике 2021 г. (вариант 216)

1. Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением $\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\sin\frac{\pi}{4}-\sqrt{2}\right)^4-\frac{1}{4}$.

2. Футболист Федот сыграл в трёх матчах на чемпионате. Премиальная выплата Федота за второй матч в связи с отличной игрой была на n процентов больше, чем за первый. В третьем же матче Федот не сумел показать хорошую игру и его премия за этот матч оказалась на n процентов меньше, чем за второй матч. Найдите n, если известно, что премия за третий матч составила 64% от премии за первый матч.

3. Решите уравнение $\operatorname{ctg} x-2\operatorname{ctg} 2x=\frac{2}{3}\cos x$.

4. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x-1}}\frac{x^2-7x+12}{x-5}\le 2$.

5. Окружность Ω_1 с центром O_1 пересекает окружность Ω_2 с центром O_2 в точках A и B. При этом точки O_1 и O_2 лежат вне Ω_2 и Ω_1 соответственно. Касательная к окружности Ω_2 в точке A пересекает Ω_1 в точках A и C. Касательная к окружности Ω_1 в точке A пересекает Ω_2 в точках A и D. Найдите угол между прямыми O_1C и O_2D, если известно, что $\angle AO_1B=36^\circ$ и $\angle AO_2B=64^\circ$.

6. Найдите все пары действительных чисел (x,y), удовлетворяющих равенству

$$\frac{\pi}{2}-\arcsin\left(1+\log_2\left(x^2+y^2\right)\right)=1+\log_2(xy).$$

7. Дан параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$ с основаниями $ABCD$, $A'B'C'D'$ и боковыми рёбрами AA', BB', CC', DD'. Все рёбра параллелепипеда равны. Плоские углы при вершине B также равны. Известно, что центр сферы, описанной около тетраэдра $AB'CD'$, лежит в плоскости $AB'C$. Радиус этой сферы равен 2. Найдите длину ребра параллелепипеда.

Варианты 2022 г.

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова
Дополнительное вступительное испытание по математике 2022 г. (вариант 221)

1. Найдите наименьшее целое число, бóльшее, чем $\dfrac{\sqrt{17}+3}{\sqrt{17}-3}$.

2. Сумма первых пятнадцати членов арифметической прогрессии в два раза больше суммы первых десяти членов. Найдите первый член этой прогрессии, если известно, что пятый её член равен 7.

3. Решите уравнение $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 2x + 3 = 0$.

4. Решите неравенство $\left(2\log_2^2 x - \log_2 x^2 + 1\right)^{x^2-2x} \le 1$.

5. Середины сторон выпуклого четырёхугольника $ABCD$ лежат на окружности. Известно, что $AB=1$, $BC=4$, $CD=8$. Найдите AD.

6. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$x^2 + \left(1 - a + \sqrt[4]{|x|}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$$

имеет ровно три решения.

7. Объём треугольной призмы $ABCA'B'C'$ с основанием ABC и боковыми рёбрами AA', BB', CC' равен 72. Найдите объём тетраэдра $DEFG$, где D — центр грани $ABB'A'$, E — точка пересечения медиан треугольника $A'B'C'$, F — середина ребра AC и G — середина ребра BC.

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова
Дополнительное вступительное испытание по математике 2022 г. (вариант 222)

1. Найдите в явном виде целое число, заданное выражением $\sqrt{11}\cdot\left(\dfrac{2}{\sqrt{11}-\sqrt{7}}+\dfrac{2}{\sqrt{11}+\sqrt{7}}\right)$.

2. Сумма первых трёх членов геометрической прогрессии в два раза больше разности между первым и четвёртым её членами. Найдите первый член этой прогрессии, если известно, что сумма первых семи её членов равна 127.

3. Решите уравнение $\sin x+\sin 2x=\cos x+\cos 2x$.

4. Решите неравенство $x^{\log_2 \sqrt{x}} \geq \dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

5. На диагонали AC параллелограмма $ABCD$ как на диаметре построена окружность. Эта окружность пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно. При этом $AM=MB$ и $CN=2\cdot NB$. Найдите тангенс острого угла параллелограмма $ABCD$.

6. Найдите все значения произведения xy, если известно, что $x,y\in\left[0,\pi/2\right)$ и справедливо равенство

$$\frac{1-\sin(x-y)}{1-\cos(x-y)}=\frac{1-\sin(x+y)}{1-\cos(x+y)}.$$

7. В пирамиду, в основании которой лежит ромб с острым углом α и стороной $\sqrt{6}$, вписана сфера диаметра 1. Найдите угол α, если известно, что все боковые грани пирамиды наклонены к плоскости её основания под углом 60°.

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова
Дополнительное вступительное испытание по математике 2022 г. (вариант 223)

1. Определите, какое из двух чисел больше: $\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ или 3.

2. Дана возрастающая арифметическая прогрессия, состоящая из положительных чисел. Произведение третьего и четвёртого членов этой прогрессии в два раза больше произведения первого и шестого её членов. Найдите разность этой прогрессии, если известно, что восьмой её член равен 32.

3. Решите уравнение $\cos 2x+6\sin 2x=\cos 4x+6\sin x$.

4. Решите неравенство $\log_3(1-x)-\log_3(1+x)+\log_{1+x}(1-x)-1\le 0$.

5. В треугольнике ABC угол C равен 60°. На сторонах AB, BC, AC отмечены точки D, E, F соответственно. Радиус окружности, вписанной в треугольник ADF, равен 1. Радиус окружности, вписанной в треугольник BDE, равен 2. Найдите сторону AB, если известно, что четырёхугольник $DECF$ является ромбом.

6. Найдите все пары действительных чисел x, y, удовлетворяющих соотношению

$$\frac{x^2+y^2}{2}+\frac{1}{xy}=2\sqrt{2-\sqrt{xy}}\cdot\sqrt[4]{xy}.$$

7. Высота правильной треугольной призмы $ABCA'B'C'$ с основанием ABC и боковыми рёбрами AA', BB', CC' равна 1. Найдите длину ребра основания, если известно, что $AB'\perp BC'$.

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова
Дополнительное вступительное испытание по математике 2022 г. (вариант 224)

1. Найдите наименьшее целое число, бóльшее, чем $2\sqrt{3}+\dfrac{1}{\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$.

2. Положительные числа a,b,c образуют непостоянную геометрическую прогрессию. Числа $a,4b,7c$ образуют арифметическую прогрессию. Найдите отношение a/c.

3. Решите уравнение $\dfrac{\sqrt{2}}{\sin x}+\dfrac{\sqrt{2}}{\cos x}=\dfrac{1}{\sin^2 x}+\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

4. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x}}\left|\dfrac{3x}{x-4}\right|\le 4$.

5. В трапеции $ABCD$ основание AB в два раза больше основания CD. Отрезки AL, BM и DK, где K, L, M — соответственно середины сторон AB, BC, AD, ограничивают треугольник площади 1. Найдите площадь трапеции.

6. Найдите все тройки действительных чисел x, y, z из интервала $(0,\pi/2)$, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases}\sin x=\sin y-\sin z\cdot\cos(x+z),\\ \cos x=\cos z+\cos y\cdot\cos(x+y).\end{cases}$$

7. Дан параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$ с основанием $ABCD$ и боковыми рёбрами AA', BB', CC', DD'. Найдите отношение, в котором делит его объём плоскость, проходящая через вершину A, середину ребра BC и середину ребра $C'D'$.

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова
Дополнительное вступительное испытание по математике 2022 г. (вариант 225)

1. Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением $\left(\frac{2\sqrt{2}}{27}\right)^{2/3}+\left(\frac{27}{2\sqrt{2}}\right)^{2/3}-\frac{13}{18}$.

2. Сумма второго и восьмого членов возрастающей геометрической прогрессии равна $9\sqrt{2}$. Произведение четвёртого, пятого и шестого членов этой прогрессии равно 64. Найдите разность между девятым и первым членами этой прогрессии.

3. Решите уравнение $\sin^4 x+\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=0$.

4. Решите неравенство $\log_{\sqrt{6-x}}(6+x)+\log_{\sqrt{6+x}}(6-x)\leq 5$.

5. Окружность, проходящая через вершины A и B треугольника ABC и центр описанной около этого треугольника окружности, пересекает стороны AC и BC в точках D и E соответственно. Найдите угол BCA, если известно, что $AB=\sqrt{2}$, $AC=\sqrt{3}$, а угол BAE в два раза больше угла ABD.

6. Найдите все значения параметров a и b, при которых неравенство

$$a^3x^4+2ax^3+b\leq 2bx^2+b^3x+a$$

выполняется для всех x из отрезка $[0,1]$.

7. Дана правильная треугольная пирамида $ABCS$ с основанием ABC и вершиной S. Плоскость π перпендикулярно ребру AS и пересекает рёбра AS и BS в точках D и E соответственно. Известно, что $SD=AD$ и $SE=2\cdot BE$. Найдите косинус угла между ребром AS и плоскостью основания.

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова
Дополнительное вступительное испытание по математике 2022 г. (вариант 226)

1. Определите, какое из двух чисел больше: $\sqrt{3}^{15}$ или $9^{\sqrt{14}}$.

2. Числа $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{30}$ образуют арифметическую прогрессию. Известно, что $a_2 + a_4 + a_6 + \ldots + a_{30} = 45$ и что $a_3 + a_6 + a_9 + \ldots + a_{30} = 100$. Найдите разность этой прогрессии.

3. Решите уравнение $\operatorname{tg} x = 4\sin x - \sqrt{3}$.

4. Решите неравенство $\log_x\left(x^2 + \frac{3}{2}\right) \le 4\log_{x^2+\frac{3}{2}}(x)$.

5. Окружность, проходящая через вершину A треугольника ABC, касается его стороны BC в точке D и пересекает стороны AC и AB в точках E и F соответственно. Известно, что $AF = 3\cdot BF$, $BD = CD$, $AE = 2\cdot CE$, $ED = \sqrt{10}$. Найдите BC.

6. Найдите все значения параметра a из интервала $(0,1)$, при которых для каждого x из интервала $(0, \pi/4)$ существует не более одного значения y в интервале $(0, \pi/4)$ такого, что

$$\frac{\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}{\operatorname{tg}\left(a(x+y)\right)} = \frac{\operatorname{tg}(x+y) - \operatorname{tg}\left(a(x+y)\right)}{1 + \operatorname{tg}(x+y)\cdot\operatorname{tg}\left(a(x+y)\right)}.$$

7. Основание $ABCD$ прямоугольного параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$ с боковыми рёбрами AA', BB', CC', DD' является квадратом со стороной $\sqrt{2}$. Известно, что $AE \perp D'F$, где E — центр грани $BCC'B'$, F — центр квадрата $ABCD$. Найдите расстояние между серединами отрезков AE и $D'F$.

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова
Дополнительное вступительное испытание по математике 2022 г. (вариант 227)

1. Определите, какое из двух чисел больше: $\sqrt{3}+\sqrt{7}+\sqrt{21}$ или 9.

2. Произведение седьмого и восьмого членов непостоянной арифметической прогрессии равно произведению пятого и девятого её членов. Найдите одиннадцатый член данной прогрессии.

3. Решите уравнение $5+\cos 4x = 6\sin^2 x$.

4. Решите неравенство $\log_{x-\frac{3}{4}}\left(x-\frac{3}{2}\right) \geq \frac{1}{2}$.

5. Биссектриса AL треугольника ABC перпендикулярна его медиане BM. Найдите площадь этого треугольника, если известно, что $AB=\sqrt{3}$ и $ML=1$.

6. Найдите наименьшее значение выражения $x^2-5\pi x+2xy-5\pi y+y^2$ при условии, что x и y удовлетворяют соотношению

$$\frac{\sin(x+y)}{\sin x\cdot\sin y}=\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\sin y}.$$

7. Плоские углы при вершине A тетраэдра $ABCD$ прямые. Двугранные углы при рёбрах BD и CD равны между собой и в два раза больше двугранного угла при ребре BC. Найдите объём тетраэдра, если известно, что $AD=1$.

Варианты 2023 г.

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова
Дополнительное вступительное испытание по математике 2023 г. (вариант 231)

1. Найдите наименьшее целое число, превосходящее $\dfrac{\sqrt{8}}{\dfrac{\sqrt{2}}{20}+\dfrac{\sqrt{2}}{23}}$.

2. Дана последовательность $a_0, a_1, a_2, \ldots$ действительных чисел. Найдите a_8, если известно, что $a_1 = 1$ и что для любой пары индексов n, m, таких что $n \geq m \geq 0$, справедливо равенство $a_{n+m} + a_{n-m} = 2(a_n + a_m)$.

3. Решите неравенство $x^{\log_3 \sqrt{x}} > 9$.

4. Решите уравнение $\cos 3x + 2\sin 2x + 2\cos x = 0$.

5. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AF, BD и CE. Найдите все возможные значения разности углов A и B этого треугольника, если известно, что $DE : EF = BC : AC$.

6. Положительные числа a, b, c удовлетворяют соотношению

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}=1.$$

Найдите наибольшее возможное значение выражения $\dfrac{a}{2+a^2}+\dfrac{b}{2+b^2}+\dfrac{c}{2+c^2}$.

7. В правильной треугольной пирамиде $ABCS$ проведено сечение через ребро AB основания ABC перпендикулярно боковому ребру CS. Найдите его площадь, если известно, что площадь основания пирамиды равна 3, а площадь каждой боковой грани равна $\sqrt{5}$.

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова
Дополнительное вступительное испытание по математике 2023 г. (вариант 232)

1. Найдите $f\left(\frac{2}{27}\right)$, если $f(x)=\sqrt[3]{4x}-\sqrt{\frac{3}{8x}}$.

2. Дана последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots$ действительных чисел. Известно, что $a_1 = 1$ и что для любого индекса n справедливо равенство $\left(\frac{1}{2^n}-a_{n+1}\right)\left(\frac{1}{2^n}+a_n\right)=\frac{1}{4^n}$. Найдите сумму $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_{10}}$.

3. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{3}}(x-1) \le \log_{\frac{1}{9}}(10-2x)$.

4. Решите уравнение $\sin\left(\frac{\pi \sin x}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi\sqrt{3}\cos x}{2}\right)$.

5. Дан остроугольный треугольник ABC с углом $A=60^\circ$. Известно, что $AB > AC$. Высоты BE и CF этого треугольника пересекаются в точке H. На отрезке BH отмечена точка K так, что $BK = CH$. Найдите расстояние от точки H до центра описанной около треугольника ABC окружности, если известно, что $KH = 3$.

6. Положительные числа a, b, c удовлетворяют соотношению

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=10.$$

Найдите наибольшее возможное значение выражения $\frac{a+b}{c}$.

7. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (с основанием $ABCD$ и боковыми рёбрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1) точки E, F и G — середины рёбер BC, CD и DA соответственно. Найдите отношение, в котором делит объём параллелепипеда плоскость, проходящая через F параллельно прямым A_1G и DE.

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова
Дополнительное вступительное испытание по математике 2023 г. (вариант 233)

1. Найдите целое число, задающееся выражением $\dfrac{3}{\sqrt[4]{16}}+\dfrac{5}{\sqrt[3]{27}}+\dfrac{11}{\sqrt{36}}.$

2. Последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots$ получается из последовательности натуральных чисел вычёркиванием всех полных квадратов, т.е. $a_1=2$, $a_2=3$, $a_3=5$, $a_4=6$, $a_5=7$, $a_6=8$, $a_7=10$ и т.д. Найдите a_{2023}.

3. Решите неравенство $\log_{\sqrt{3-x}}(3+x)\le 2.$

4. Решите уравнение

$$\cos^4 x-\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cdot\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right).$$

5. Прямая ℓ касается окружности, описанной около треугольника ABC, в точке A. Известно, что $AB>AC$ и что $AC=1$. На стороне AB отмечена точка D так, что $AD=AC$. Прямая, проходящая через точку D и центр окружности, вписанной в треугольник ABC, пересекает прямую ℓ в точке E. Найдите длину отрезка AE.

6. Положительные числа a, b, c удовлетворяют соотношению $a^2+b^2+c^2=1$. Найдите наибольшее возможное значение выражения $ab+bc\sqrt{3}$.

7. Найдите объём правильной четырёхугольной пирамиды со стороной основания 1, если известно, что плоские углы при вершине равны углам наклона боковых рёбер к плоскости основания.

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова
Дополнительное вступительное испытание по математике 2023 г. (вариант 234)

1. Найдите $f\left(\dfrac{3}{5}\right)$, если $f(x)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{\dfrac{8}{3}+\dfrac{1}{x^2}}$.

2. Дана последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots$ действительных чисел. Найдите a_1, если известно, что $a_8 = 8$ и что для любого индекса n справедливо равенство

$$a_{n+1} = \sqrt[7]{2}\cdot a_n + \left(\sqrt[7]{2}-1\right)n - 1.$$

3. Решите неравенство

$$\left(\sqrt{x}\right)^{3+\log_3 x} \geq 3^{1+\log_3 x} \ .$$

4. Решите уравнение

$$\frac{\sqrt{3}}{\sin x} - \frac{1}{\cos x} = 4.$$

5. На сторонах AB, BC, CD, AD вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ отмечены соответственно точки E, F, G, H. Известно, что $AE = EB$, $2BF = FC$, $CG = GD$, $DH = 2HA$ и что площадь четырёхугольника $ABCD$ в два раза больше площади четырёхугольника $EFGH$. Найдите отношение $AC : BD$.

6. Найдите наименьшее возможное значение выражения

$$\frac{c-b}{a+2b+c} + \frac{2b}{a+b+2c} - \frac{4c}{a+b+3c}$$

при положительных a, b, c .

7. Расстояния от (внутренней) диагонали прямоугольного параллелепипеда до его рёбер, не имеющих с этой диагональю общих точек, равны $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$, $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\sqrt{\dfrac{6}{5}}$. Найдите объём этого параллелепипеда.

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова
Дополнительное вступительное испытание по математике 2023 г. (вариант 235)

1. Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением $\dfrac{\dfrac{\sqrt{64}}{5}+\dfrac{\sqrt[3]{64}}{3}}{\dfrac{\sqrt{64}}{5}-\dfrac{\sqrt[3]{64}}{3}}$.

2. Последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots$ действительных чисел определяется равенствами:

$$a_1 = 0, \quad a_n = \left(1+\sqrt{n}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}\right) \quad \text{для } n \geq 2.$$

Найдите a_{2023}.

3. Решите неравенство

$$\left(3x^2-3x+1\right)^{x^2-3x} \leq 1\,.$$

4. Решите уравнение

$$\cos^2 x+\sqrt{3}\sin^2 x=\left(1+\sqrt{3}\right)\left(\cos x-\cos x\sin x+\sin x\right).$$

5. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BD и CE. На DE как на диаметре построена окружность. Эта окружность пересекает отрезки AE и AD в точках F и G соответственно. Найдите длину отрезка FG, если известно, что $BC=25$, $BD=20$ и $BE=7$.

6. Найдите все значения параметра k, при которых неравенство

$$a^3+b^3+c^3 \geq k\left(a+b+c\right)$$

справедливо для всех действительных $a, b, c,$ таких, что $a \geq -2,\ b \geq -2,\ c \geq -2.$

7. Плоские углы при вершине правильной четырёхугольной пирамиды равны 30°. Найдите длину ребра основания пирамиды, если известно, что радиус сферы, вписанной в эту пирамиду, равен 1.

Часть 2

Решения

ДВИ-2011, вариант 111

Задача 1. Вычислите значение функции $x^2-0.625x-\frac{1}{8}$ в точке $x=\frac{4}{5}$.

Решение. Поскольку $0.625=\frac{5}{8}$, искомая величина равна

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2-\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{5}-\frac{1}{8}=\frac{16}{25}-\frac{4}{8}-\frac{1}{8}=\frac{16}{25}-\frac{5}{8}=\frac{16\cdot8-5\cdot25}{25\cdot8}=\frac{128-125}{200}=\frac{3}{200}.$$

Ответ: $\frac{3}{200}=0.015$.

Задача 2. Решите уравнение $(\sin x+\cos x)^2=1$.

Решение. После раскрытия скобок в левой части мы получим: $\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x=1$. Применяя тождества $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ и $2\sin x\cos x=\sin 2x$, мы получим простейшее тригонометрическое уравнение $\sin 2x=0$, множество решений которого даётся формулой

$$2x=\pi n, n\in\mathbb{Z} \quad\Leftrightarrow\quad x=\frac{\pi n}{2}, n\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $x=\frac{\pi n}{2}, n\in\mathbb{Z}$.

Задача 3. Решите уравнение $\log_2(3x-4)=\log_4(2-x)$.

Решение. **1 способ.** Чтобы решить уравнение, избавимся от логарифмов. Начнём с перехода к одному основанию в логарифмах, скажем, к основанию 4:

$$2\log_4(3x-4)=\log_4(2-x).$$

После этого в левой части выполним умножение логарифма на число 2, применив тождество $k\cdot\log_a f=\log_a f^k$:

$$\log_4(3x-4)^2=\log_4(2-x).$$

Теперь мы можем «закрыть» логарифмы в обеих частях (формально говоря, мы применяем свойство $\log_a f=\log_a g\Rightarrow f=g$), что даст простое алгебраическое уравнение:

$$(3x-4)^2=2-x.$$

После раскрытия скобок и приведения подобных членов мы получим стандартное квадратное уравнение $9x^2 - 23x + 14 = 0$. Его дискриминант равен $23^2 - 4 \cdot 9 \cdot 14 = 25$, так что это уравнение имеет два корня: $x_1 = \frac{23-5}{18} = 1$, $x_2 = \frac{23+5}{18} = \frac{14}{9}$.

Чрезвычайно важно отметить, что на этом этапе решения мы не можем утверждать, что найденные числа $x_1 = 1$ и $x_2 = 14/9$ будут корнями исходного уравнения. Дело в том, что эти числа непосредственно появились как корни квадратного уравнения $9x^2 - 23x + 14 = 0$, относительно которого мы можем утверждать лишь одно: это уравнение получено из исходного уравнения законными математическими преобразованиями. Такое уравнение называют *следствием* исходного уравнения («уравнением-следствием»). Важная математическая теорема утверждает, что

> *если из уравнения* У1 *законными математическими преобразованиями получено уравнение* У2 *(на письме это обозначают записью* У1 $\Rightarrow$ У2*), то* ***нельзя*** *гарантировать, что множество корней исходного уравнения* У1 *совпадает с множеством корней уравнения-следствия* У2*. Однако,* ***можно*** *гарантировать, что множество корней исходного уравнения* У1 *является подмножеством множества корней уравнения-следствия* У2*.*

Иначе говоря, каждый корень исходного уравнения У1 будет находиться и в списке корней уравнения-следствия У2, т.е. законные преобразования не приводят к потере корней. Однако, не исключено, что среди корней уравнения-следствия У2 найдутся числа, которые не будут корнями исходного уравнения У1, т.е. возможно появление «лишних» корней («засорение» множества корней исходного уравнения). Особой беды в этом нет, т.к. с помощью простой проверки можно выяснить, какие из корней уравнения-следствия являются корнями и исходного уравнения, а какие являются «мусором», появившимся в ходе преобразований.

Если корни уравнения-следствия — целые или рациональные числа, проверка обычно не вызывает затруднений. В нашем случае проверка выглядит следующим образом:

1 (проверка $x_1 = 1$). При подстановке числа 1 вместо неизвестной в исходное уравнение мы получим следующее выражение: $\log_2(3 \cdot 1 - 4) = \log_4(2-1)$. После выполнения действий в скобках это выражение примет вид: $\log_2(-1) = \log_4 1$. Поскольку $\log_2(-1)$ не существует, выражение $\log_2(-1) = \log_4 1$ не имеет смысла. По этой причине проверяемое значение неизвестной, $x_1 = 1$, не является корнем исходного уравнения.

2 (проверка $x_2 = 14/9$). При подстановке числа $14/9$ вместо неизвестной в исходное уравнение мы получим следующее выражение:

$\log_2\left(3\cdot\frac{14}{9}-4\right)=\log_2\left(2-\frac{14}{9}\right)$. После выполнения действий в скобках это выражение примет вид: $\log_2\frac{2}{3}=\log_4\frac{4}{9}$. Перейдём, как и при решении уравнения, к основанию 4 в левой части: $2\cdot\log_4\frac{2}{3}=\log_4\frac{4}{9}$, а затем применим тождество $2\cdot\log_a b=\log_a\left(b^2\right)$: $\log_4\frac{4}{9}=\log_4\frac{4}{9}$. Итак, подстановка в исходное уравнение вместо неизвестной числа $14/9$ превращает уравнение в истинное числовое равенство. Поэтому проверяемое значение неизвестной, $x_2=14/9$, является корнем исходного уравнения.

Ответ: $x=\frac{14}{9}$.

Замечание 1. Важно подчеркнуть следующее. Мы проводим проверку вовсе не потому, что сомневаемся в правильности проделанных преобразований и выкладок и на всякий случай проверяем себя. Если уравнение решается просто законными математическими преобразованиями, то проверка является логически необходимым этапом решения. При этом проверка должна быть полной, как того требует определение корня: нужно подставить проверяемое значение в исходное уравнение и выяснить, получится ли в результате истинное числовое равенство или нет. Но для некоторых видов уравнений, в частности, для логарифмических уравнений, достаточно проверить, что обе части уравнения имеют смысл, т.е. под знаками логарифмов стоят только положительные числа, а основания логарифмов не только положительны, но и не равны 1. Иначе говоря, достаточно выяснить, входит или нет проверяемое значение неизвестной в область допустимых значений (ОДЗ). В нашем случае ОДЗ задаётся двумя неравенствами: $3x-4>0$ и $2-x>0$. Поэтому вместо полной проверки достаточно проверить, выполнены или нет эти два условия для «подозрительных» значений, $x_1=1$ и $x_2=14/9$:

- Для $x_1=1$ неравенство $3x-4>0$ примет вид: $-1>0$. Так как это ложное утверждение, число 1 не является корнем (второе условие можно и не проверять).
- Для $x_2=14/9$ выражение $3x-4$ равно $2/3$, т.е. положительно. Выражение $2-x$ равно $4/9$, т.е. тоже положительно. Таким образом, число $x_2=14/9$ входит в ОДЗ и потому является корнем исходного уравнения.

Обратим внимание на то, что подход, основанный на ОДЗ, вовсе не предполагает нахождение ОДЗ в явном виде. Часто достаточно иметь описание ОДЗ в неявном виде, в виде набора неравенств и других условий. Но если ОДЗ найдено в явном виде, это может упростить проверку. Например, в нашей задаче ОДЗ неявно задаётся системой из неравенств $3x-4>0$ и $2-x>0$, решить которую совсем несложно. Множество её решений — интервал $4/3<x<2$ (этот интервал уже явно описывает ОДЗ). Ясно, что из двух «подозрительных» значений, $x_1=1$ и $x_2=14/9$, в этот интервал попадает только $x_2=14/9$.

Замечание 2. Не надо думать, что проверка ОДЗ заменяет полную проверку для всех видов уравнений. Простейший пример — уравнение $\sqrt{x} = x - 2$. Возведение в квадрат даёт квадратное уравнение $x^2 - 5x + 4 = 0$, которое имеет два корня: $x_1 = 1$ и $x_2 = 4$. Область допустимых значений задаётся неравенством $x \ge 0$, так что оба корня входят в ОДЗ. Но полная проверка показывает, что на самом деле только $x_2 = 4$ является корнем исходного уравнения.

Поэтому важно понимать, что, вообще говоря, ***понятие ОДЗ не играет большой роли при решении уравнений, неравенств, систем, а иногда даже вредно, т.к. бездумное его применение может привести к ошибкам.***

В общем случае ОДЗ полезна лишь для «психологической» проверки: если решение приводит к ответу, который не входит в ОДЗ, то это означает, что в ходе решения были допущены какие-то ошибки (вычислительные или логические). Но если ответ входит в ОДЗ, отсюда вовсе не следует, что он верен.

Имея в виду Замечания 1 и 2, весьма сомнительной представляется обычная для большинства школьных учебников и пособий для абитуриентов рекомендация начинать решение уравнения или неравенства с нахождения в явном виде ОДЗ,

Замечание 3. ***Ключевым при решении математических задач является не понятие ОДЗ, а понятие равносильности.***

Напомним, что две задачи У1 и У2 (это могут быть уравнения, неравенства, системы и т.д.) называются равносильными, если их множества решений совпадают.

Это определение общепринято, но оно неудобно для практического применения, т.к. неясно, каким способом установить равенство множеств решений. Эту проблему решает следующая важная математическая теорема:

> *Задачи У1 и У2 равносильны тогда и только тогда, когда из задачи У1 законными математическими преобразованиями можно получить задачу У2 и наоборот, из задачи У2 законными математическими преобразованиями можно получить задачу У1.*

Поскольку переход к равносильной задаче не меняет множество решений (например, в случае уравнений лишние корни не приобретаются, а имеющиеся корни не теряются), в проверке как в логически обязательном этапе решения нет необходимости. Но всегда полезно после решения задачи сделать «психологическую» проверку полученного ответа; если полученный ответ приведёт к явно несуразному результату, это будет означать, что где-то в ходе решения допущены ошибки. После этого решение следует тщательно проверить, возможно даже решить задачу другим методом.

На письме равносильность задач (уравнений, неравенств, систем и т.п.) обозначается символом $\Leftrightarrow$ (если преобразования записываются в одной строке) или $\Updownarrow$ (если преобразования записываются в столбик).

Наряду с понятием равносильности уравнений (неравенств, систем и т.п.) в математике имеется и понятие равносильности утверждений. Важно подчеркнуть, что фразы «равносильные числовые равенства» и «равносильные уравнения» имеют разный смысл (хотя в обоих случаях используется один и тот же термин «равносильность» и один и тот же символ $\Leftrightarrow$). Фраза «уравнения равносильны» означает, что у них одно и то же множество решений. Фраза «числовые равенства равносильны» означает, что эти равенства либо оба истинны, либо оба ложны. Таким образом, равенства $2\cdot 2=5$ и $\log_2 8=1$ равносильны (они оба являются ложными), так что утверждение «$2\cdot 2=5 \Leftrightarrow \log_2 8=1$» — истинно.

Замечание 4. Для логарифмических задач основные равносильные преобразования можно описать следующими условными схемами:

Схема 1: $$\ldots\log_a f+\log_a g\ldots \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}\ldots\log_a(f\cdot g)\ldots\\ f>0,\, g>0\end{cases}$$

Появившиеся в системе условия $f>0$, $g>0$ вытекают из самого факта написания логарифмов $\log_a f$, $\log_a g$ в исходной задаче $\ldots\log_a f(x)+\log_a g(x)\ldots$, а с другой стороны они делают возможным обратное преобразование. Отметим, что запись $\ldots\log_a(f\cdot g)\ldots$ гарантирует положительность произведения $f\cdot g$ и поэтому справедливость любого из неравенств $f>0$, $g>0$ влечёт справедливость второго. Следовательно, в системе из двух неравенств $f>0$, $g>0$ можно оставить только одно — обычно оставляют то, которое проще. Но иногда выражения f и g таковы, что одно из них явно положительно, например, является положительным числом или квадратным трёхчленом с отрицательным дискриминантом и положительным старшим коэффициентом — в таких случаях никакие дополнительные условия вообще не нужны (это замечание относится и к последующим схемам).

Схема 2: $$\ldots\log_a f-\log_a g\ldots \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}\ldots\log_a\left(\dfrac{f}{g}\right)\ldots\\ f>0,\, g>0\end{cases}$$

Как и в схеме 1, условия $f>0$, $g>0$ вытекают из самого факта написания логарифмов $\log_a f$, $\log_a g$ в исходной задаче $\ldots\log_a f-\log_a g\ldots$ и необходимы для справедливости обратного преобразования. Отметим, что запись $\ldots\log_a\left(\dfrac{f}{g}\right)\ldots$ гарантирует положительность дроби $\dfrac{f}{g}$ и поэтому любое из неравенств $f>0$, $g>0$ влечёт второе. Следовательно, из двух неравенств $f>0$, $g>0$ можно оставить только одно (обычно оставляют то, которое проще).

Схема 3: $\quad \dots 2\log_a f \dots \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dots\log_a\left(f^2\right)\dots \\ f>0 \end{cases}$

Условие $f>0$ вытекает из самого факта написания логарифма $\log_a f$ в исходной задаче $\dots 2\log_a f\dots$ и необходимо для справедливости обратного преобразования. Ясно, что аналогичное преобразование справедливо для любого чётного коэффициента перед $\log_a f$.

Схема 4: $\quad \dots 3\log_a f \dots \quad \Leftrightarrow \quad \dots\log_a\left(f^3\right)\dots$

Отметим, что сам факт написания логарифма $\log_a f^3$ в задаче $\dots\log_a f^3\dots$ влечёт положительность выражения f^3 и тем самым положительность выражения f, что необходимо для справедливости обратного преобразования.

Схема 5: $\quad \log_a f = \log_a g \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f=g \\ f>0, g>0 \\ a>0, a\neq 1 \end{cases}$

Условия $f>0$, $g>0$ вытекают из самого факта написания логарифмов $\log_a f$, $\log_a g$ в исходной задаче $\log_a f = \log_a g\dots$ и необходимы для справедливости обратного преобразования.

Отметим, что запись $f=g$ гарантирует положительность любого из выражений f, g, если положительно другое. Следовательно, в системе из двух неравенств $f>0$, $g>0$ можно оставить только одно (обычно оставляют то, которое проще).

Условия $a>0$, $a\neq 1$ вытекают из самого факта написания логарифмов с основанием a. Они автоматически выполнены, если a — конкретное число (например, 2, 10 и т.п.), и в этих случаях их не записывают.

Из этих общих схем ясно, что, как правило, исходное уравнение равносильно системе из уравнения-следствия и некоторых неравенств. Часто эти неравенства являются «осколками» ОДЗ (т.е. появляются и при её неявном задании). Но во ряде важных случаев они никак не связаны с ОДЗ. Например, уравнение вида $\sqrt{f}=g$ равносильно системе из уравнения $f=g^2$, которое получается из исходного уравнения возведением в квадрат, и неравенства $g\geq 0$, в то время как ОДЗ задаётся неравенством $f\geq 0$.

Если исходное уравнение равносильно системе из уравнения-следствия и некоторых неравенств, то проверка не отменяется полностью, а лишь упрощается, правда, как правило, весьма существенно. Если же анализ равносильности покажет, что дополнительные условия не нужны, то в проверке вообще нет надобности. Но это упрощение достигается усложнением логики решения. Кроме того, если допустить ошибку при анализе равносильности, то ответ может оказаться неверным. Полная проверка при всей своей громоздкости, имеет важное достоинство (особенно важное в условиях экзамена) — она позволяет вылавливать многие ошибки.

Конечно, равносильные преобразования — это более «культурный» метод решения и мы рекомендуем при решении экзаменационных задач пользоваться именно им. Однако в силу вышеизложенного нужно уметь работать и с альтернативным методом: получать следствия и в конце решения делать проверку.

Впрочем, обойтись без равносильных преобразований можно только в случае уравнений и систем уравнений, когда в конце появляется лишь небольшое число «подозрительных» решений, которые можно проверить прямой подстановкой в исходную задачу. В неравенствах все преобразования должны быть равносильными.

Замечание 5. Приведённые ранее общие схемы равносильных преобразований с логарифмами позволяют дать следующее решение нашего уравнения:

$$2\log_4(3x-4)=\log_4(2-x) \Leftrightarrow \begin{cases} \log_4(3x-4)^2=\log_4(2-x) \\ 3x-4>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3x-4)^2=2-x \\ 3x>4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9x^2-23x+14=0 \\ x>4/3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \text{ или } 14/9 \\ x>12/9 \end{cases} \Leftrightarrow x=14/9.$$

Задача 4. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{5x+3}-1}{\sqrt{3x+2}-1}>1$.

Решение. ***1 способ (метод расщепления).*** Самое естественное начало решения заключается в том, чтобы избавиться от дроби в левой части неравенства, умножив его на знаменатель $\sqrt{3x+2}-1$. Но для этого нужно знать, положителен этот знаменатель, или отрицателен. Поскольку выражение $\sqrt{3x+2}-1$ зависит от неизвестной и ничего определённого относительно его знака мы сказать не можем, рассмотрим два случая:

Случай 1: $\sqrt{3x+2}-1>0$, т.е. $\sqrt{3x+2}>1$. В этом случае (после умножения обеих частей на выражение $\sqrt{3x+2}-1$) исходное неравенство примет вид: $\sqrt{5x+3}-1>\sqrt{3x+2}-1$, что равносильно неравенству $\sqrt{5x+3}>\sqrt{3x+2}$.

Случай 2: $\sqrt{3x+2}-1<0$, т.е. $\sqrt{3x+2}<1$. В этом случае (после умножения обеих частей на выражение $\sqrt{3x+2}-1$) исходное неравенство примет вид: $\sqrt{5x+3}-1<\sqrt{3x+2}-1$, что равносильно неравенству $\sqrt{5x+3}<\sqrt{3x+2}$.

Рассмотрение двух этих случаев означает, что исходное неравенство распадается на две системы:

$$\begin{cases}\sqrt{3x+2}>1\\ \sqrt{5x+3}>\sqrt{3x+2}\end{cases} \qquad \begin{cases}\sqrt{3x+2}<1\\ \sqrt{5x+3}<\sqrt{3x+2}\end{cases}$$

Теперь нам нужно решить эти системы и объединить их множества решений. Чтобы избавиться от радикалов, возведём неравенства в квадрат; эта операция законна, т.к. во всех неравенствах и левая, и правая часть неотрицательны. В результате мы получим:

$$\begin{cases}3x+2>1\\ 5x+3>3x+2\end{cases} \qquad \begin{cases}3x+2<1\\ 0\le 5x+3<3x+2\end{cases} \tag{1}$$

Здесь для равносильности проделанного преобразования во второй системе мы добавили условие $5x+3\ge 0$ (это условие содержалось в самом факте написания радикала $\sqrt{5x+3}$, но исчезло после возведения в квадрат). В первой системе такое условие не нужно, т.к. в силу второго неравенства выражение $5x+3$ больше, чем $3x+2$, а в силу первого неравенства выражение $3x+2$ больше 1 и потому положительно; следовательно, из первой системы автоматически вытекает положительность выражения $5x+3$. По аналогичной причине во второй системе не нужно дописывать условие $3x+2\ge 0$ (хотя изолированное неравенство $\sqrt{3x+2}<1$ равносильно двойному неравенству $0\le 3x+2<1$, а не неравенству $3x+2<1$).

Совокупность систем (1) содержит только линейные неравенства и решается элементарно. Для первой системы мы имеем:

$$\begin{cases}3x+2>1\\ 5x+3>3x+2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>-1/3\\ x>-1/2\end{cases} \Leftrightarrow x>-1/3.$$

Для второй:

$$\begin{cases}3x+2<1\\ 0\le 5x+3<3x+2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x<-1/3\\ x<-1/2\\ x\ge -3/5\end{cases} \Leftrightarrow -3/5\le x<-1/2.$$

Объединяя множества решений этих систем, мы получаем ответ.

2 способ (модифицированный метод интервалов). Перенесём число 1 из правой части в левую и выполним вычитание:

$$\frac{\sqrt{5x+3}-\sqrt{3x+2}}{\sqrt{3x+2}-1}>0. \qquad (2)$$

Известно, что знак выражения $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ совпадает со знаком выражения $a-b$ на множестве, где определено первое выражение, т.е. на множестве $a\geq 0$, $b\geq 0$. Поэтому

- на множестве $5x+3\geq 0$, $3x+2\geq 0$ знак выражения $\sqrt{5x+3}-\sqrt{3x+2}$ совпадает со знаком выражения $(5x+3)-(3x+2)=2x+1$;
- на множестве $3x+2\geq 0$ знак выражения $\sqrt{3x+2}-1\equiv\sqrt{3x+2}-\sqrt{1}$ совпадает со знаком выражения $(3x+2)-1=3x+1$.

Множество решений неравенства (2) зависит от значений числителя и знаменателя дроби в левой части только через их знаки. Таким образом, неравенство (2) равносильно системе из трёх неравенств: $\frac{2x+1}{3x+1}>0$, $5x+3\geq 0$, $3x+2\geq 0$. Первое из них легко решается методом интервалов; множество его решений состоит из двух лучей: $x<-\frac{1}{2}$ и $x>-\frac{1}{3}$. Второе и третье вообще являются простейшими линейными неравенствами и их множества решений есть: $x\geq-\frac{3}{5}$ и $x\geq-\frac{2}{3}$ соответственно. Пересекая множества решений трёх этих неравенств, мы получим ответ. Как обычно, пересечение удобно оформить графически так, как показано на Рисунке 1.

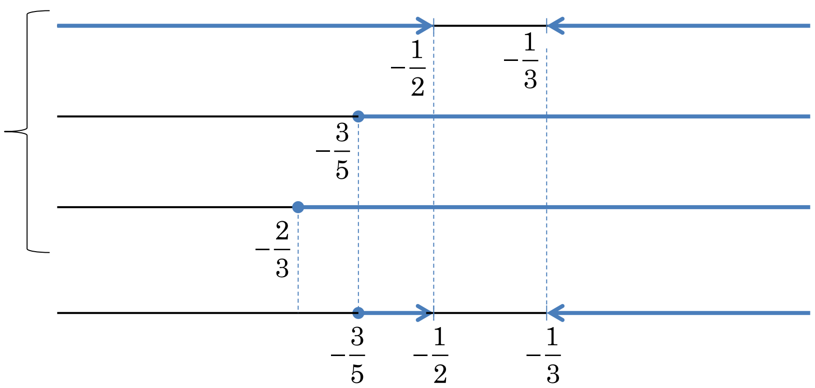

Рисунок 1

Ответ: $\left[-\frac{3}{5},-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{3},+\infty\right)$.

Задача 5. Медианы AL и BM треугольника ABC пересекаются в точке K. Найдите длину отрезка CK, если $AB=\sqrt{3}$ и известно, что вокруг четырёхугольника $KLMC$ можно описать окружность.

Решение. Конфигурация, о которой идёт речь в задаче, изображена на Рисунке 2. На этом рисунке мы дополнительно:

1. Продлили отрезок CK до пересечения со стороной AB и обозначили N точку пересечения. Поскольку K — точка пересечения двух медиан, а все три медианы треугольника пересекаются в одной точке, CN является медианой, т.е. N – середина стороны AB.
2. Провели среднюю линию треугольника ABC, соединив точки L и M (которые по условию являются серединами сторон BC и AC соответственно), и обозначили P точку пересечения средней линии ML и медианы CN.

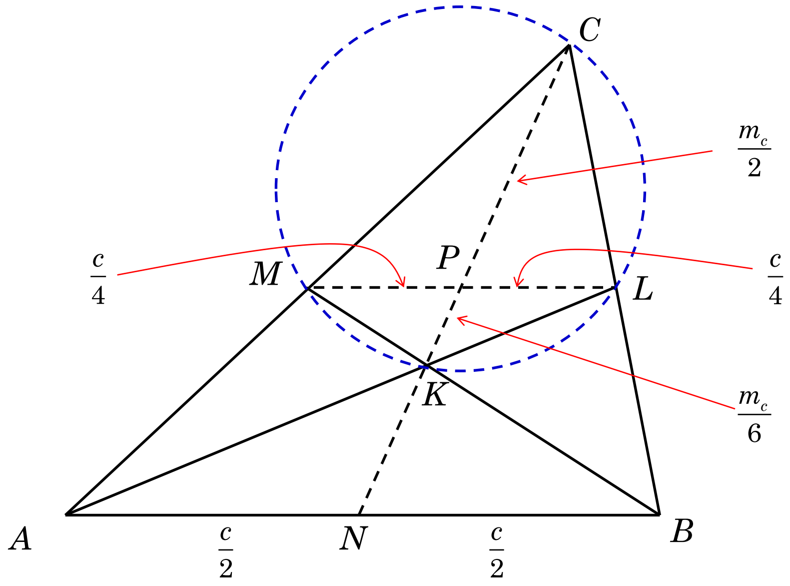

Рисунок 1

Для дальнейшего удобно обозначить буквой c длину стороны AB, лежащей против вершины C, а символом m_c – длину медианы CN, проведённой из этой вершины. Тогда $CK=2m_c/3$ (т.к. точка пересечения медиан делит медианы в отношении $2:1$, считая от соответствующей вершины), а $ML=c/2$ (т.к. средняя линия треугольника равна половине основания).

Поскольку средняя линия треугольника параллельна основанию, можно утверждать, что $ML \parallel AB$. Тогда теорема Фалеса влечёт, что P — середина медианы CN, и потому $CP=m_c/2$, $PK=CK-CP=2m_c/3-m_c/2=m_c/6$. Кроме того, параллельность прямых ML и AB влечёт подобие треугольников ACN и MCP с коэффициентом подобия $k=MC/AC=1/2$. Следовательно, $MP=c/4$, $PL=c/4$, так что P — медиана треугольника CML (впрочем, это очевидно в силу подобия треугольников CML и ABC).

Теперь естественно применить теорему о произведениях отрезков хорд, проведённых через одну точку внутри круга:

$$MP \cdot PL = CP \cdot PK \Leftrightarrow \frac{c}{4} \cdot \frac{c}{4} = \frac{m_c}{2} \cdot \frac{m_c}{6} \Leftrightarrow 3c^2 = 4m_c^2 \Leftrightarrow m_c = \frac{\sqrt{3}}{2} c\,.$$

Нам известно, что $c = \sqrt{3}$. Поэтому $m_c = \frac{3}{2}$, так что $CK = \frac{2}{3} m_c = 1$.

Ответ: $CK = 1$.

Задача 6. Найдите наибольшее из значений функции $\dfrac{9^x}{4^x - 6^x + 9^x}$ и точку x, в которой это значение достигается.

Решение. На экзамене проще всего решить эту задачу с помощью стандартной процедуры исследования функции.

1 (Область определения функции). Функция $y = \dfrac{9^x}{4^x - 6^x + 9^x}$ определена тогда и только тогда, когда знаменатель, $4^x - 6^x + 9^x$, не обращается в 0: $4^x - 6^x + 9^x \neq 0$.

Чтобы решить это неравенство, решим соответствующее уравнение: $4^x - 6^x + 9^x = 0$. Обратим внимание на то, что $4^x = \left(2^x\right)^2$, $6^x = 2^x \cdot 3^x$, $9^x = \left(3^x\right)^2$, и введём новые неизвестные: $a = 2^x, b = 3^x$. Для них уравнение примет вид: $a^2 - ab + b^2 = 0$. Его левая часть является однородным многочленом второй степени. Имея это в виду, разделим уравнение $a^2 - ab + b^2 = 0$ почленно на b^2 (это можно делать так как величина b — это просто сокращение для записи выражения 3^x и, значит, $b > 0$). В результате мы получим квадратное уравнение $z^2 - z + 1 = 0$ относительно $z = \left(2/3\right)^x$. Дискриминант этого уравнения равен -3, так что оно не имеет корней. Соответственно, и уравнение $4^x - 6^x + 9^x = 0$ не имеет корней.

Этот вывод можно получить и более простыми, хотя и не столь очевидными рассуждениями. Именно, разделим уравнение $4^x - 6^x + 9^x = 0$ на 6^x. В результате мы получим уравнение

$$\left(\frac{4}{6}\right)^x - 1 + \left(\frac{9}{6}\right)^x = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x - 1 + \left(\frac{3}{2}\right)^x = 0.$$

Числа $u = \left(\dfrac{2}{3}\right)^x$ и $v = \left(\dfrac{3}{2}\right)^x$ взаимно обратны и положительны. Поскольку они различны, их сумма больше 1. Значит, левая часть последнего уравнения положительна, так что оно не имеет корней.

Итак, область определения функции $y=\dfrac{9^x}{4^x-6^x+9^x}$ — вся числовая прямая.

2 (Производная функции). Стандартные формулы дифференцирования дают:

$$y'\equiv\left(\frac{9^x}{4^x-6^x+9^x}\right)'=\frac{9^x\cdot\ln 9\cdot\left(4^x-6^x+9^x\right)-9^x\cdot\ln 9\cdot\left(4^x\cdot\ln 4-6^x\cdot\ln 6+9^x\cdot\ln 9\right)}{\left(4^x-6^x+9^x\right)^2}$$

$$=9^x\cdot\frac{\left(\ln 9-\ln 4\right)\cdot 4^x-\left(\ln 9-\ln 6\right)\cdot 6^x}{\left(4^x-6^x+9^x\right)^2}=\left(\ln 3-\ln 2\right)\cdot 18^x\cdot\frac{2^{x+1}-3^x}{\left(4^x-6^x+9^x\right)^2}.$$

Мы учли здесь, что

$$\ln 9-\ln 4=2\ln 3-2\ln 2=2\cdot\left(\ln 3-\ln 2\right),$$
$$\ln 9-\ln 6=2\ln 3-\ln 2-\ln 3=\ln 3-\ln 2.$$

3 (Знаки производной). Поскольку $\ln 3-\ln 2>0$, эта производная положительна, отрицательна или равна 0 в зависимости от того, положительно, отрицательно или равно 0 выражение $2^{x+1}-3^x$. Это выражение удобно записать как $2^{x+1}-2^{\log_2 3\cdot x}$. Поэтому его знак совпадает со знаком выражения $x+1-\log_2 3\cdot x$, т.е. производная положительна, отрицательна или равна 0 в зависимости от того, x меньше, больше или равен $x_0=\dfrac{1}{\log_2 3-1}$.

4 **(Поведение функции).** Таким образом, при $x\le\dfrac{1}{\log_2 3-1}$ анализируемая функция возрастает, а при $x\ge\dfrac{1}{\log_2 3-1}$ убывает. Значит, в точке $x_0=\dfrac{1}{\log_2 3-1}$ она достигает своего наибольшего значения, которое равно

$$y\left(x_0\right)=\frac{9^{x_0}}{4^{x_0}-6^{x_0}+9^{x_0}}.$$

Точка x_0 характеризуется тем, что $2\cdot 2^{x_0}-3^{x_0}=0$, т.е. $3^{x_0}=2\cdot 2^{x_0}$. Поэтому

$$y\left(x_0\right)=\frac{\left(3^{x_0}\right)^2}{\left(2^{x_0}\right)^2-2^{x_0}\cdot 3^{x_0}+\left(3^{x_0}\right)^2}=\frac{\left(2\cdot 2^{x_0}\right)^2}{\left(2^{x_0}\right)^2-2^{x_0}\cdot 2\cdot 2^{x_0}+\left(2\cdot 2^{x_0}\right)^2}=\frac{4}{3}.$$

Ответ: наибольшее значение равно $\dfrac{4}{3}$; оно достигается при $x=\dfrac{1}{\log_2 3-1}$.

Замечание 1. Если мы захотим построить график функции $y=\dfrac{9^x}{4^x-6^x+9^x}$, проведённое исследование нужно дополнить изучением поведения функции на границе области определения, т.е. при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{9^x}{4^x-6^x+9^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(\frac{4}{9}\right)^x-\left(\frac{6}{9}\right)^x+1}=\frac{1}{0-0+1}=1,$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{9^x}{4^x-6^x+9^x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\frac{9}{4}\right)^x}{1-\left(\frac{6}{4}\right)^x+\left(\frac{9}{4}\right)^x}=\frac{0}{1-0+0}=0.$$

Поэтому график функции $y=\dfrac{9^x}{4^x-6^x+9^x}$ выглядит так, как на Рисунке 3.

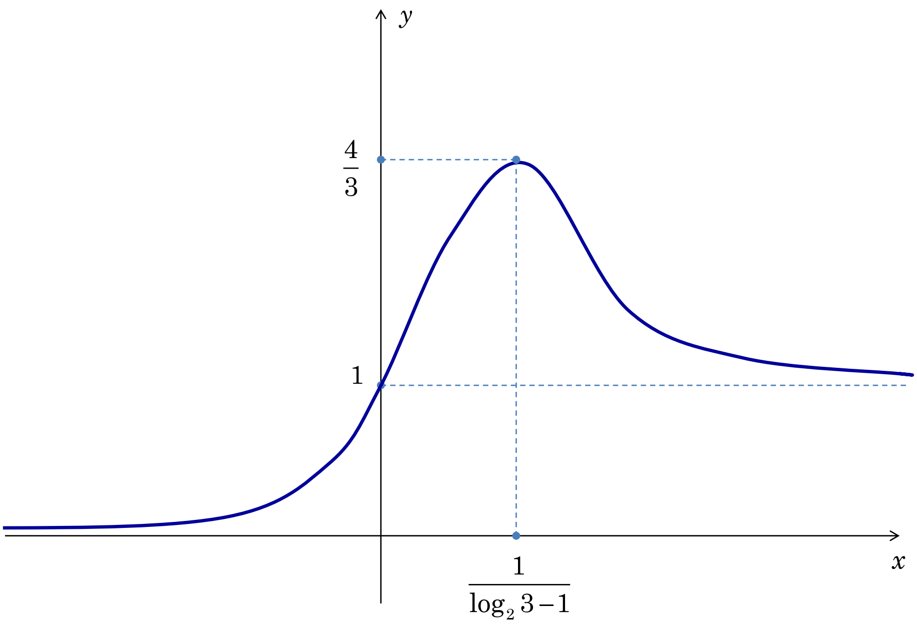

Рисунок 3

Замечание 2. Задачу можно решить и помощью следующего приёма, основанного на общих свойствах сложных функций (этот приём полезен и при решении других задач, так что школьник должен его хорошо понять).

Как мы отметили, $9^x=\left(3^x\right)^2$, $4^x=\left(2^x\right)^2$, $6^x=2^x\cdot 3^x$. Поэтому дробь $\dfrac{9^x}{4^x-6^x+9^x}$ можно записать в виде:

$$\frac{\left(3^x\right)^2}{\left(2^x\right)^2-2^x\cdot 3^x+\left(3^x\right)^2}. \tag{3}$$

Числитель этой дроби является одночленом второй степени относительно переменной $b=3^x$, а знаменатель — однородным многочленом второй степени относительно $a=2^x$ и $b=3^x$. Имея это в виду, разделим числитель и знаменатель дроби (3) на $\left(3^x\right)^2$. В результате данная нам функция примет вид:

$$y=\frac{1}{\left(\left(2/3\right)^x\right)^2-\left(2/3\right)^x+1}.$$

Поэтому её можно рассматривать как суперпозицию функций $y=1/u$, $u=z^2-z+1$, $z=\left(2/3\right)^x$.

Функция $z=\left(2/3\right)^x$ определена для всех действительных x и при изменении x от $-\infty$ до $+\infty$ монотонно убывает от $+\infty$ до $0+$ (символ «0+» означает, что при $x\to+\infty$ переменная z стремится к 0, оставаясь всё время положительной).

Квадратичная функция $u=z^2-z+1$ определена при всех z. Её график — парабола, ветви которой направлены вверх, а вершина имеет координаты: $z_0=1/2$, $u_0=3/4$. Поэтому при изменении z от $-\infty$ до z_0 эта функция монотонно убывает от $+\infty$ до u_0, а затем, при изменении z от z_0 до $+\infty$, монотонно возрастает от u_0 до $+\infty$. Поскольку переменная u всё время положительна, величина $y=1/u\equiv1/\left(z^2-z+1\right)$ при изменении z от $-\infty$ до z_0 монотонно возрастает от $0+$ до $1/u_0=4/3$, а затем, при изменении z от z_0 до $+\infty$, монотонно убывает от $1/u_0$ до $0+$.

Переменная $z=\left(2/3\right)^x$ принимает значение $z_0=1/2$ при $x=\log_{2/3}\frac{1}{2}=\frac{1}{\log_2 3-1}$. При изменении x от $-\infty$ до $x_0=\frac{1}{\log_2 3-1}$ переменная z монотонно убывает от $+\infty$ до $z_0=1/2$. Соответственно, переменная y монотонно возрастает от $0+$ до $4/3$. При дальнейшем изменении x, от $x_0=\frac{1}{\log_2 3-1}$ до $+\infty$, переменная z продолжает монотонно убывать (от $z_0=1/2$ до $0+$). Этому поведению переменной z соответствует убывание переменной y от $4/3$ до $1+$.

Отсюда ясно, что график анализируемой зависимости $y(x)$ выглядит так, как показано на Рисунке 3, наибольшее значение функции $y(x)$ равно $\frac{4}{3}$, причём достигается это значение при $x=\frac{1}{\log_2 3-1}$.

Задача 7. В закрытой коробке, имеющей форму куба со стороной 5, лежат два шара. Радиус первого из них равен 2. Этот шар касается плоскости основания и двух соседних боковых граней куба. Второй шар касается двух других боковых граней куба, плоскости основания и первого шара. Чему равен радиус второго шара?

Решение. Пусть $a=5$ – сторона куба, $r_1=2$ – радиус первого шара, $r_2=x$ – радиус второго шара (эту величину мы должны найти), O_1 – центр первого шара, O_2 – центр второго шара. Далее, пусть (см. Рисунок 4):

- K – точка. в которой первый шар касается основания куба;
- L и M – точки, в которых первый шар касается боковых граней;
- A – вершина куба, общая его основанию и боковым граням, которых касается первый шар;
- B – вершина нижнего основания, принадлежащая той грани, в которой лежит точка L;
- D – вершина нижнего основания, принадлежащая той грани, в которой лежит точка M;
- C – четвёртая вершина нижнего основания (так что AC – диагональ нижнего основания);
- A', B', C', D' – вершины верхней грани, соответствующие вершинам A, B, C, D основания (так что AA', BB', CC', DD' – боковые рёбра куба, перпендикулярные основанию $ABCD$).

Чтобы не загромождать картинку, на Рисунке 4 мы не рисовали второй шар, а показали только его центр и точки касания с гранями куба.

Поскольку конфигурация, изображённая на Рисунке 4, «прямая», введём декартовы систему координат в пространстве, взяв в качестве начала координат точку A, в качестве оси x прямую AD с положительным направлением от A к D, в качестве оси y прямую AB с положительным направлением от A к B, в качестве оси z прямую AA' с положительным направлением от A к A'.

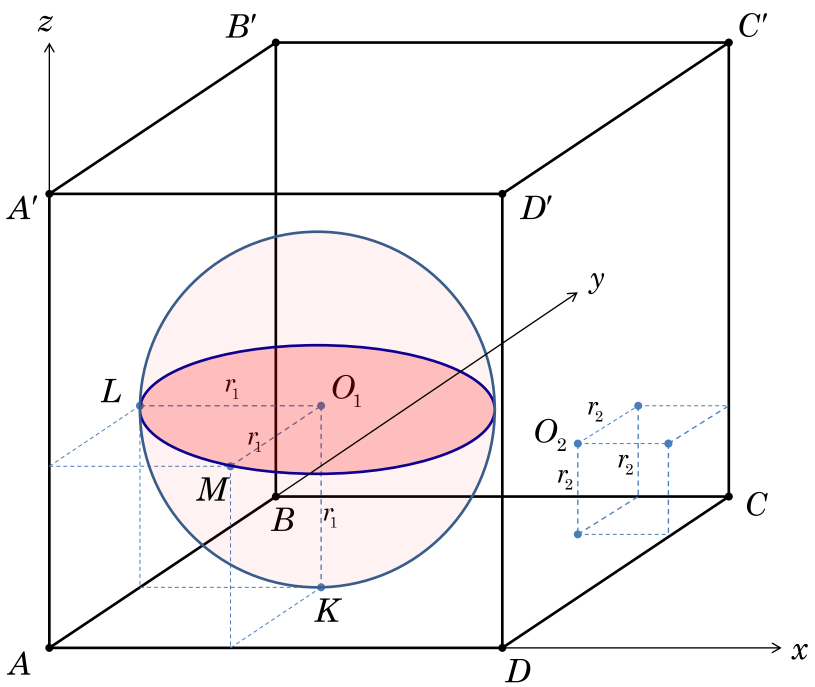

Рисунок 4

Шары касаются друг друга тогда и только тогда, когда расстояние между их центрами равно сумме их радиусов, $r_1 + r_2 \equiv 2 + x$. Из Рисунка 4 ясно, что центр первого шара имеет координаты $(r_1, r_1, r_1) \equiv (2,2,2)$, центр второго – координаты $(a - r_2, a - r_2, r_2) = (5 - x, 5 - x, x)$. Поэтому расстояние O_1O_2 между центрами шаров равно $\sqrt{(3-x)^2 + (3-x)^2 + (x-2)^2} = \sqrt{3x^2 - 16x + 22}.$

Таким образом, для неизвестного радиуса второго шара справедливо равенство $\sqrt{3x^2 - 16x + 22} = x + 2.$ Это иррациональное уравнение равносильно квадратному уравнению $x^2 - 10x + 9 = 0$ (мы учитываем, что $x > 0$), которое имеет два корня: 9 и 1. Первый корень соответствует шару с центром в точке $(-4;-4;9)$ и радиусом $r_2 = 9$. Хотя такой шар и касается первого шара, он не находится внутри куба, а лишь отсекает от куба кусок, содержащий часть трёхгранного угла с вершиной A' (центр шара расположен за пределами куба, а диаметр почти в 4 раза превышает размеры куба). По условию второй шар, как и первый, должен лежать внутри куба. Поэтому вариант $x = 9$ нам не подходит.

Корень $x = 1$ соответствует шару с центром в точке $(4,4,1)$ и радиусом $r_2 = 1$. Этот шар касается первого шара и находится внутри куба.

Ответ: радиус второго шара равен 1.

Задача 8. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 2x^2 + 4xy + 11y^2 \le 1 \\ 4x + 7y \ge 3 \end{cases}$$

Решение. Рассмотрим выражение в левой части первого неравенства как квадратный трёхчлен относительно x и выделим полный квадрат:

$$2x^2 + 4xy + 11y^2 = 2\left(x^2 + 2xy\right) + 11y^2 = 2\left(x^2 + 2xy + y^2 - y^2\right) + 11y^2 = 2(x+y)^2 + 9y^2.$$

Если ввести новые неизвестные $u = \sqrt{2}\,x + \sqrt{2}\,y$ и $v = 3y$, то первое неравенство примет вид: $u^2 + v^2 \le 1$. С другой стороны, из формул $u = \sqrt{2}\,x + \sqrt{2}\,y$, $v = 3y$ мы можем выразить основные неизвестные x и y через новые: $x = \dfrac{u}{\sqrt{2}} - \dfrac{v}{3}$, $y = \dfrac{v}{3}$. Соответственно второе неравенство исходной системы для новых неизвестных u и v примет вид: $2\sqrt{2}\,u + v \ge 3$, а вся исходная система — вид

$$\begin{cases} u^2 + v^2 \le 1 \\ 2\sqrt{2}u + v \ge 3 \end{cases} \tag{4}$$

Формулы $u=\sqrt{2}\,x+\sqrt{2}\,y$, $v=3y$ и $x=\dfrac{u}{\sqrt{2}}-\dfrac{v}{3}$, $y=\dfrac{v}{3}$ устанавливают взаимнооднозначное соответствие между парами (x,y) и (u,v). Поэтому наша задача сводится к решению системы (4).

На координатной плоскости (u,v) первое неравенство системы (4) задаёт круг радиуса 1 с центром в начале координат, а второе — полуплоскость над прямой $v=3-2\sqrt{2}\,u$. Чтобы понять их взаимное расположение, решим соответствующую систему из уравнений:

$$\begin{cases} u^2+v^2=1 \\ 2\sqrt{2}u+v=3 \end{cases} \tag{5}$$

Исключая неизвестную v из второго уравнения, мы получим квадратное уравнение $9u^2-12\sqrt{2}u+8=0$, дискриминант которого равен 0. Поэтому это уравнение имеет единственный корень $u=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$; соответствующее значение v равно $\dfrac{1}{3}$. Таким образом, система (5) имеет единственное решение $\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{3},\dfrac{1}{3}\right)$. Это означает, что прямая $v=3-2\sqrt{2}u$ касается окружности $u^2+v^2=1$ в точке с координатами $u=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$, $v=\dfrac{1}{3}$ (см. Рисунок 5).

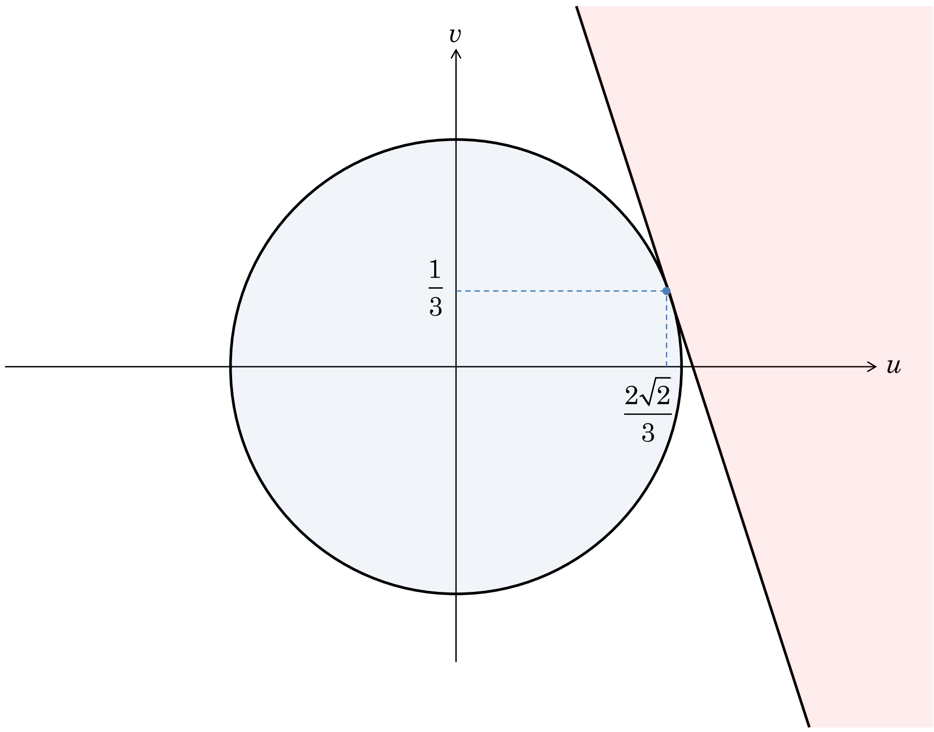

Рисунок 5

Из Рисунка 5 ясно, что система неравенств (4) также имеет единственное решение $u=\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $v=\frac{1}{3}$. По этим значениям неизвестных u и v однозначно восстанавливаются значения основных неизвестных: $x=\frac{2\sqrt{2}/3}{\sqrt{2}}-\frac{1/3}{3}=\frac{2}{3}-\frac{1}{9}=\frac{5}{9}$, $y=\frac{1/3}{3}=\frac{1}{9}$. Поэтому исходная система неравенств также имеет единственное решение: $x=\frac{5}{9}$, $y=\frac{1}{9}$.

Ответ: $\left\{\left(\frac{5}{9},\frac{1}{9}\right)\right\}$.

ДВИ-2012, вариант 122

Задача 1. Найдите многочлен второй степени, если известно, что его корни равны $-\frac{4}{7}$ и $\frac{5}{3}$, а свободный член равен -2.

Решение. По определению, корнями многочлена второй степени ax^2+bx+c называются корни соответствующего квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$. Поэтому условие задачи фактически означает, что это квадратное уравнение имеет два корня: $x_1=-\frac{4}{7}$ и $x_2=\frac{5}{3}$.

В силу теоремы Виета $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, $x_1x_2=\frac{c}{a}$. Подставляя значения величин c,x_1,x_2, которые известны нам по условию (свободный член — это c), мы имеем:

$$\begin{cases} -\frac{4}{7}+\frac{5}{3}=-\frac{b}{a} \\ \left(-\frac{4}{7}\right)\cdot\frac{5}{3}=\frac{-2}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-\frac{23}{21}a \\ a=\frac{21}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-\frac{23}{10} \\ a=\frac{21}{10} \end{cases},$$

так что искомый многочлен есть: $\frac{21}{10}x^2+\frac{23}{10}x-2.$

Ответ: $\frac{21}{10}x^2-\frac{23}{10}x-2.$

Задача 2. Вычислите $\log_2\log_{81}\frac{417}{139}$.

Решение. Попробуем упростить дробь $\frac{417}{139}$. Для этого разложим её числитель и знаменатель на множители.

Начнём с числителя. Число 417 делится на 3, т.к. сумма его цифр, которая равна $4+1+7=12$, делится на 3. После деления 417 на 3 мы получим частное 139. Уже этого достаточно, чтобы произвести упрощение:

$$\frac{417}{139}=\frac{3\cdot 139}{139}=3.$$

Далее, так как $81 = 3^4$, мы имеем: $\log_{81} 3 = \frac{1}{4}$. Поэтому исходное числовое выражение равно $\log_2 \frac{1}{4} = \log_2 2^{-2} = -2$.

Ответ: -2.

Задача 3. Решите неравенство $\left(9^x - 3^{x+2} + 14\right) \cdot \sqrt{4 - 2^x} \le 0$.

Решение. Неравенство распадается на две системы:

$$\begin{cases} 9^x - 3^{x+2} + 14 \ge 0 \\ \sqrt{4 - 2^x} \le 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 9^x - 3^{x+2} + 14 \le 0 \\ \sqrt{4 - 2^x} \ge 0 \end{cases}$$

Первые неравенства этих систем легко решаются с помощью новой неизвестной $y = 3^x$:

- неравенство $9^x - 3^{x+2} + 14 \ge 0$ сводится к неравенству $y^2 - 9y + 14 \ge 0$,
- неравенство $9^x - 3^{x+2} + 14 \le 0$ — к неравенству $y^2 - 9y + 14 \le 0$.

Для решения полученных квадратичных неравенств отметим, что соответствующее квадратное уравнение, $y^2 - 9y + 14 = 0$, имеет два корня: $y_1 = 2$, $y_2 = 7$, так что

- неравенство $y^2 - 9y + 14 \ge 0$ равносильно совокупности неравенств $y \le 2$, $y \ge 7$;
- неравенство $y^2 - 9y + 14 \le 0$ равносильно двойному неравенству $2 \le y \le 7$.

Возвращаясь к основной неизвестной x мы получим:

- $9^x - 3^{x+2} + 14 \ge 0 \Leftrightarrow 3^x \le 2$ или $3^x \ge 7 \Leftrightarrow x \le \log_3 2$ или $x \ge \log_3 7$;
- $9^x - 3^{x+2} + 14 \le 0 \Leftrightarrow 2 \le 3^x \le 7 \Leftrightarrow \log_3 2 \le x \le \log_3 7$.

Теперь займёмся вторыми неравенствами систем. Поскольку арифметический квадратный корень неотрицателен, неравенство $\sqrt{4 - 2^x} \le 0$ равносильно равенству

$$\sqrt{4 - 2^x} = 0 \Leftrightarrow 4 - 2^x = 0 \Leftrightarrow 2^x = 4 \Leftrightarrow x = 2.$$

По той же причине неравенство $\sqrt{4 - 2^x} \ge 0$ выполнено всегда, если только выражение $\sqrt{4 - 2^x}$ существует, т.е. подкоренное выражение неотрицательно:

$$\sqrt{4 - 2^x} \ge 0 \Leftrightarrow 4 - 2^x \ge 0 \Leftrightarrow 2^x \le 4 \Leftrightarrow x \le 2.$$

Дальнейшие рассуждения удобно оформить графически, так, как это сделано на Рисунке 1.

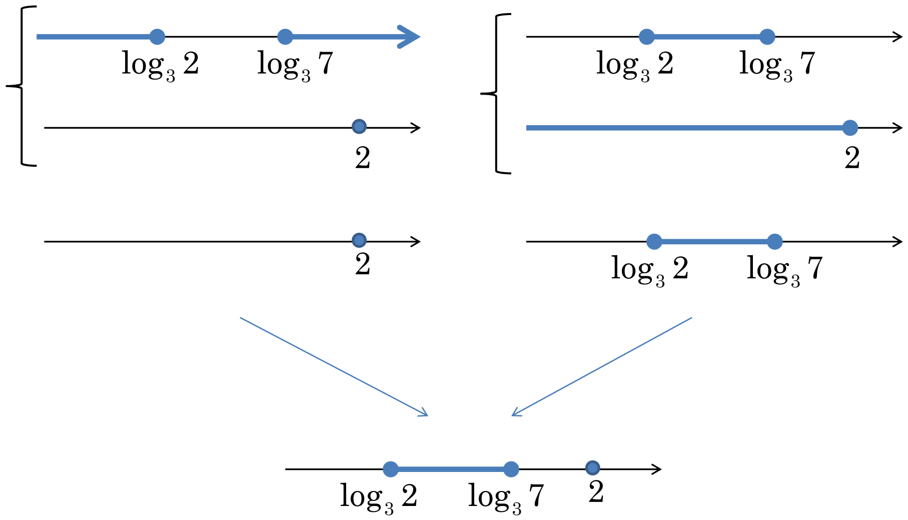

Рисунок 1

Ответ: $\left[\log_3 2, \log_3 7\right] \cup \{2\}$.

Задача 4. Решите уравнение $\sin 3x = \sqrt{2}\cos x - \sin x$.

Решение. Применяя тождество $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$, мы получим:

$$3\sin x - 4\sin^3 x = \sqrt{2}\cos x - \sin x$$

$$\Updownarrow$$

$$4\sin x\left(1 - \sin^2 x\right) = \sqrt{2}\cos x$$

$$\Updownarrow$$

$$4\sin x\cos^2 x = \sqrt{2}\cos x$$

Последнее уравнение распадается на два: $\cos x = 0$ и $4\sin x\cos x = \sqrt{2}$.

Множество решений первого уравнения имеет вид: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Второе уравнение приводится к виду $\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Множество решений этого уравнения может быть описано формулой $2x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$, или, что равносильно, формулами $2x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$, $2x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Объединяя множества решений этих двух уравнений, мы получаем ответ.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = \frac{\pi}{8} + \pi n$, $x = \frac{3\pi}{8} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 5. Найдите площадь фигуры, состоящей из точек (x, y) координатной плоскости, удовлетворяющих уравнению

$$|x| + |x + 3y| + 3|y - 2| = 6.$$

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$|-x| + |x + 3y| + |-3y + 6| = 6$$

и введём новые переменные $a = -x$, $b = x + 3y$, $c = -3y + 6$. Поскольку $a + b + c = 6$, уравнение имеет вид:

$$|a| + |b| + |c| = a + b + c.$$

Чтобы его упростить, рассмотрим более общее уравнение вида

$$|a_1| + \ldots + |a_n| = a_1 + \ldots + a_n. \qquad (1)$$

Известно, что $|a_k| \ge a_k$, $k = 1, \ldots, n$. Складывая эти неравенства почленно, мы получим:

$$|a_1| + \ldots + |a_n| \ge a_1 + \ldots + a_n.$$

При этом, если хотя бы в одном из использованных неравенств вида $|a_k| \ge a_k$ стоял знак «>», то мы бы имели строгое неравенство

$$|a_1| + \ldots + |a_n| > a_1 + \ldots + a_n.$$

Поэтому равенство (1) равносильно системе

$$\begin{cases} |a_1| = a_1, \\ \ldots \\ |a_n| = a_n. \end{cases}$$

Т.к. равенство $|a| = a$ равносильно неотрицательности выражения a под знаком модуля, эта система сводится к системе

$$\begin{cases} a_1 \ge 0, \\ \ldots \\ a_n \ge 0. \end{cases}$$

Для нашей задачи последняя система примет вид:

$$\begin{cases} -x & \geq & 0 \\ x+3y & \geq & 0 \\ -3y+6 & \geq & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & \leq & 0 \\ y & \geq & -\dfrac{x}{3} \\ y & \leq & 2 \end{cases}$$

На координатной плоскости (x, y) эта система задаёт прямоугольный треугольник AOB (с внутренностью), вершины которого имеют координаты: $A(-6,-2)$, $O(0,0)$, $B(0,2)$ (см. Рисунок 2). Его катеты AB и OB равны 6 и 2 соответственно. Поэтому площадь треугольника AOB равна 6.

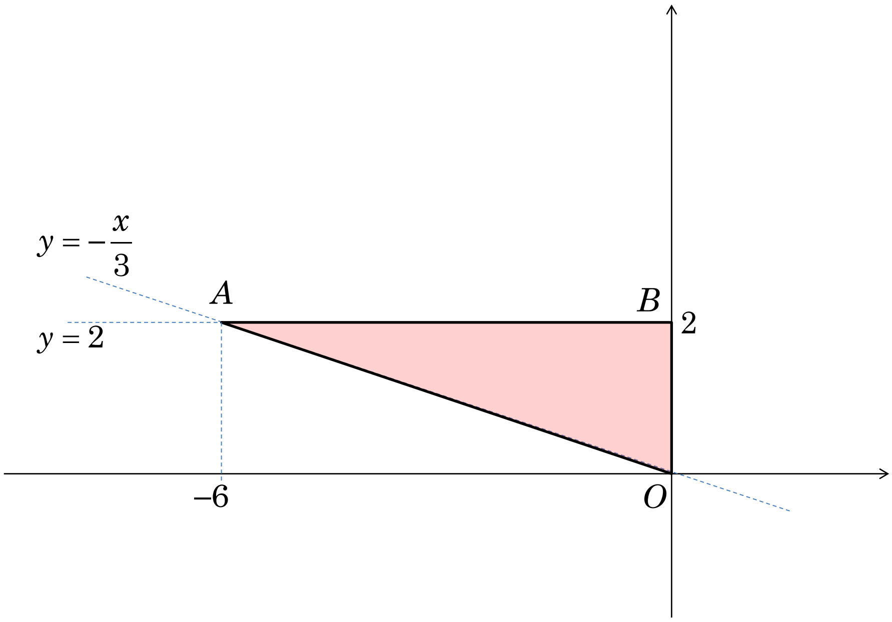

Рисунок 2

Ответ: $S=6$.

Задача 6. Окружность касается сторон AB и BC треугольника ABC в точках D и E соответственно и пересекает сторону AC в точках F, G (точка F лежит между точками A и G). Найдите радиус этой окружности, если известно, что $AF=5$, $GC=2$, $AD:DB=2:1$ и $BE=EC$.

Решение. Конфигурация, рассматриваемая в задаче, изображена на Рисунке 3. На этом рисунке отрезки BD и BE – это касательные, проведённые к окружности из одной точки B вне окружности. Поэтому их длины равны; пусть a – их общее значение.

По условию $BE=EC$; значит $EC=a$. Кроме того, $AD:DB=2:1$; значит $AD=2a$. На Рисунке 3 остался один отрезок, длина которого нам неизвестна – это FG. Его длину обозначим b.

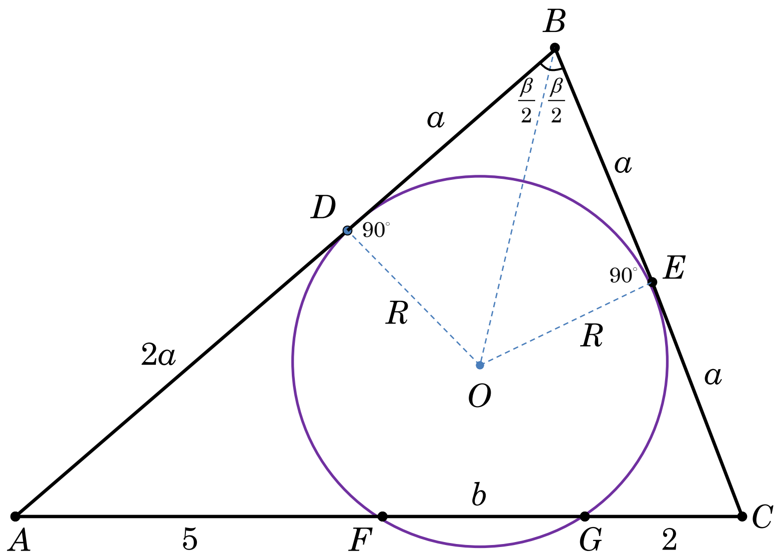

Рисунок 3

Из точки A к окружности проведена касательная $AD = 2a$ и секущая $AG = 5 + b$, внешняя часть которой, AF, равна 5. Известная теорема утверждает, что квадрат касательной равен произведению секущей на её внешнюю часть, т.е. $(2a)^2 = 5 \cdot (5 + b)$.

Аналогично, из точки C к окружности проведена касательная $CE = a$ и секущая $CF = 2 + b$, внешняя часть которой, CG, равна 2. Поэтому $a^2 = 2 \cdot (2 + b)$.

Рассматривая равенства $(2a)^2 = 5 \cdot (5 + b)$ и $a^2 = 2 \cdot (2 + b)$ как систему из двух уравнений относительно неизвестных a и b, мы без труда найдём: $a = \sqrt{10}, \quad b = 3$.

Теперь мы знаем все стороны треугольника ABC: $AB = 3\sqrt{10}$, $BC = 2\sqrt{10}$, $AC = 10$, что позволяет с помощью теоремы косинусов найти все его углы. Нам интересен $\angle ABC \equiv \beta$, для которого теорема косинусов примет вид:

$$10^2 = \left(3\sqrt{10}\right)^2 + \left(2\sqrt{10}\right)^2 - 2 \cdot 3\sqrt{10} \cdot 2\sqrt{10} \cdot \cos\beta \quad \Leftrightarrow \quad \cos\beta = \frac{1}{4}.$$

Поэтому $\sin\beta = \sqrt{1 - \cos^2\beta} = \frac{\sqrt{15}}{4}$. Здесь мы ставим перед радикалом знак «+», т.к. $\beta \in (0, \pi)$ как угол треугольника (на самом деле положительность $\cos\beta$ означает, что этот угол острый), а синус положителен на этом промежутке.

Имея в виду следующий, завершающий, шаг решения, найдём $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$:

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{\sin\beta}{1 + \cos\beta} = \sqrt{\frac{3}{5}}.$$

Теперь мы можем найти радиус R окружности. С этой целью рассмотрим треугольник BDO. В этом треугольнике OD — радиус окружности, проведённый в точку касания. Значит, угол BDO прямой. Далее, поскольку окружность касается сторон угла ABC, её центр O лежит на биссектрисе этого угла, т.е. в прямоугольном треугольнике BDO угол DBO равен $\frac{\beta}{2}$. Один катет этого треугольника, DB, нам уже известен: $DB = a = \sqrt{10}$, а второй катет, DO – это интересующий нас радиус окружности. Поскольку мы заблаговременно вычислили $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$, мы немедленно получаем ответ: $R = a\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \sqrt{10}\cdot\sqrt{\frac{3}{5}} = \sqrt{6}$.

Ответ: $R = \sqrt{6}$.

Задача 7. Определите, при каких значениях параметра a уравнение

$$a\sqrt{x+y} = \sqrt{3x} + 2\sqrt{y}$$

имеет единственное решение (x,y).

Решение. Прежде всего отметим, что данное нам уравнение определено для $x \ge 0$, $y \ge 0$.

Хотя наше уравнение содержит три радикала, от двух из них, например, от радикалов в правой части, можно избавиться с помощью новых неизвестных $u = \sqrt{x}$, $v = \sqrt{y}$. Как и основные неизвестные, неизвестные u и v неотрицательны.

Из формул $u = \sqrt{x}$, $v = \sqrt{y}$ можно выразить старые неизвестные через новые: $x = u^2$, $y = v^2$, и, соответственно, переписать исходное уравнение в виде

$$a\sqrt{u^2+v^2} = \sqrt{3}u + 2v. \tag{2}$$

Соотношения $u = \sqrt{x}$, $v = \sqrt{y}$ и $x = u^2$, $y = v^2$ задают взаимно однозначное соответствие между парами неотрицательных чисел x, y и парами неотрицательных чисел u,v. Поэтому наша задача сводится к следующей:

Определите, при каких значениях параметра a уравнение (2) имеет единственное решение (u,v) на множестве $\mathbb{R}_+^2 = \{(u,v) | u \ge 0, v \ge 0\}$ пар неотрицательных действительных чисел.

Очевидно, что при любом a пара $(0,0)$ является решением уравнения **Ошибка! Источник ссылки не найден.**. Это замечание позволяет свести задачу к следующей:

> *Определите, при каких значениях параметра a уравнение* **Ошибка! Источник ссылки не найден.** *не имеет решений на множестве $\mathbb{K} \equiv \mathbb{R}_+^2 \setminus \{(0,0)\}$ пар неотрицательных действительных чисел, которые не равны 0 одновременно (т.е. хотя бы одно из которых строго положительно; геометрически это множество можно мыслить как первый квадрат с границами, но с выколотым началом координат).*

Если числа u и v не равны 0 одновременно, то $u^2 + v^2 > 0$, и мы можем свести последнюю задачу к виду:

Задача А. *Определите, при каких значениях параметра a уравнение*

$$\frac{\sqrt{3}u + 2v}{\sqrt{u^2 + v^2}} = a \qquad (3)$$

не имеет решений на множестве $\mathbb{K}$.

Отметим, что уравнение (3) автоматически влечёт, что u и v не равны 0 одновременно; поэтому мы оставили только требование неотрицательности этих чисел.

Задачу А можно решать разными способами.

Способ 1. Рассмотрим функцию $f(u,v) = \dfrac{\sqrt{3}u + 2v}{\sqrt{u^2 + v^2}}$ с областью определения $\mathbb{K}$. В Задаче А фактически просят установить, какие значения a не входят в область значений этой функции.

Для ответа на этот вопрос мы просто найдём эту область значений. С этой целью рассмотрим два случая.

Случай 1: $v = 0$. Тогда (ниже мы учитываем, что $u > 0$ и потому $\sqrt{u^2} = |u| = u$)

$$f(u,v) \equiv f(u,0) = \frac{\sqrt{3}u + 2 \cdot 0}{\sqrt{u^2 + 0^2}} = \frac{\sqrt{3}u}{u} = \sqrt{3}.$$

Таким образом, число $\sqrt{3}$ входит в область значений функции $f(u,v)$.

Случай 2: $u \geq 0, v > 0$ – геометрически это означает, что точка (u,v) лежит в первом квадранте без горизонтальной границы. Разделим числитель и знаменатель дроби, которая задаёт функцию $f(u,v)$ на v:

$$f(u,v)=\frac{\sqrt{3}\frac{u}{v}+2}{\sqrt{\left(\frac{u}{v}\right)^2+1}}.$$

Эта формула означает, что функция $f(u,v)$ (которая сейчас рассматривается только на первом квадранте) для всех точек (u,v), лежащих на луче $u=vt$, $v>0$, с фиксированным $t\geq 0$, принимает одно и то же значение $g(t)=\frac{\sqrt{3}t+2}{\sqrt{t^2+1}}$. Поэтому область значений функции $f(u,v)$ (при $u\geq 0, v>0$) совпадает с областью значений функции $g(t)$ при $t\geq 0$.

Поскольку

$$g'(t)=\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{t^2+1}-\left(\sqrt{3}t+2\right)\cdot\frac{2t}{2\sqrt{t^2+1}}}{t^2+1}=\frac{\sqrt{3}-2t}{\left(t^2+1\right)^{3/2}},$$

функция $g(t)$ возрастает на промежутке $0\leq t\leq\frac{\sqrt{3}}{2}$ и убывает на промежутке $\frac{\sqrt{3}}{2}\leq t<+\infty$.

Далее, $g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\sqrt{7}$, $g(0)=2$, $\lim\limits_{t\to+\infty}g(t)=\sqrt{3}$. Поэтому область значений функции $g(t)$ при $t\geq 0$ и, значит, область значений функции $f(u,v)$ при $u\geq 0, v>0$, — это промежуток $\left(\sqrt{3},\sqrt{7}\right]$.

Добавляя в этот промежуток точку $\sqrt{3}$ (значение функции $f(u,v)$ при $u>0, v=0$), мы получим область значений функции $f(u,v)$ — это отрезок $\left[\sqrt{3},\sqrt{7}\right]$. Поэтому уравнение (3) не имеет решений $u\geq 0$, $v\geq 0$ тогда и только тогда, когда $a<\sqrt{3}$ или $a>\sqrt{7}$ – это и будет ответом исходной задачи.

Способ 2. Перейдём от декартовых координат (u,v) к полярным, т.е. опишем точку $M=(u,v)$ парой (r,φ), где $r=\sqrt{u^2+v^2}>0$, а $\varphi\in\left[0,2\pi\right)$ — угол, который радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$ образует с положительным направлением оси абсцисс. Для точек плоскости с выколотым началом соответствие между декартовыми координатами и полярными взаимно однозначно – обратный переход от пары полярных координат $r\in(0,+\infty)$, $\varphi\in\left[0,2\pi\right)$ к декартовым происходит по формулам $u=r\cos\varphi$, $v=r\sin\varphi$.

Отметим, что условие $u \ge 0, v \ge 0$ означает, что $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$. Поэтому в полярных координатах наша задача примет вид:

Задача B. *Определите, при каких значениях параметра* a *уравнение* $\sqrt{3}\cos\varphi + 2\sin\varphi = a$ *относительно неизвестных* $r \in (0, +\infty)$ и $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *не имеет решений.*

Чтобы решить уравнение $\sqrt{3}\cos\varphi + 2\sin\varphi = a$, как обычно, разделим его почленно на $\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 2^2} = \sqrt{7}$:

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\cos\varphi + \frac{2}{\sqrt{7}}\sin\varphi = \frac{a}{\sqrt{7}},$$

и введём новый аргумента ψ как $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ или, что равносильно, как $\arccos\frac{2}{\sqrt{7}}$. Тогда уравнение $\sqrt{3}\cos\varphi + 2\sin\varphi = a$ примет вид:

$$\sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\sin\varphi = \frac{a}{\sqrt{7}} \Leftrightarrow \sin(\varphi + \psi) = \frac{a}{\sqrt{7}}. \qquad (4)$$

При изменении переменной φ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ величина $\varphi + \psi$ меняется на отрезке $\left[\psi; \frac{\pi}{2} + \psi\right]$. Поэтому величина $\sin(\varphi + \psi)$ сначала возрастает от $\sin\psi = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ до 1, а затем убывает от 1 до $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \psi\right) = \cos\psi = \frac{2}{\sqrt{7}}$. Таким образом, значения функции $f(\varphi) = \sin(\varphi + \psi)$ заполняют отрезок $\left[\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}, 1\right]$. Поэтому уравнение (4) не имеет решений на промежутке $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ тогда и только тогда, когда $\frac{a}{\sqrt{7}} < \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ или $\frac{a}{\sqrt{7}} > 1$ или, что то же самое, когда $a < \sqrt{3}$ или $a > \sqrt{7}$.

Ответ: уравнение имеет единственное решение тогда и только тогда $a < \sqrt{3}$ или $a > \sqrt{7}$.

Замечание 1. Использование полярных координат позволяет полностью решить исходное уравнение при $a \in \left[\sqrt{3}, \sqrt{7}\right]$ (когда оно имеет решения, отличные от тривиального решения $x = 0$, $y = 0$).

Действительно, проведённые рассуждения позволяют заключить, что уравнение (4), рассматриваемое как уравнение относительно *одной* неизвестной $\varphi \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$:

1. при $a \in \left[\sqrt{3},2\right)$ или $a=\sqrt{7}$ имеет единственное решение $\varphi = \arcsin\frac{a}{\sqrt{7}} - \psi$;
2. при $a \in \left[2,\sqrt{7}\right)$ имеет два решения: $\varphi = \arcsin\frac{a}{\sqrt{7}} - \psi$ и $\varphi = \pi - \arcsin\frac{a}{\sqrt{7}} - \psi$.

Следует, однако, иметь в виду, что уравнение (4) неявно содержит ещё одну неизвестную — r (длину радиус-вектора). Поэтому на самом деле уравнение (4)

1. при $a \in \left[\sqrt{3},2\right)$ или $a=\sqrt{7}$ имеет бесконечно много решений (r,φ), где $\varphi = \arcsin\frac{a}{\sqrt{7}} - \psi$, а r – произвольное положительное действительное число;
2. при $a \in \left[2,\sqrt{7}\right)$ имеет бесконечно много решений (r,φ), где: $\varphi = \arcsin\frac{a}{\sqrt{7}} - \psi$ или $\varphi = \pi - \arcsin\frac{a}{\sqrt{7}} - \psi$, а r – произвольное положительное действительное число.

Возвращаясь к неизвестным u и v, мы получим следующий результат: уравнение (3) на множестве $u \ge 0$, $v \ge 0$

1. при $a \in \left[\sqrt{3},2\right)$ или $a=\sqrt{7}$ имеет бесконечно много решений вида

$$\begin{cases} u = \dfrac{r}{7}\left(\sqrt{3}a + 2\sqrt{7-a^2}\right), \\ v = \dfrac{r}{7}\left(2a - \sqrt{3}\sqrt{7-a^2}\right), \end{cases}$$

где r – произвольное положительное действительное число;

2. при $a \in \left[2,\sqrt{7}\right)$ имеет бесконечно много решений вида

$$\begin{cases} u = \dfrac{r}{7}\left(\sqrt{3}a + 2\sqrt{7-a^2}\right), \\ v = \dfrac{r}{7}\left(2a - \sqrt{3}\sqrt{7-a^2}\right), \end{cases} \qquad \begin{cases} u = \dfrac{r}{7}\left(\sqrt{3}a - 2\sqrt{7-a^2}\right), \\ v = \dfrac{r}{7}\left(2a + \sqrt{3}\sqrt{7-a^2}\right), \end{cases}$$

где r – произвольное положительное действительное число.

Возводя формулы для u и v в квадрат, мы получим все нетривиальные решения (x,y) исходного уравнения.

Наличие свободного положительного параметра r в виде множителя очевидно из того, что уравнение (3) не изменится при замене пары (u,v) на пару

(ru, rv) (если $r > 0$). Поэтому, если пара (u_0, v_0) является решением, то и пара (ru_0, rv_0) является решением. Геометрически это означает, что при любом a множество решений уравнения (3) (если оно непусто) является объединением лучей с вершиной в начале координат (сама вершина выколота). Именно по этой причине было естественно перейти к полярным координатам.

Замечание 2. Задачу А можно решать и гораздо более примитивными, но и более запутанными, рассуждениями. Прежде всего ясно, что условие $(u, v) \in \mathbb{K}$ влечёт положительность дроби $\dfrac{\sqrt{3}u + 2v}{\sqrt{u^2 + v^2}}$. Поэтому при $a \le 0$ уравнение (3) заведомо не имеет решений, т.е. все $a \le 0$ удовлетворяет условиям Задачи А.

Дальше будем считать, что $a > 0$. В этом случае уравнение (3) можно упростить возведением в квадрат; на множестве $\mathbb{K}$ оно равносильно уравнению

$$\left(3 - a^2\right)u^2 + 4\sqrt{3}uv + \left(4 - a^2\right)v^2 = 0. \qquad (5)$$

Если $a = \sqrt{3}$, то это уравнение примет вид (ниже мы учитываем, что выражение $4\sqrt{3}u + v$ положительно на множестве $\mathbb{K}$):

$$4\sqrt{3}uv + v^2 = 0 \Leftrightarrow \left(4\sqrt{3}u + v\right)v = 0 \Leftrightarrow v = 0.$$

Таким образом, при $a = \sqrt{3}$ и только в этом случае уравнение (5) имеет бесконечно много решений вида $u > 0, v = 0$. Следовательно, значение $a = \sqrt{3}$ не удовлетворяет условиям Задачи А.

Будем далее предполагать, что $a \ne \sqrt{3}$. Как мы только что установили, это равносильно тому, что $v > 0$. Поскольку уравнение (5) является однородным уравнением второй степени и $v \ne 0$, разделим его почленно на v^2 и введём новую неизвестную $t = \dfrac{u}{v}$:

$$\left(3 - a^2\right)t^2 + 4\sqrt{3}t + \left(4 - a^2\right) = 0. \qquad (6)$$

Если $3 - a^2 > 0$ (т.е. $0 < a < \sqrt{3}$), то тем более положительно выражение $4 - a^2$. Поэтому при $t \ge 0$ левая часть уравнения (6) положительна, так что оно не может иметь неотрицательных решений. Поэтому все значения $a \in \left(0, \sqrt{3}\right)$ удовлетворяют условиям Задачи А.

Пусть теперь $3-a^2<0$ (т.е. $a>\sqrt{3}$). Тогда отношение второго коэффициента, $4\sqrt{3}$, к старшему коэффициенту, $3-a^2$, отрицательно. Значит, *если* квадратное уравнение (6) имеет корни, то их сумма положительна. Это влечёт положительность по меньшей мере одного корня. Таким образом, при $a>\sqrt{3}$ уравнение (6) не имеет неотрицательных корней только в случае, когда оно вообще их не имеет, т.е. когда дискриминант отрицателен:

$$\left(2\sqrt{3}\right)^2-\left(3-a^2\right)\left(4-a^2\right)<0 \Leftrightarrow a^4-7a^2>0 \Leftrightarrow a>\sqrt{7}.$$

Резюмируя проведённые рассуждения мы получаем ответ задачи: $a<\sqrt{3}$ или $a>\sqrt{7}$.

В случае $\sqrt{3}\le a\le\sqrt{7}$ нетрудно найти все решения уравнения (5) на множестве $\mathbb{K}$ пар неотрицательных чисел u и v, не равных одновременно нулю.

Случай $a=\sqrt{3}$ мы уже разобрали выше; в этом и только в этом случае уравнение (5) имеет бесконечно много решений вида $u>0, v=0$.

Решение, основанное на полярных координатах, для $a\in\left[\sqrt{3},2\right)$ и $a=\sqrt{7}$ дало бесконечно много решений вида: $u=\frac{r}{7}\left(\sqrt{3}a+2\sqrt{7-a^2}\right)$, $v=\frac{r}{7}\left(2a-\sqrt{3}\sqrt{7-a^2}\right)$, где r – произвольное положительное действительное число. При $a=\sqrt{3}$ эти формулы примут вид: $u=r$, $v=0$, где r – произвольное положительное действительное число, что совпадает с ответом, полученным на основе квадратного уравнения.

Если $\sqrt{3}<a\le\sqrt{7}$, то (5) сводится к квадратному уравнению (6) относительно новой неизвестной $t=u/v$. Для этого уравнения

$$\frac{D}{4}=\left(2\sqrt{3}\right)^2-\left(3-a^2\right)\left(4-a^2\right)=-a^4+7a^2=a^2\left(7-a^2\right).$$

Поэтому при $a=\sqrt{7}$ оно имеет единственный корень $t=\frac{-2\sqrt{3}}{3-7}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Соответственно, уравнение (5) сводится к уравнению $\frac{u}{v}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, которое на множестве $\mathbb{K}$ имеет бесконечно много решений вида: $u=\frac{\sqrt{3}}{2}s$, $v=s$, где s – произвольное положительное действительное число. Решение, основанное на полярных координатах, для $a=\sqrt{7}$ даёт ответ: $u=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}r$, $v=\frac{2}{\sqrt{7}}r$, где r – произвольное положительное действительное число. При замене $s=\frac{2}{\sqrt{7}}r$ оба варианта ответа идентичны.

Если $\sqrt{3}<a<\sqrt{7}$, то квадратное уравнение (6) имеет два корня:

$$t_-=\frac{2\sqrt{3}-a\sqrt{7-a^2}}{a^2-3},\quad t_+=\frac{2\sqrt{3}-a\sqrt{7-a^2}}{a^2-3}.$$

Их сумма равна $\frac{4\sqrt{3}}{a^2-3}$ и потому положительна. Произведение же равно $\frac{a^2-4}{a^2-3}$.

Если $a\geq 2$, то произведение t_-t_+ неотрицательно. Значит, либо оба корня неотрицательны, либо оба корня неположительны. Но сумма t_-+t_+ всегда положительна. Поэтому второй случай невозможен. Итак, при $2\leq a<\sqrt{7}$ уравнение (6) имеет два неотрицательных корня:

$$t_-=\frac{2\sqrt{3}-a\sqrt{7-a^2}}{a^2-3},\quad t_+=\frac{2\sqrt{3}+a\sqrt{7-a^2}}{a^2-3}.$$

Соответственно, уравнение (5) распадается на два уравнения: $\frac{u}{v}=t_-$ и $\frac{u}{v}=t_+$. На множестве $\mathbb{K}$ каждое из них имеет бесконечно много решений вида: $u=t_-s$, $v=s$ и $u=t_+s$, $v=s$ соответственно (s — произвольное положительное действительное число). Решение, основанное на полярных координатах, для $2\leq a<\sqrt{7}$ даёт ответ:

$$\begin{cases} u= & \frac{r}{7}\left(\sqrt{3}a+2\sqrt{7-a^2}\right),\\ v= & \frac{r}{7}\left(2a-\sqrt{3}\sqrt{7-a^2}\right),\end{cases}\quad \text{или} \quad \begin{cases} u= & \frac{r}{7}\left(\sqrt{3}a-2\sqrt{7-a^2}\right),\\ v= & \frac{r}{7}\left(2a+\sqrt{3}\sqrt{7-a^2}\right),\end{cases}$$

где r — произвольное положительное действительное число. При замене $s=\frac{r}{7}\left(2a-\sqrt{3}\sqrt{7-a^2}\right)$ для первой серии и $s=\frac{r}{7}\left(2a+\sqrt{3}\sqrt{7-a^2}\right)$ для второй оба варианта ответа становятся идентичными (первая серия даёт серию $u=t_+s$, $v=s$, а вторая – серию $u=t_-s$, $v=s$).

Если $a<2$, то произведение t_-t_+ отрицательно. Значит, корни t_-,t_+ имеют разные знаки; ясно, что $t_-<0$, $t_+>0$. Итак, при $\sqrt{3}<a<2$ уравнение (6) имеет один положительный корень: $t_+=\frac{2\sqrt{3}+a\sqrt{7-a^2}}{a^2-3}$. Соответственно, уравнение (5) равносильно уравнению $\frac{u}{v}=t_+$, которое на множестве $\mathbb{K}$ имеет бесконечно много решений вида: $u = t_+ s$, $v = s$ соответственно (s — произвольное положительное действительное число). Решение, основанное на полярных координатах, для $\sqrt{3} < a < 2$ даёт ответ:

$$\begin{cases} u = & \dfrac{r}{7}\left(\sqrt{3}a + 2\sqrt{7 - a^2}\right), \\ v = & \dfrac{r}{7}\left(2a - \sqrt{3}\sqrt{7 - a^2}\right), \end{cases}$$

где r — произвольное положительное действительное число. При замене $s = \dfrac{r}{7}\left(2a - \sqrt{3}\sqrt{7 - a^2}\right)$ оба варианта ответа становятся идентичными.

Задача 8. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник ABC со сторонами $AC = BC = 5$ и $AB = 6$, боковые рёбра AS, BS, CS пирамиды равны соответственно 7, 7 и 4. Прямой круговой цилиндр расположен так, что окружность его верхнего основания имеет ровно одну общую точку с каждой из боковых граней пирамиды, а окружность нижнего основания лежит в плоскости ABC и касается прямых AC и BC. Найдите высоту цилиндра.

Решение. На Рисунке 4 изображена пирамида, о которой идёт речь в задаче. Мы дополнили этот рисунок результатами следующих рассуждений.

1. Треугольник ABC равнобедренный с основанием $AB = 6$ и равными сторонами AC и BC: $AC = BC = 5$. Поэтому, если D – середина стороны AB, то CD будет не только медианой, но и высотой, и биссектрисой.

Из прямоугольного треугольника ACD по теореме Пифагора мы тогда имеем: $DC = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$. Кроме того, для угла $\alpha = \angle ACD = \angle DCB$: $\sin\alpha = 3/5, \cos\alpha = 4/5, \operatorname{tg}\alpha = 3/4$.

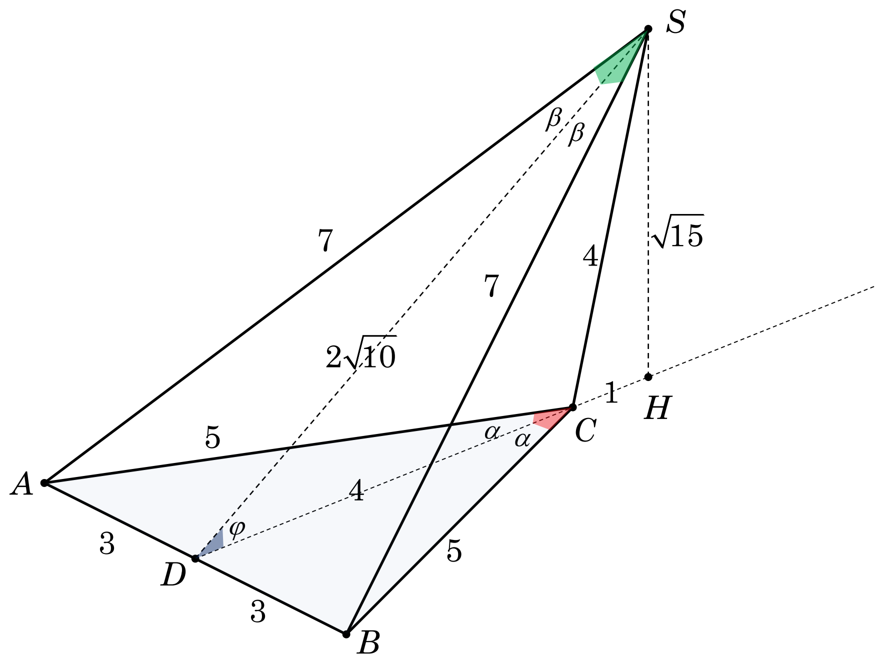

Рисунок 4

Имея в виду будущие рассуждения, вычислим и радиус r окружности, вписанной в треугольник ABC:

$$r = \frac{\text{площадь } \Delta ABC}{\text{полупериметр } \Delta ABC} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 4}{\frac{1}{2}\cdot(6+5+5)} = \frac{3}{2}.$$

2. Треугольник ABS также равнобедренный с основанием $AB=6$ и равными сторонами AS и BS: $AS=BS=7$. Так как D – середина стороны AB, то SD будет не только медианой, но и высотой, и биссектрисой.

Из прямоугольного треугольника ASD по теореме Пифагора мы тогда имеем: $DS=\sqrt{AS^2-AD^2}=\sqrt{7^2-3^2}=2\sqrt{10}$. Кроме того, для угла $\beta=\angle ASD=\angle DSB$: $\sin\beta = 3/7$, $\cos\beta = 2\sqrt{10}/7$, $\operatorname{tg}\beta = 3\sqrt{10}/20$.

3. Поскольку $SC=4$ (по условию), $DC=4$ (как мы установили выше), треугольник DSC также равнобедренный с основанием $DS=2\sqrt{10}$. Поэтому высота, опущенная из вершины C на сторону DS, является также и медианой (см. также Рисунок 5). Следовательно, для угла $\varphi=\angle SDC=\angle DSC$: $\cos\varphi=\sqrt{10}/4$, $\sin\varphi=\sqrt{1-\sin^2\varphi}=\sqrt{6}/4$, $\operatorname{tg}\varphi=\sin\varphi/\cos\varphi=3\sqrt{5}/5$. Так как $\sqrt{10}/4>\sqrt{8}/4=\sqrt{2}/2$, можно утверждать, что $\cos\varphi>\cos 45^\circ$. Поэтому угол φ меньше 45° и, следовательно, угол $DCS=180^\circ-2\varphi$ больше 90°, т.е. является тупым.

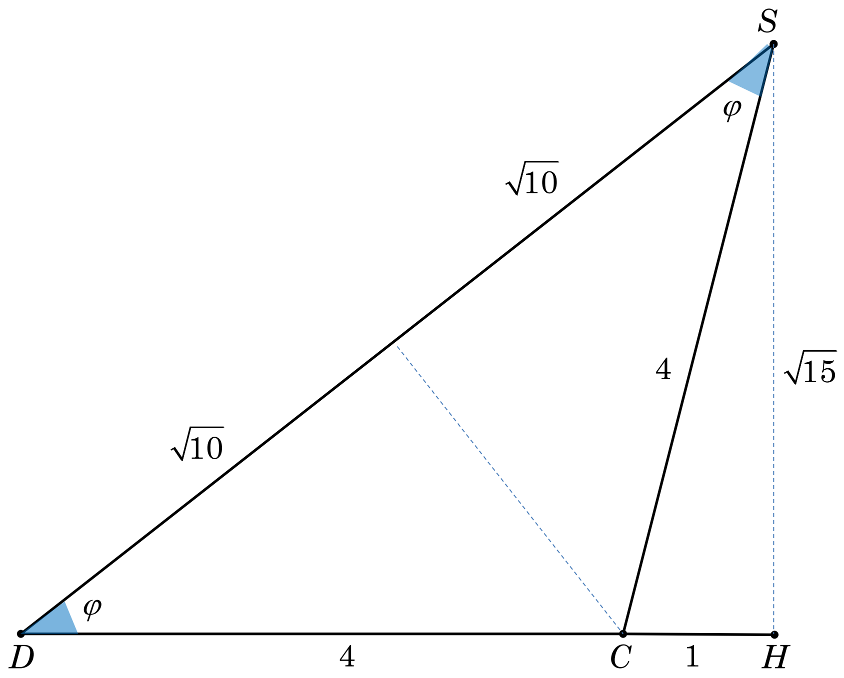

Рисунок 5

4. Как мы установили, прямая AB перпендикулярна прямым DC и DS. Поэтому прямая AB перпендикулярна плоскости DSC. Следовательно, и плоскость ABC, которая проходит через прямую AB, перпендикулярна плоскости DSC.

5. Опустим перпендикуляр SH из вершины пирамиды на плоскость основания (плоскость ABC). Поскольку плоскости DSC и ABC перпендикулярны, этот перпендикуляр:

- лежит в плоскости DSC,
- его основание H лежит на линии DC пересечения плоскостей,
- перпендикулярен линии пересечения плоскостей, т.е. прямой DC (см. Рисунок 5).

Тогда из прямоугольного треугольника DSH мы можем найти высоту SH пирамиды: $SH = DS \cdot \sin\varphi = 2\sqrt{10} \cdot \dfrac{\sqrt{6}}{4} = \sqrt{15}$, а из прямоугольного треугольника CSH — катет CH: $CH = \sqrt{CS^2 - SH^2} = \sqrt{4^2 - \left(\sqrt{15}\right)^2} = 1$.

Теперь займёмся цилиндром, о котором идёт речь в задаче. Пусть π – плоскость верхнего основания, A_1, B_1, C_1 – точки пересечения этой плоскости и рёбер AS, BS, CS соответственно (см. Рисунок 6).

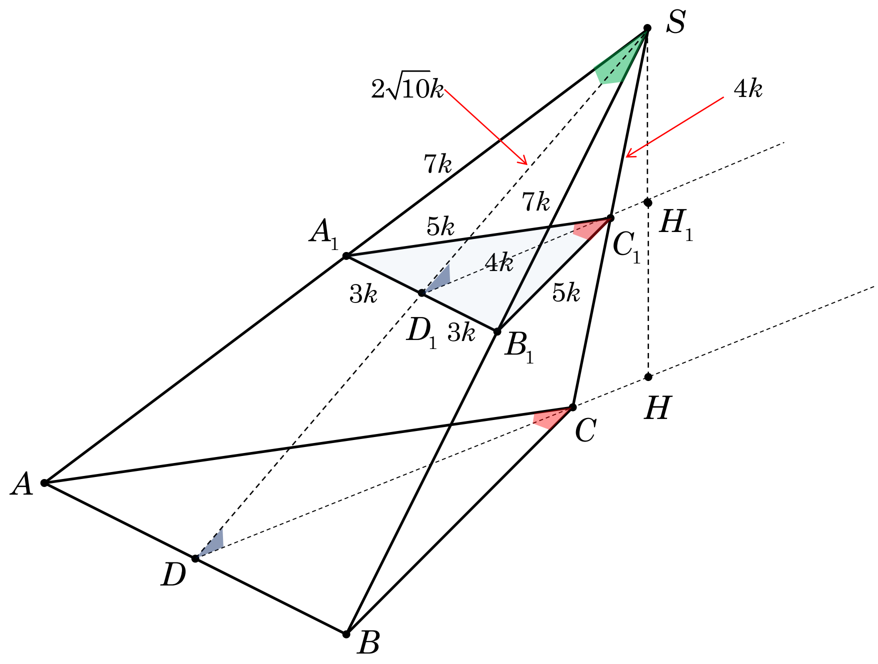

Рисунок 6

Прямые AB и A_1B_1, AC и A_1C_1, BC и B_1C_1 – это линии пересечения параллельных плоскостей ABC и π с плоскостями ABS, ACS, BCS соответственно. Поэтому $AB \parallel A_1B_1$, $AC \parallel A_1C_1$, $BC \parallel B_1C_1$. Эти параллельности влекут равенство углов CAB и $C_1A_1B_1$, CBA и $C_1B_1A_1$, ACB и $A_1C_1B_1$, что, в свою очередь, влечёт подобие треугольников $A_1B_1C_1$ и ABC.

Пусть $k<1$ – коэффициент подобия при переходе от треугольника ABC к треугольнику $A_1B_1C_1$ (или, как ещё говорят, коэффициент подобия треугольника $A_1B_1C_1$ по отношению к треугольнику ABC); тогда $A_1B_1 = 6k$, $A_1C_1 = 5k$, $B_1C_1 = 5k$. Окружность верхнего основания цилиндра – это окружность, вписанная в треугольник $A_1B_1C_1$; её радиус r_1 равен $kr = 3k/2$.

Параллельность прямых AB и A_1B_1 влечёт подобие треугольников ASB и A_1SB_1. При этом, поскольку $A_1B_1/AB = k$, эти треугольники подобны с тем же коэффициентом подобия k, что и треугольники ABC и $A_1B_1C_1$. Значит, $A_1S = 7k$, $B_1S = 7k$.

По аналогичной причине подобны как треугольники ACS и A_1C_1S, так и треугольники BCS и B_1C_1S, причём всё с тем же коэффициентом подобия k. Значит, $C_1S = 4k$.

Далее, пусть D_1 – точка пересечения отрезков A_1B_1 и DS. Так как $DS \perp AB$, можно утверждать, что прямая DS перпендикулярна и прямой A_1B_1, которая параллельна AB. Значит, SD_1 – высота равнобедренного треугольника A_1B_1S, а потому и медиана, и биссектриса этого треугольника. Этот вывод, в свою очередь влечёт, что C_1D_1 – медиана равнобедренного треугольника $A_1B_1C_1$, а потому и высота, и биссектриса этого треугольника.

И наконец, рассмотрим сечение пирамиды плоскостью DSC (см. Рисунок 7, где H_1 – основание перпендикуляра, опущенного из вершины пирамиды на плоскость π).

Прямые DC и D_1C_1 – это линии пересечения параллельных плоскостей ABC и $A_1B_1C_1$ плоскостью DSC. Значит, $DC \parallel D_1C_1$, что влечёт подобие как треугольников DSC, D_1SC_1, так и треугольников CSH, C_1SH_1, причём всё с тем же коэффициентом подобия k. Значит, $C_1H_1 = k$, $SH_1 = \sqrt{15}k$.

Нетрудно видеть, что длина отрезка HH_1, равная $\sqrt{15}(1-k)$, равна искомой высоте цилиндра. Поэтому решение задачи свелось к нахождению коэффициента подобия k.

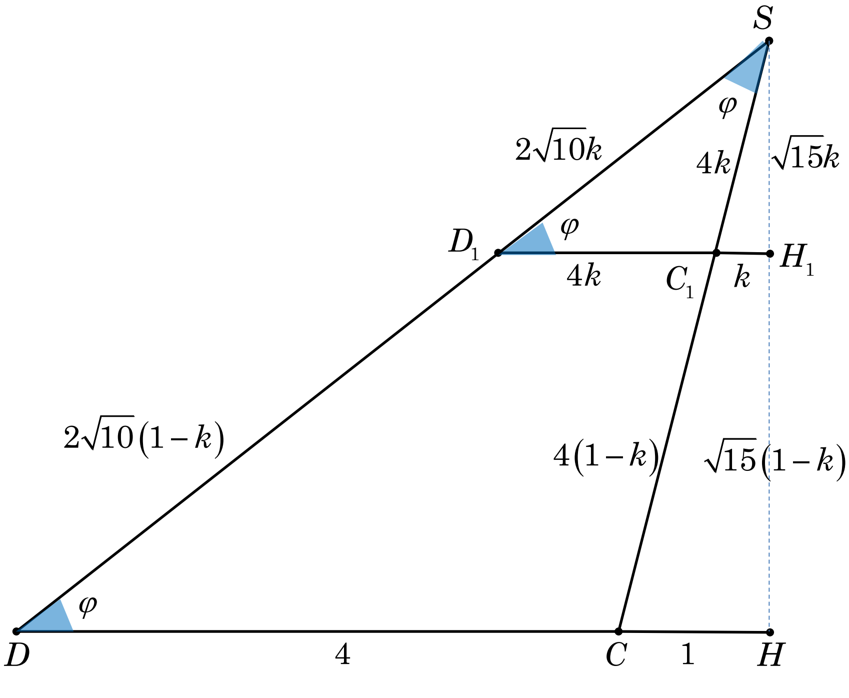

Рисунок 7

Всё, что мы делали до сих пор — это довольно очевидные рассуждения и вычисления, уточняющие вид нашей конфигурации. Следующая часть решения гораздо интереснее.

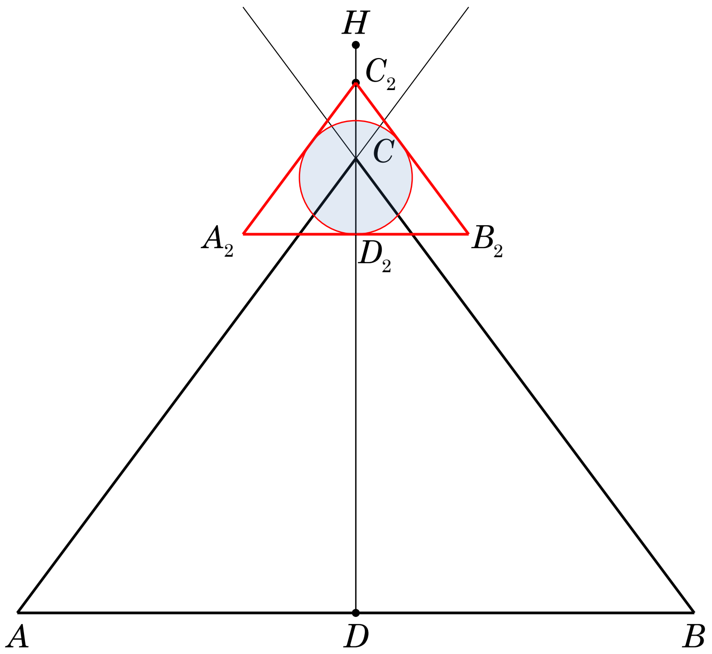

Рисунок 8

Пусть A_2, B_2, C_2, D_2 – ортогональные проекции точек A_1, B_1, C_1, D_1 на плоскость ABC. Из Рисунков 6 и 7 ясно, что точки D_2 и C_2 лежат на отрезке CH, причём $CC_2 = 1-k$, $C_2H = k$. Нетрудно также сообразить, что треугольник $A_2B_2C_2$ равен треугольнику $A_1B_1C_1$, а его стороны параллельны соответствующим сторонам треугольника ABC (см. Рисунок 8, где изображён случай $k = 1/3$).

При этом проектировании образом окружности верхнего основания цилиндра, которая вписана в треугольник $A_1B_1C_1$, с одной стороны должна быть окружность, вписанная в треугольник $A_2B_2C_2$, а с другой – окружность нижнего основания цилиндра. Поэтому окружность нижнего основания цилиндра вписана в треугольник $A_2B_2C_2$.

По условию эта окружность должна касаться прямых AC и BC. Из Рисунка 8 (на котором это условие не выполнено) ясно, что это возможно только в ситуации, показанной на Рисунке 9.

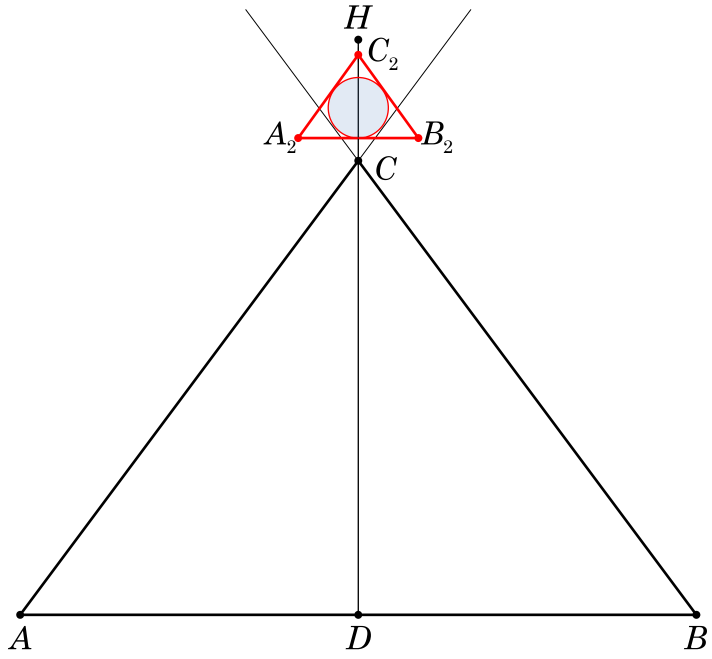

Рисунок 9

Для удобства дальнейших расчётов верхнюю часть Рисунка 9 мы изобразили в увеличенном виде на Рисунке 10. На последнем рисунке K – это точка пересечения прямой AC со стороной B_2C_2, L – точка пересечения прямой BC со стороной A_2C_2, O – центр окружности нижнего основания цилиндра.

Четырёхугольник CLC_2K является параллелограммом (мы ранее отметили, что $AC \parallel A_2C_2$, $BC \parallel B_2C_2$). Поскольку в него вписана окружность этот параллелограмм является ромбом. Проведём радиус OR в точку R касания окружности и отрезка A_2C_2. В прямоугольном треугольнике RC_2O катет OR равен $r_1 = \dfrac{3k}{2}$, гипотенуза OC_2 равна $\dfrac{CC_2}{2} = \dfrac{1-k}{2}$. Поэтому синус угла RC_2O равен $\dfrac{3k}{1-k}$. С другой стороны, этот угол равен α и, как мы установили, его синус равен $\dfrac{3}{5}$. Значит, $\dfrac{3k}{1-k} = \dfrac{3}{5}$, откуда следует, что $k = \dfrac{1}{6}$.

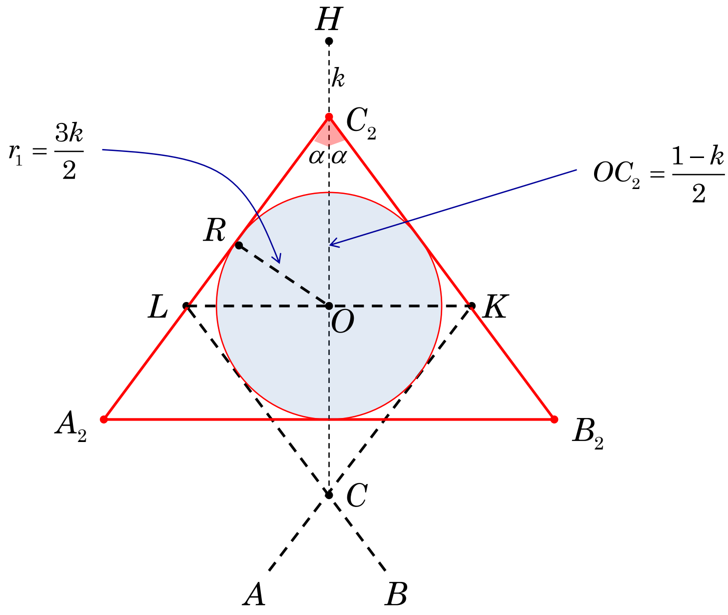

Рисунок 10

Мы уже знаем, что искомая высота цилиндра равна $\sqrt{15}(1-k)$. Подставляя сюда вместо k найденное его числовое значение, мы получим ответ: $\frac{5\sqrt{15}}{6}$.

Ответ: высота цилиндра равна $\frac{5\sqrt{15}}{6}$.

ДВИ-2013, вариант 133

Задача 1. Старший коэффициент квадратного трёхчлена $f(x)$ равен 2. Один из его корней равен $5/2$. Найдите второй корень, если известно, что $f(0)=3$.

Решение. Пусть $f(x)=ax^2+bx+c$ — данный квадратный трёхчлен. Старший коэффициент — это коэффициент при x^2, так что $a=2$.

Далее, $f(0)=a\cdot 0^2+b\cdot 0+c=c$, так что $c=3$.

Теорема Виета утверждает, что произведение корней квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ (при условии, что это уравнение действительно имеет два корня, возможно, совпадающих) равно c/a: $x_1x_2=c/a$. В нашем случае это равенство примет вид: $\frac{5}{2}\cdot x_2=\frac{3}{2}$. Отсюда мы имеем: $x_2=\frac{3}{5}$.

Ответ: $\frac{3}{5}$.

Задача 2. Вычислите $\log_{16}6\cdot\log_6 8$.

Решение. Перейдём в логарифмах к одному основанию, например, 2:

$$\log_{16}6=\frac{\log_2 6}{\log_2 16}=\frac{\log_2(2\cdot 3)}{\log_2(2^4)}=\frac{\log_2 2+\log_2 3}{4}=\frac{1+\log_2 3}{4},$$

$$\log_6 8=\frac{\log_2 8}{\log_2 6}=\frac{\log_2(2^3)}{1+\log_2 3}=\frac{3}{1+\log_2 3}.$$

Поэтому $\log_{16}6\cdot\log_6 8=\frac{1+\log_2 3}{4}\cdot\frac{3}{1+\log_2 3}=\frac{3}{4}$.

Ответ: $\frac{3}{4}$.

Задача 3. Решите неравенство

$$15\left(4+4^{-2x}\right)^{-1/2}-\left(4^{1+2x}+1\right)^{1/2}\geq 20^{1/2}\cdot 4^{x/2}.$$

Решение. Введём новую неизвестную $y=4^x$. Для неё исходное неравенство примет вид (мы используем положительность величины y):

$$\frac{15y}{\sqrt{4y^2+1}}-\sqrt{4y^2+1}\geq\sqrt{20y}.$$

Разделим полученное неравенство почленно на $\sqrt{4y^2+1}$ — эта величина определена и положительна при всех y, так что это преобразование является равносильным. В результате мы получим неравенство:

$$15\cdot\frac{y}{4y^2+1}-1\ge\sqrt{20}\sqrt{\frac{y}{4y^2+1}}\,.$$

Для его решения введём ещё одну новую неизвестную, $z=\sqrt{\frac{y}{y^2+5}}$:

$$15z^2-1\ge\sqrt{20}z\quad\Leftrightarrow\quad 15z^2-2\sqrt{5}z-1\ge 0\,.$$

Для квадратного трёхчлена $15z^2-2\sqrt{5}z-1$ величина $D/4$ равна 20. Поэтому он имеет два нуля: $z_1=\frac{\sqrt{5}-2\sqrt{5}}{15}=-\frac{\sqrt{5}}{15}$, $z_2=\frac{\sqrt{5}+2\sqrt{5}}{15}=\frac{\sqrt{5}}{5}$, так что множество решений последнего неравенства (относительно z) имеет вид: $z\le-\frac{\sqrt{5}}{15}$ или $z\ge\frac{\sqrt{5}}{5}$. Соответственно, для y мы имеем совокупность двух неравенств:

$$\sqrt{\frac{y}{4y^2+1}}\le-\frac{\sqrt{5}}{15}\quad\text{и}\quad\sqrt{\frac{y}{4y^2+1}}\ge\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Множество решений первого, очевидно, пусто, а второе равносильно неравенству

$$\frac{y}{4y^2+1}\ge\frac{1}{5}\quad\Leftrightarrow\quad 4y^2-5y+1\le 0\quad\Leftrightarrow\quad\frac{1}{4}\le y\le 1.$$

Таким образом, исходное неравенство равносильно двойному неравенству $\frac{1}{4}\le 4^x\le 1$, множество решений которого — отрезок $-1\le x\le 0$.

Ответ: $[-1;0]$.

Задача 4. Решите уравнение $\frac{\sin 3x}{\sin x}+\frac{\cos 3x}{\cos x}=\frac{\sin x}{\sin 3x}+\frac{\cos x}{\cos 3x}$.

Решение. Выполним действия над дробями в левой и правой частях уравнения:

$$\frac{\sin 3x\cdot\cos x+\cos 3x\cdot\sin x}{\sin x\cdot\cos x}=\frac{\sin x\cdot\cos 3x+\cos x\cdot\sin 3x}{\sin 3x\cdot\cos 3x}$$

и применим тождества $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$ (в числителях), $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ (в знаменателях):

$$\frac{\sin 4x}{\sin 2x}=\frac{\sin 4x}{\sin 6x}.$$

Теперь перенесём все члены в левую часть и вычтем дроби:

$$\frac{\sin 4x \cdot \left(\sin 6x - \sin 2x\right)}{\sin 2x \cdot \sin 6x} = 0,$$

затем в числителе применим тождество $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$, а после этого — тождество $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$:

$$\frac{2\cdot\sin 4x \cdot \sin 2x \cdot \cos 4x}{\sin 2x \cdot \sin 6x} = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin 2x \cdot \sin 8x}{\sin 2x \cdot \sin 6x} = 0.$$

Сократив дробь на $\sin 2x$, мы получим систему:

$$\begin{cases} \dfrac{\sin 8x}{\sin 6x} = 0 \\ \sin 2x \neq 0, \end{cases}$$

которая, в свою очередь, равносильна системе

$$\begin{cases} \sin 8x = 0 \\ \sin 2x \neq 0, \sin 6x \neq 0. \end{cases}$$

Уравнение $\sin 8x = 0$ является простейшим тригонометрическим уравнением и множество его решений выписывается мгновенно: $x = \frac{\pi n}{8}$, где $n \in \mathbb{Z}$. Чтобы получить множество решений последней системы, из этой серии нужно выбросить те точки, для которых $\sin 2x$ или $\sin 6x$ обращается в 0.

Нетрудно сообразить, что равенство нулю выражения $\sin 2x$ влечёт равенство нулю выражения $\sin 6x$. Действительно, равенство $\sin 2x = 0$ означает, что $x = \pi n/2$ для некоторого целого n, а для таких x выражение $\sin 6x$ равно $\sin(3\pi n) = 0$. С равным успехом можно сослаться на тождество $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$, которое, очевидно, влечёт равенство нулю выражения $\sin 3\alpha$, коль скоро $\sin\alpha = 0$. Поэтому из серии $x = \pi n/8$ достаточно выбросить только те точки, для которых $\sin 6x = 0$.

Для $x = \frac{\pi n}{8}$ величина $\sin 6x$ равна $\sin\frac{3\pi n}{4}$. Она равна нулю тогда и только тогда, когда число $\frac{3n}{4}$ целое, т.е. n кратно 4. Таким образом, в серии $x = \frac{\pi n}{8}, n \in \mathbb{Z}$, нужно оставить только те числа, для которых n не делится на 4.

Ответ: $x = \frac{\pi n}{8}, n \in \mathbb{Z}$, но n не делится на 4.

Замечание. Систему

$$\begin{cases} \sin 8x = 0 \\ \sin 2x \neq 0, \sin 6x \neq 0 \end{cases}$$

можно было решать приводя $\sin 8x$ и $\sin 6x$ к аргументу $2x$ с помощью стандартных формул для синуса и косинуса двойного и тройного аргумента:

$$\sin 8x = 2\sin 4x \cdot \cos 4x = 4\sin 2x \cdot \cos 2x \cdot \left(2\cos^2 2x - 1\right),$$

$$\sin 6x = \sin 2x\left(3 - 4\sin^2 2x\right) = \sin 2x\left(4\cos^2 2x - 1\right).$$

После сокращения на $\sin 2x$ мы получим систему:

$$\begin{cases} \cos 2x \cdot \left(2\cos^2 2x - 1\right) = 0 \\ \sin 2x \neq 0,\, 4\cos^2 2x - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0,\, \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin^2 2x \neq 0,\, \cos 2x \neq \pm\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Заменяя здесь $\sin^2 2x$ на $1 - \cos^2 2x$, мы имеем:

$$\begin{cases} \cos 2x = 0,\ \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos 2x \neq \pm 1,\, \pm\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \cos 2x = 0,\ \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2},$$

что позволяет выписать ответ в виде объединения трёх формул:

$$\left[\begin{array}{l} 2x = \pm\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n \\ 2x = \pm\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n \\ 2x = \pm\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\dfrac{\pi}{4} + \pi n \\ x = \pm\dfrac{\pi}{8} + \pi n \\ x = \pm\dfrac{3\pi}{8} + \pi n \end{array}\right.$$

Хотя по внешней форме этот ответ отличается от полученного первым методом, оба ответа задают одно и то же множество чисел (это становится особенно ясным, если изобразить точки $2x$ на тригонометрической окружности).

Задача 5. От биостанции до границы заповедника вверх по реке ровно 14 км. В 7:00 браконьеры вошли на катере в заповедник и направились в сторону биостанции. Через некоторое время им навстречу с биостанции вышел катер рыбинспекции. Браконьеры тут же развернулись и направились обратно к границе заповедника. В 7:38, когда браконьеры оказались ровно посередине между рыбинспекторами и границей, рыбинспекторы осознали, что они идут с браконьерами на одинаковой скорости, развернулись и отправились обратно на биостанцию. До биостанции они добрались ровно в тот момент, когда браконьеры выехали за пределы заповедника в 7:50. Найдите наименьшее расстояние, на котором находились браконьеры и рыбинспекторы, если известно, что оба катера движутся равномерно и с одинаковой собственной скоростью.

Решение. Будем измерять расстояния километрами, время – минутами, скорости – км/мин. Введём на реке координаты, взяв границу заповедника в качестве начала координат, а направление течения реки в качестве положительного. Таким образом, если точка на реке расположена внутри заповедника, то её координата – это

расстояние от неё до границы заповедника. В частности, биостанция имеет координату 14. В качестве начального момента времени возьмём 7:00.
Пусть

- v_1 – скорость катера при движении вниз по реке (т.е. по течению),
- v_2 – скорость катера при движении вверх по реке (т.е. против течения, так что $v_1 > v_2$),
- T — момент выхода катера рыбинспекции навстречу браконьерам,
- $s = v_1 T$ — расстояние, на котором в момент T браконьеры находились от границы заповедника.

Для каждого из двух катеров (браконьеров и рыбинспекции) найдём закон его движения, т.е. функцию, которая описывает зависимость координаты катера x от времени t.

1. ***Катер браконьеров.*** От момента $t_0 = 0$ пересечения границы заповедника до момента T разворота изменение координаты катера браконьеров с течением времени даётся формулой $x_Б(t) = v_1 t$. В двумерной системе координат (t, x) этот закон движения представляется отрезком OA прямой линии l_1, которая проходит через начало координат и угловой коэффициент которой равен v_1 (см. Рисунок 1). Точка O с координатами $(0,0)$ соответствует входу катера браконьеров в заповедник в 7:00, точка A с координатами (T, s) соответствует его развороту.

После момента T и до момента $t = 50$, когда браконьеры выехали за пределы заповедника, координата катера браконьеров меняется по закону $x_Б(t) = s - v_2(t - T)$. График этого закона — отрезок AB прямой линии l_2, которая проходит через точку A и угловой коэффициент которой равен $-v_2$ (так что эта линия идёт не так круто, как l_1). Точка B соответствует достижению границы заповедника катером браконьеров в момент 50 и потому может быть определена как точка пересечения прямой l_2 с осью абсцисс. Факт достижения границы этим катером в 7:50 означает, что абсцисса точки B равна 50 или, что то же самое, что $OB = 50$.

На Рисунке 1 ломаная OAB (закон движения катера браконьеров от 7:00 до 7:50) нарисована красной линией. Важно подчеркнуть, что эту ломаную можно рисовать сразу, без точных формул для уравнений, показывающих изменение координаты с течением времени. Достаточно сослаться на то, что для равномерного движения по любой траектории, на которой введена одномерная система координат:

1. графиком закона движения является прямая с угловым коэффициентом, по абсолютной величине равным скорости;
2. угловой коэффициент положителен, если направление движения совпадает с положительным направлением, и отрицателен в противном случае.

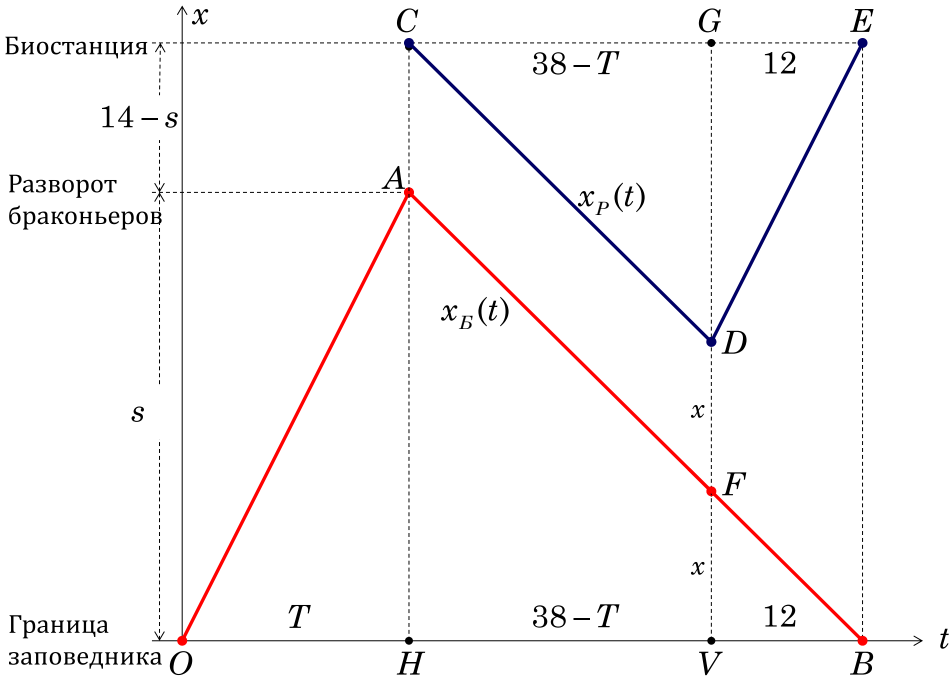

Рисунок 1

2. ***Катер рыбинспекции.*** Последнее замечание позволяет без всякого труда получить график зависимости координаты катера рыбинспекции от времени, $x_P(t)$. На Рисунке 1 это ломаная CDE синего цвета, причём прямая CD параллельна прямой AB (т.к. скорости катеров при движении против течения равны), прямая DE параллельна прямой OA (т.к. скорости катеров при движении по течению равны). Точка D соответствует развороту катера рыбинспекции обратно на биостанцию в 7:38, а точка E — прибытию катера рыбинспеции на биостанцию в 7:50. Кроме того, мы отметили ещё три точки, V, G и F — это точки пересечения вертикальной прямой, проходящей через D, с осью абсцисс, горизонтальной прямой, проведённой на высоте s, и отрезком AB соответственно.

Условия задачи относительно времён (разворот катера рыбинспекции в 7:38, одновременное прибытие катеров в исходные пункты в 7:50) означают, что $OV = 38$, $OB = 50$. Отсюда с учётом введённого обозначения для момента разворота катера браконьеров мы получим: $OH = T$, $HV = 38 - T$, $VB = 12$. Кроме того, условие, что в 7:38 браконьеры оказались ровно посередине между рыбинспекторами и границей, означает равенство длин отрезков FV и DF (на Рисунке 1 общее значение этих длин обозначено x).

Теперь мы можем забыть про исходную задачу и заняться расчётом конфигурации, изображённой на Рисунке 1; она содержит три неизвестных величины: x, T, s.

Ключевая особенность этой конфигурации заключается в параллельности как прямых OA и DE, так и прямых AB и CD. Отсюда следует равенство углов AOB и DEC, а также и углов ABO и DCE. Это, в свою очередь, влечёт подобие треугольников ABO и DCE. Поэтому сходственные линейные элементы этих треугольников пропорциональны. В частности, равны между собой отношения длин отрезков, на которые высоты AH и DG делят основания OB и EC:

$$\frac{OH}{HB}=\frac{EG}{GC}\Leftrightarrow\frac{T}{50-T}=\frac{12}{38-T}\Leftrightarrow T^2-50T+600=0\Leftrightarrow T=20 \text{ или } 30.$$

Поскольку $v_1>v_2$ (по течению катер плывёт быстрее, чем против течения), угол AOB больше угла OBA. Поэтому $OH<HB\Leftrightarrow T<50-T\Leftrightarrow T<25$, так что из двух возможных значений величины T, 20 и 30, взять нужно 20.

Далее, из подобия треугольников AHB и FVB мы имеем (используя найденное значение T):

$$\frac{AH}{HB}=\frac{FV}{VB}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{s}{30}=\frac{x}{12}\quad\Leftrightarrow\quad s=\frac{5}{2}x.$$

И наконец, поскольку не только $AF\parallel CD$, но и $CA\parallel DF$ (это вертикальные прямые, перпендикулярные оси абсцисс), четырёхугольник $ACDF$ — параллелограмм. Значит, $DF=AC$. Кроме того, из Рисунка 1 ясно, что $AC=14-s$. Таким образом, $x=14-s$.

Из равенств $s=\frac{5}{2}x$ и $x=14-s$ мы находим, что $s=10,\ x=4$.

В любой момент времени t расстояние между браконьерами и рыбинспекторами равно расстоянию между точками графиков функций $x=x_Б(t)$ и $x=x_P(t)$, которые расположены на одной вертикальной прямой, проходящей через точку t на оси абсцисс. Из Рисунка 1 ясно, что наименьшее значение этого расстояния равно x, причём достигается оно в любой момент времени от 7:20 до 7:38 (включительно).

Ответ: 4 км.

Задача 6. Трапеция $KLMN$ вписана в окружность радиуса R и описана около окружности радиуса r, причём $R=\frac{3}{2}r$. Найдите среднюю линию трапеции, если диагональ KM равна 3.

Решение. Рассмотрим вначале только трапецию $KLMN$ и окружность, в которую она вписана (можно также сказать, что окружность описана вокруг трапеции $KLMN$). По определению, это означает, что все вершины трапеции лежат на окружности (см. Рисунок 2, на котором основания изображены горизонтально, причём бо́льшее основание расположено ниже меньшего).

Основания трапеции KN и LM являются хордами этой окружности. Поскольку они параллельны, равны и дуги KL и MN, заключённые между ними. Равенство дуг KL и MN влечёт равенство стягивающих их хорд KL и MN. Таким образом, трапеция $KLMN$ — равнобочная; пусть c — общая длина боковых сторон KL и MN. Кроме того, для упрощения дальнейших записей обозначим длины оснований KN и LM буквами a и b соответственно.

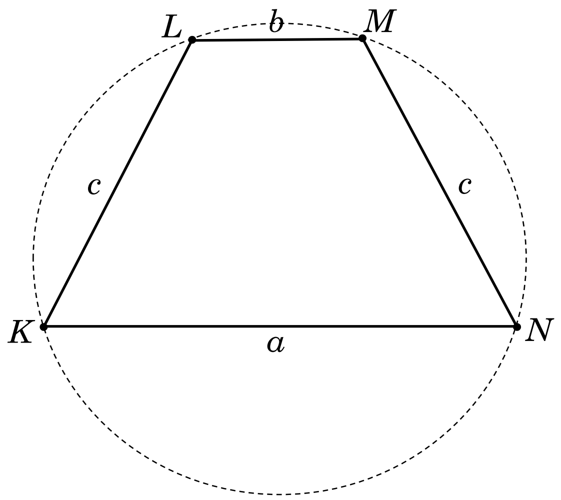

Рисунок 2

Теперь проанализируем условие, что трапеция $KLMN$ описана около окружности радиуса r (другими словами, в трапецию $KLMN$ можно вписать окружность радиуса r). По определению, это означает, что все стороны трапеции касаются окружности (см. Рисунок 3).

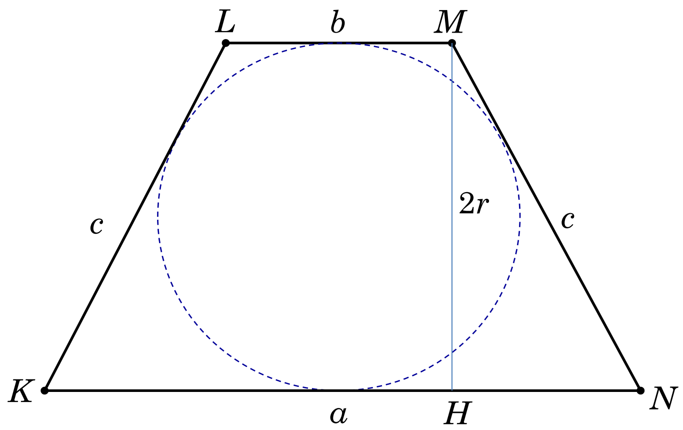

Рисунок 3

Известная теорема утверждает, что в этой ситуации суммы длин противоположных сторон равны. Поэтому $a+b=2c$ и, значит, средняя линия трапеции, которая равна $(a+b)/2$, равна c, Таким образом, задача заключается в вычислении c.

Кроме того, из Рисунка 3 ясно, что высота MH трапеции равна диаметру $d=2r$ окружности, которая вписана в трапецию.

Тот факт, что трапеция $KLMN$ равнобочная, влечёт ещё одно полезное следствие (см. Рисунок 4): проекции KG и HN боковых сторон KL и MN на основание KN равны между собой и потому равны $(a-b)/2$. Следовательно, проекция KH диагонали KM равна $(a-b)/2+b=(a+b)/2=c$.

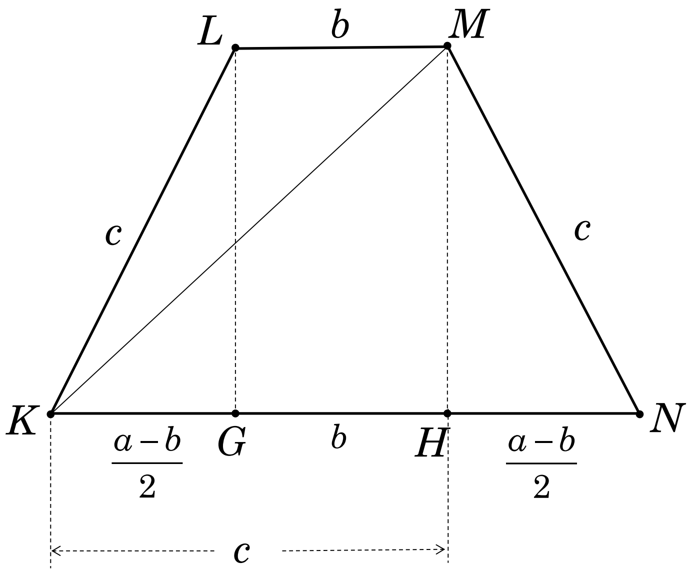

Рисунок 4

Если все отмеченные выше свойства нашей трапеции собрать воедино, мы получим Рисунок 5 (на этом рисунке мы обозначили угол KNM между боковой стороной трапеции и её нижним основанием буквой φ).

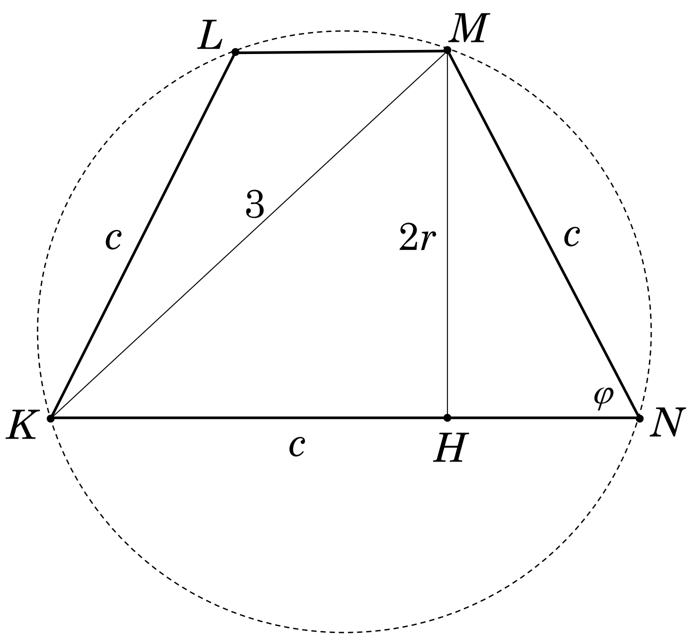

Рисунок 5

Окружность, описанная вокруг трапеции $KLMN$, описана, в частности, и вокруг треугольника KMN. Применяя теорему синусов, мы имеем: $3=2R\sin\varphi$. Поскольку $R=\frac{3}{2}r$, это равенство примет вид: $r\sin\varphi=1$.

Из прямоугольного треугольника KMH мы можем выразить r через искомую величину c: $r=MH/2=\sqrt{9-c^2}/2$. Используя это равенство, из прямоугольного треугольника MHN мы и $\sin\varphi$ выразим через c: $\sin\varphi=\frac{2r}{c}=\frac{\sqrt{9-c^2}}{c}$. Это позволит превратить равенство $1=r\sin\varphi$ в уравнение относительно искомой величины c:

$$\frac{\sqrt{9-c^2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{9-c^2}}{c}=1\Leftrightarrow\frac{9-c^2}{2c}=1\Leftrightarrow c^2+2c-9=0.$$

Полученное квадратное уравнение имеет два корня: $c_1=-1+\sqrt{10}$, $c_2=-1-\sqrt{10}$. Нас устраивает только положительный корень, $c_1=-1+\sqrt{10}$.

Ответ: $\sqrt{10}-1$.

Задача 7. В основании прямой призмы $KLMK'L'M'$ лежит прямоугольный треугольник KLM, такой что $KM=LM=1$. На ребре $K'L'$ верхнего основания (параллельном KL), отмечена точка N так, что $K'N:NL'=1:3$. Найдите радиус сферы, вписанной в тетраэдр $KLM'N$, если высота призмы равна 1.

Решение. Конфигурация, о которой идёт речь в задаче, изображена на Рисунке 6, на котором мы учли очевидные равенства $KL=\sqrt{2}$, $K'N=\frac{\sqrt{2}}{4}$, $L'N=\frac{3\sqrt{2}}{4}$. Первое из них является следствием теоремы Пифагора для равнобедренного прямоугольного треугольника KLM с катетами $KM=LM=1$, а два последних вытекают из условия $K'N:NL'=1:3$ и равенства рёбер $KL=\sqrt{2}$ и $K'L'$.

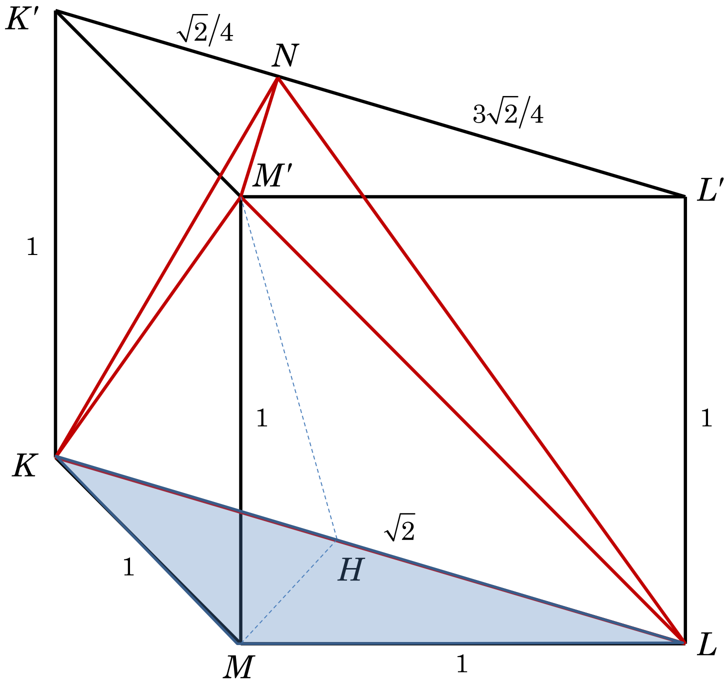

Рисунок 6

Радиус r сферы, вписанной в тетраэдр $KLM'N$, удобно находить из соотношения $V_{KLM'N} = \frac{1}{3} S_{KLM'N} \cdot r$, где $V_{KLM'N}$ — объём этого тетраэдра, $S_{KLM'N}$ — полная площадь его поверхности.

Для вычисления объёма тетраэдра $KLM'N$ по обычной формуле $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} h$ удобно в качестве основания взять грань KNL. Так как призма прямая, высота этого тетраэдра, опущенная из точки M' на плоскость грани KNL, лежит в плоскости $K'L'M'$ верхнего основания исходной призмы и потому совпадает с высотой равнобедренного прямоугольного треугольника $K'L'M'$, опущенной из вершины M' прямого угла на гипотенузу $K'L'$ (на Рисунке 6 мы показали соответствующую этой высоте высоту MH треугольника KLM). Поэтому $h = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Площадь треугольника KNL (который мы рассматриваем в качестве основания тетраэдра $KLM'N$) легко найти по обычной формуле (как половину произведения основания на высоту), если в качестве основания взять сторону $KL = \sqrt{2}$; тогда его высота NA, очевидно, равна боковой стороне прямоугольника $KK'L'L$, т.е. 1 (см. Рисунок 7). Поэтому $S_{KNL} = \frac{\sqrt{2} \cdot 1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Следовательно, объём тетраэдра $KLM'N$ равен $\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{6}$.

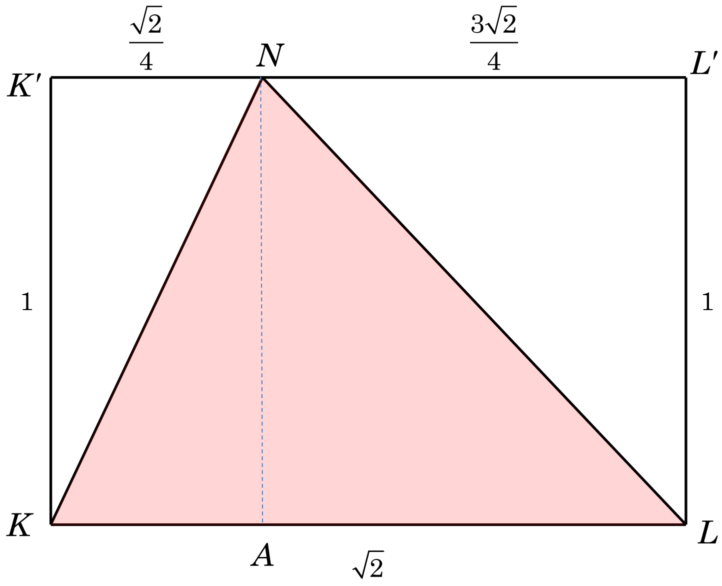

Рисунок 7

Вычисление площади поверхности тетраэдра потребует больше усилий. Эту площадь мы будем находить как сумму площадей всех его граней:

$$S_{KLM'N} = S_{KNL} + S_{KNM'} + S_{LM'N} + S_{KM'L}.$$

Площадь грани KNL мы уже нашли: $S_{KNL} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Треугольник $KM'L$, очевидно, является равносторонним (все его стороны – это диагонали квадратов со стороной 1 и потому они равны $d = \sqrt{2}$). Поэтому $S_{KM'L} = \dfrac{d^2 \sin 60^\circ}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Чтобы найти площади граней KNM' и $LM'N$, вычислим длины их сторон.

В треугольнике KNM', как мы уже отметили, длина стороны KM' равна $\sqrt{2}$. Длину стороны KN легко с найти из прямоугольного треугольника $KK'N$ (см. Рисунок 7) с помощью теоремы Пифагора:

$$KN = \sqrt{(KK')^2 + (K'N)^2} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

Аналогично, в треугольнике $LM'N$ длина стороны LM' равна $\sqrt{2}$, а длина стороны LN находится по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника LNL':

$$LN = \sqrt{(LL')^2 + (L'N)^2} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{34}}{4}.$$

Длину ребра $M'N$, которое является общей стороной треугольников KNM' и $LM'N$, легко найти с помощью теоремы косинусов для треугольника $M'K'N$, в котором $M'K' = 1$, $K'N = \sqrt{2}/4$, $\angle M'K'N = 45^\circ$:

$$M'N = \sqrt{\left(M'K'\right)^2 + \left(K'N\right)^2 - 2 \cdot M'K' \cdot K'N \cdot \cos\angle M'K'N}$$

$$= \sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 - 2 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{4}.$$

Теперь по формуле Герона мы можем вычислить площади треугольников KNM' и $LM'N$: $S_{KNM'} = \dfrac{\sqrt{11}}{8}$, $S_{LM'N} = \dfrac{\sqrt{19}}{8}$.

Таким образом, площадь поверхности тетраэдра $KLM'N$ равна

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{11}}{8} + \frac{\sqrt{19}}{8} = \frac{4\sqrt{2} + 4\sqrt{3} + \sqrt{11} + \sqrt{19}}{8}.$$

Следовательно,

$$r = \frac{3V_{KLM'N}}{S_{KLM'N}} = \frac{3 \cdot \dfrac{1}{6}}{\dfrac{4\sqrt{2} + 4\sqrt{3} + \sqrt{11} + \sqrt{19}}{8}} = \frac{4}{4\sqrt{2} + 4\sqrt{3} + \sqrt{11} + \sqrt{19}}.$$

Ответ: $\dfrac{4}{4\sqrt{2} + 4\sqrt{3} + \sqrt{11} + \sqrt{19}}$.

Задача 8. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\sin\left(x + \frac{a}{x}\right) = x + 1$$

имеет бесконечно много решений.

Решение. При $a = 0$ анализируемое уравнение примет вид: $\sin x = x + 1$. Как ясно из Рисунка 8, графики функций $y = \sin x$ и $y = x + 1$ пересекаются и притом только в одной точке $x_0 \in (-\pi, 0)$. Иначе говоря, при $a = 0$ анализируемое уравнение имеет одно решение, так что это значение параметра не удовлетворяет условию задачи.

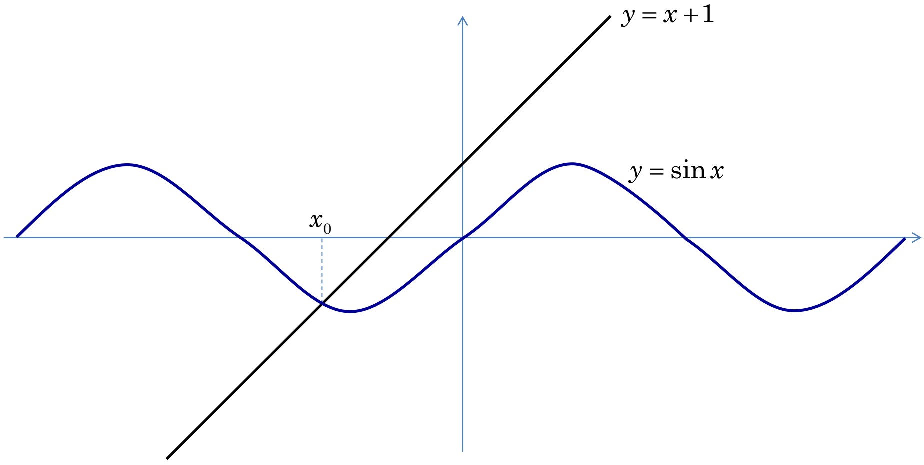

Рисунок 8

Пусть теперь $a \neq 0$. Рассмотрим функцию $z(x) = x + \dfrac{a}{x}$. Она определена при всех $x \neq 0$ и при этих значениях аргумента её производная равна $z'(x) = 1 - \dfrac{a}{x^2}$. Если $a < 0$, то $z'(x) > 0$ при всех $x \neq 0$. Значит, $z(x)$ монотонно возрастает как на интервале $(-\infty, 0)$ (от $z(-\infty) = -\infty$ до $z(0-) = +\infty$), так и на интервале $(0, +\infty)$ (от $z(0+) = -\infty$ до $z(+\infty) = +\infty$), пересекая ось абсцисс в двух точках: $x_0 = -\sqrt{-a}$, $x_0' = +\sqrt{-a}$ (см. Рисунок 9).

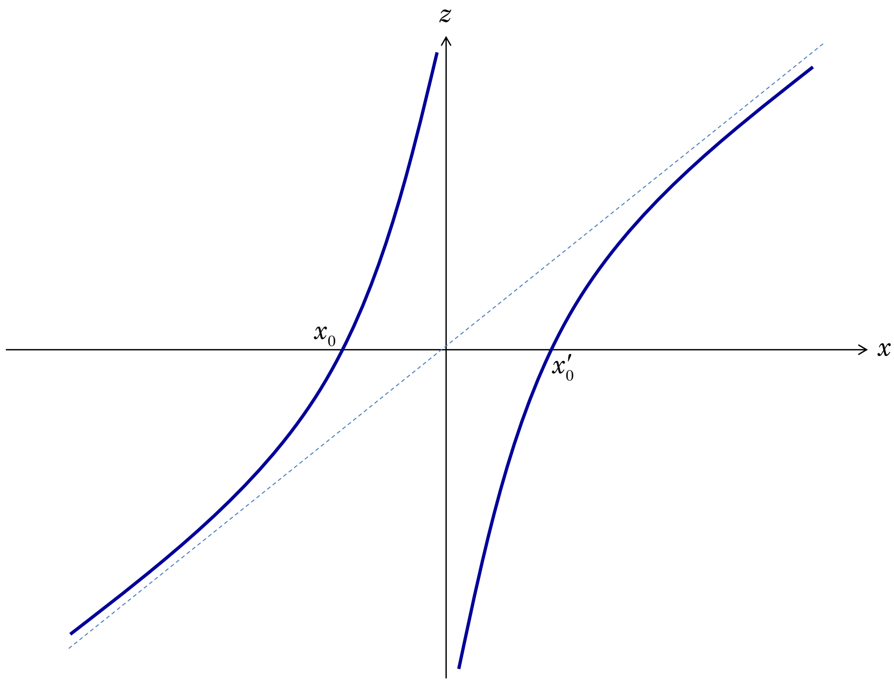

Рисунок 9

Отметим, что этот вывод о поведении $z(x)$ можно получить и без использования производной. Дело в том, что при $a < 0$ функция $z(x)$ является суммой функций $z_1(x) = x$, которая возрастает на всей оси, и $z_2(x) = \dfrac{a}{x}$, которая при $a < 0$ возрастает на интервалах $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$.

На Рисунке 9 отметим на оси ординат точки $0, \dfrac{\pi}{2}, \pi, \dfrac{3\pi}{2}, 2\pi, \dfrac{5\pi}{2}, 3\pi, \dfrac{7\pi}{2}, 4\pi, \ldots$ (т.е. точки z_n вида $\dfrac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}_+$), в которых функция $\sin z$ принимает значения $0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \ldots$. Из Рисунка 9 ясно, что для каждого $n \in \mathbb{Z}_+$ существует однозначно определённая точка $x_n < 0$, такая что $z(x_n) = z_n$, причём последовательность $\{x_n\}$, монотонно возрастая, стремится к $0-$ (т.е. неограниченно приближается к 0, оставаясь, тем не менее, всё время меньше 0). Ясно, что в точках x_n анализируемая функция последовательно принимает значения $0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \ldots$

Между точками $z_n = \dfrac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, функция $\sin z$ монотонна. Поэтому между точками x_n монотонна и функция $y = \sin z(x) \equiv \sin\left(x + \dfrac{a}{x}\right)$. Поэтому по мере приближения x к 0 слева эта функция совершает бесконечное число колебаний от $+1$ до -1 (см. Рисунок 10). Поскольку функция $y = \sin z(x)$ нечётна, она ведёт себя так же и при приближении x к 0 справа.

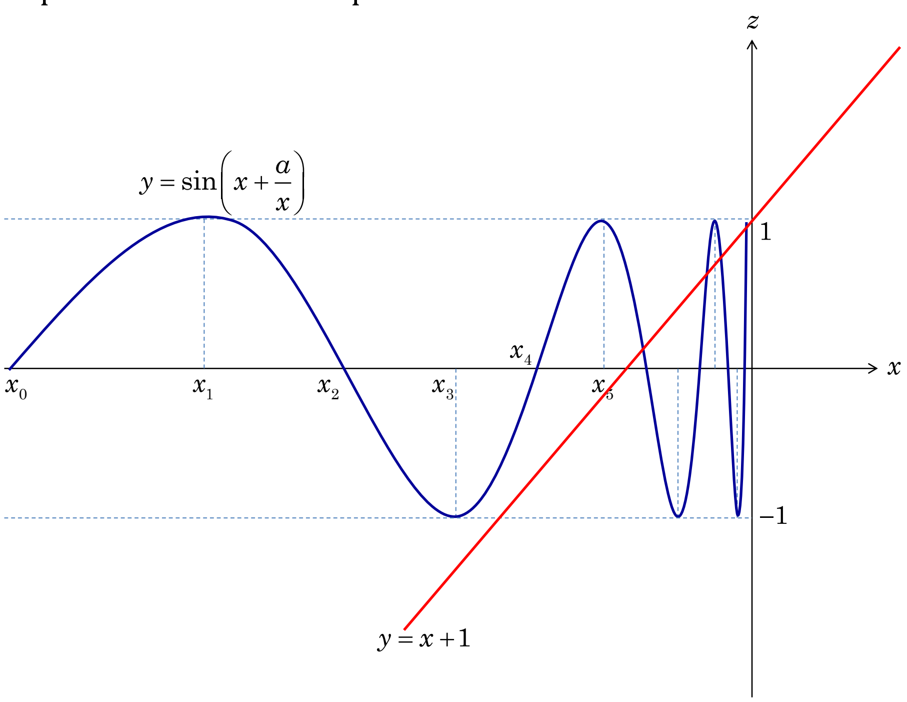

Рисунок 10

Теперь из Рисунка 10 ясно, что анализируемое уравнение имеет бесконечно много корней.

Рассмотрим теперь случай, когда параметр a положителен. Если $a > 0$, то

- $z'(x) > 0$ при $x < -\sqrt{a}$ и при $x > \sqrt{a}$;
- $z'(x) < 0$ при $-\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$.

В критических точках $\pm\sqrt{a}$ функция $z(x)$ принимает значения $\pm 2\sqrt{a}$. Значит, при $a < 0$ функция $z(x)$

- монотонно возрастает на промежутках $\left(-\infty, -\sqrt{a}\right]$ (от $z(-\infty) = -\infty$ до $z\left(-\sqrt{a}\right) = -2\sqrt{a}$) и $\left[\sqrt{a}, +\infty\right)$ (от $z\left(\sqrt{a}\right) = 2\sqrt{a}$ до $z(+\infty) = +\infty$);
- монотонно убывает на промежутках $\left[-\sqrt{a}, 0\right)$ (от $z\left(-\sqrt{a}\right) = -2\sqrt{a}$ до $z(0-) = -\infty$) и $\left(0, \sqrt{a}\right]$ (от $z(0+) = +\infty$ до $z\left(\sqrt{a}\right) = 2\sqrt{a}$) — см. Рисунок 10.

Отметим на Рисунке 11 на оси ординат точки $z_n = -\dfrac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{N}$, в которых функция $\sin z$ принимает значения $-1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \ldots$. Из Рисунка 11 ясно, что каждого достаточно большого $n \in \mathbb{Z}_+$ существует два корня уравнения $z(x) = z_n$, один из которых меньше $-\sqrt{a}$, а второй лежит на интервале $\left(-\sqrt{a}, 0\right)$. Пусть x_n второй корень. Тогда последовательность $\{x_n\}$, монотонно возрастая, стремится к $0-$, причём $z(x_n) = z_n$. Ясно, что в точках x_n анализируемая функция последовательно принимает значения $\ldots, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \ldots$ (первое значение в этом списке может быть -1, 0 или 1 – определённо сказать нельзя, но это и неважно).

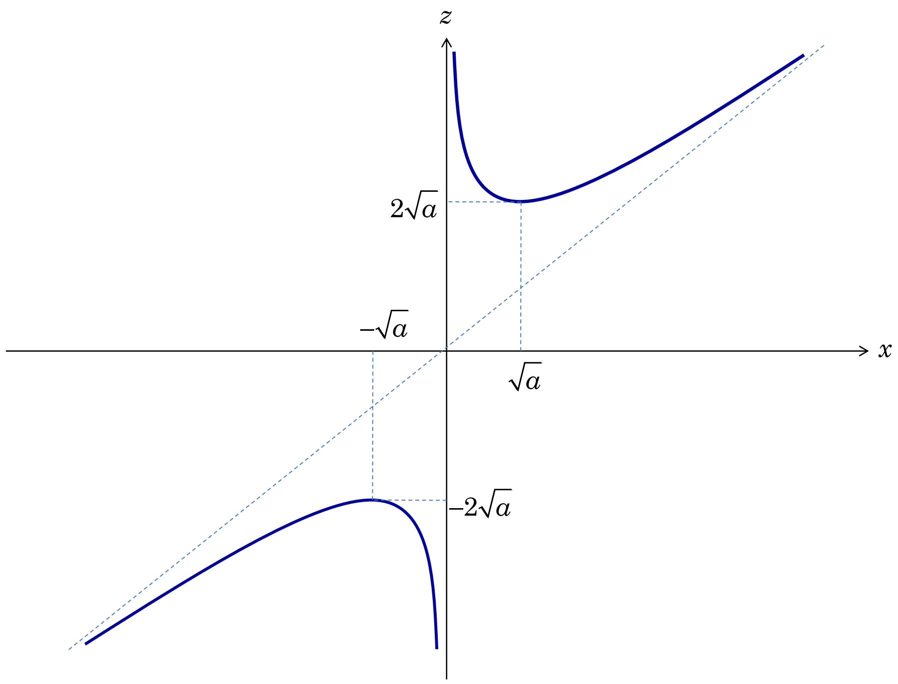

Рисунок 11

Между точками $z_n = -\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{N}$, функция $\sin z$ монотонна. Поэтому между точками x_n монотонна и функция $y = \sin z(x) \equiv \sin\left(x + \frac{a}{x}\right)$. Поэтому по мере приближения x к 0 слева эта функция совершает бесконечное число колебаний от $+1$ до -1 (как на Рисунке 10). Поскольку функция $y = \sin z(x)$ нечётна, она ведёт себя так же и при приближении x к 0 справа.

Теперь из Рисунка 10 ясно, что анализируемое уравнение имеет бесконечно много корней и при $a > 0$.

Ответ: $a \neq 0$.

ДВИ-2014, вариант 141

Задача 1. Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением $\sqrt{7-4\sqrt{3}}\cdot\left(8+4\sqrt{3}\right)$.

Решение. Мы начнём решение с того, что обсудим смысл фразы «явный вид натурального числа». Проблема в том, что в математике такого понятия вообще нет. Для натуральных чисел есть два стандартных, общепринятых, способа записи:

1. Запись числа в десятичной системе счисления (такую запись называют *десятичной*). Следует отметить, что в информатике записывают натуральные числа не в десятичной, а в двоичной системе; используют также восьмеричную и шестнадцатеричную системы.
2. Запись числа в виде произведения простых множителей (такую запись называют *канонической*).

В математическом анализе, в разделе «Способы задания функции», выделяют следующие способы задания (фактически, записи) функциональной зависимости переменной y от переменной x:

1. *Аналитический* — функция задаётся формулой $f(x)$, которая содержит числа, независимую переменную x, другие функции от x и «обычные» математические действия.
2. *Неявный* — функция задаётся при помощи неразрешённого относительно y уравнения вида $F(x,y)=0$ (в частности, именно так определяются обратные функции). Если это уравнение преобразовать к виду $y=f(x)$, то говорят о *явном* задании функции. Таким образом, фактически под явным понимается аналитическое задание.

По аналогии с общепринятой терминологией математического анализа можно говорить ещё о двух способах задания (фактически, записи) числа:

1. *Аналитическом*, когда число задано формулой, содержащей другие числа, функции, аргументами которых являются конкретные числа, и «обычные» математические действия. Эту формулу в школьном курсе называют *числовым выражением*, а результат выполнения всех действий, записанный в «стандартном» виде — *значением* числового выражения.
2. *Неявном*, когда число задаётся как корень какого-то уравнения.

Таким образом, понять определённо, какой смысл вкладывают авторы задачи в её условие, невозможно. К сожалению, подобные неясные формулировки — не редкость на экзаменах. Следует, однако, отметить, что аналогичные по виду задачи давно предлагаются на вступительных экзаменах в МГУ и обычно они формулируются яснее (хотя и не идеально), например, так: «докажите, что число …

целое и найдите это число». Поэтому подготовленный школьник, знакомый с такими задачами по пособиям для абитуриентов, без труда сможет понять, что от него требуется: нужно доказать, что значение выражения $\sqrt{7-4\sqrt{3}}\cdot\left(8+4\sqrt{3}\right)$ – натуральное число и записать это число обычным образом в десятичной системе счисления.

После этих замечаний приступим к решению нашей задачи. Иррациональный двучлен $7-4\sqrt{3}$ преобразуем следующим образом:

$$7-4\sqrt{3}=4+3-2\cdot2\cdot\sqrt{3}=2^2+\left(\sqrt{3}\right)^2-2\cdot2\cdot\sqrt{3}=\left(2-\sqrt{3}\right)^2.$$

Поэтому $\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\left|2-\sqrt{3}\right|=2-\sqrt{3}$. В иррациональном двучлене $8+4\sqrt{3}$ вынесем за скобку общий множитель 4: $8+4\sqrt{3}=4\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)$. Значит, данное числовое выражение равно

$$4\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)=4\cdot\left(2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2\right)=4\cdot(4-3)=4.$$

Ответ: 4.

Замечание. Задачу можно решить и более простыми рассуждениями (правда, за идейную простоту придётся заплатить определённую цену – выкладки станут более громоздкими).

Обозначим искомое натуральное число n и возведём равенство $n=\sqrt{7-4\sqrt{3}}\cdot\left(8+4\sqrt{3}\right)$ в квадрат:

$$n^2=\left(7-4\sqrt{3}\right)\cdot\left(8+4\sqrt{3}\right)^2=\left(7-4\sqrt{3}\right)\cdot\left(8^2+2\cdot8\cdot4\sqrt{3}+\left(4\sqrt{3}\right)^2\right)=\left(7-4\sqrt{3}\right)\cdot\left(112+64\sqrt{3}\right)$$

$$=7\cdot112+7\cdot64\sqrt{3}-112\cdot4\sqrt{3}-4\sqrt{3}\cdot64\sqrt{3}=784+448\sqrt{3}-448\sqrt{3}-768=16.$$

Поскольку число n, очевидно, положительно, отсюда следует, что $n=4$.

Задача 2. Найдите максимальное значение функции $\log_{1/2}\left(x^2-6x+17\right)$.

Решение. Функцию $y=\log_{1/2}\left(x^2-6x+17\right)$ можно рассматривать как суперпозицию функций $y=\log_{1/2}z$ и $z=x^2-6x+17$. Внутренняя функция, $z=x^2-6x+17$, определена на всей числовой прямой, а её графиком является парабола, ветви которой направлены вверх. Вершина параболы имеет координаты: $x_b=-\dfrac{-6}{2}=3$, $y_b=z(3)=3^2-6\cdot3+17=8$. Поэтому на промежутке $(-\infty,3]$ переменная z убывает от $+\infty$ до 8, а на промежутке $[3,+\infty)$ возрастает от 8 до $+\infty$. Таким образом, при изменении x от $-\infty$ до $+\infty$ значения переменной z заполняют промежуток $8\le z<+\infty$.

Внешняя функция, $y = \log_{1/2} z$, определена при $z > 0$ и убывает на этом промежутке от $+\infty$ до $-\infty$. В частности, при изменении z на промежутке $8 \le z < +\infty$ значения переменной y заполняют промежуток $\left(-\infty, \log_{1/2} 8\right] = (-\infty, -3]$.

Следовательно, наибольшее значение анализируемой функции существует и равно -3.

Ответ: $f_{\max} = -3$.

Замечание. Проведённые рассуждения позволяют точнее описать поведение анализируемой функции:

- при росте x от $-\infty$ до 3 эта функция возрастает от $-\infty$ до $f(3) = -3$;
- при дальнейшем росте x, от 3 до $+\infty$, эта функция убывает от $f(3) = -3$ до $-\infty$.

Задача 3. Найдите все положительные x, удовлетворяющие неравенству $x^{3x+7} > x^{12}$.

Решение. **1 способ.** Самым естественным является взгляд на наше неравенство как на стандартное показательное неравенство вида $a^{b(x)} > a^{c(x)}$, что приводит к расщеплению исходного неравенства на три системы:

$$\begin{cases} x > 1 \\ 3x + 7 > 12 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 < x < 1 \\ 3x + 7 < 12 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 \\ 1 > 1 \end{cases}$$

Множество решений первой системы — промежуток $\left(\frac{5}{3}, +\infty\right)$, второй — промежуток $(0;1)$, третьей — пусто. Объединяя эти множества, мы получим ответ: $(0;1) \cup \left(\frac{5}{3}, +\infty\right)$.

2 способ базируется на следующем простом утверждении: если $a > 0$, то выражение $a^b - a^c$ положительно, равно 0 или отрицательно тогда и только тогда, когда выражение $(b-c)(a-1)$ положительно, равно 0 или отрицательно соответственно. Поэтому неравенство $a^b > a^c$ равносильно системе

$$\begin{cases} (b-c)(a-1) > 0 \\ a > 0 \end{cases}$$

а, значит, исходное неравенство — системе

$$\begin{cases} (3x + 7 - 12)(x - 1) > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x - \frac{5}{3}\right)(x - 1) > 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

Множество решений первого неравенства является объединением двух бесконечных промежутков: $(-\infty, 1)$ и $\left(\frac{5}{3}, +\infty\right)$. Пересекая это множество и множество $(0, +\infty)$, мы получаем ответ.

Ответ: $(0;1) \cup \left(\frac{5}{3}, +\infty\right)$.

Задача 4. Решите уравнение $\cos^2 x - \cos x \cdot \sin^2\left(\frac{5x}{4} - \frac{5\pi}{12}\right) + \frac{1}{4} = 0$.

Решение. Рассмотрим левую часть исходного уравнения как квадратный трёхчлен

$$f(y) = y^2 - \sin^2\left(\frac{5x}{4} - \frac{5\pi}{12}\right) \cdot y + \frac{1}{4}$$

относительно $y = \cos x$ и выделим полный квадрат:

$$f(y) = \left(y^2 - 2 \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{5x}{4} - \frac{5\pi}{12}\right)}{2} \cdot y + \frac{\sin^4\left(\frac{5x}{4} - \frac{5\pi}{12}\right)}{4} \right) + \frac{1 - \sin^4\left(\frac{5x}{4} - \frac{5\pi}{12}\right)}{4}$$

$$= \left(y - \frac{\sin^2\left(\frac{5x}{4} - \frac{5\pi}{12}\right)}{2} \right)^2 + \frac{1 - \sin^4\left(\frac{5x}{4} - \frac{5\pi}{12}\right)}{4}.$$

Оба слагаемых в правой части неотрицательны; первое – как полный квадрат, а второе – в силу того, что синус любого аргумента по абсолютной величине не превосходит 1. Поэтому равенство $f(y) = 0$ (т.е., в сущности, исходное уравнение) возможно тогда и только тогда, когда оба этих слагаемых одновременно равны 0. Таким образом, исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \dfrac{\sin^2\left(\frac{5x}{4} - \frac{5\pi}{12}\right)}{2} = \cos x \\ \sin^4\left(\frac{5x}{4} - \frac{5\pi}{12}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2\left(\frac{5x}{4} - \frac{5\pi}{12}\right) = 1 \\ \cos x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Эту систему можно получить и другими рассуждениями (являющимися, в сущности, вариантом предыдущих). Именно, рассмотрим исходное уравнение как квадратное уравнение

$$y^2-\sin^2\left(\frac{5x}{4}-\frac{5\pi}{12}\right)\cdot y+\frac{1}{4}=0$$

относительно $y=\cos x$. Чтобы решить это квадратное уравнение, подсчитаем его дискриминант:

$$D=\sin^4\left(\frac{5x}{4}-\frac{5\pi}{12}\right)-1.$$

Так как синус любого аргумента по абсолютной величине не превосходит 1, можно утверждать, что $D\le 0$. Следовательно, если рассматриваемое уравнение имеет решение, то этот дискриминант равен 0, т.е. $\sin^4\left(\frac{5x}{4}-\frac{5\pi}{12}\right)=1$ или, что равносильно, $\sin^2\left(\frac{5x}{4}-\frac{5\pi}{12}\right)=1$. Если же $\sin^2\left(\frac{5x}{4}-\frac{5\pi}{12}\right)=1$, наше уравнение принимает вид: $y^2-y+\frac{1}{4}=0$, т.е., как и следовало ожидать, имеет единственный корень $y=\frac{1}{2}$. Резюмируя, мы имеем:

$$y^2-\sin^2\left(\frac{5x}{4}-\frac{5\pi}{12}\right)\cdot y+\frac{1}{4}=0\Rightarrow\begin{cases}\sin^2\left(\frac{5x}{4}-\frac{5\pi}{12}\right)=1\\ y=\frac{1}{2}\end{cases}$$

Ясно, что последняя система не просто вытекает из уравнения, а равносильна ему (это легко установить прямой подстановкой значений из системы в уравнение).

Вспоминая, что y — это $\cos x$, мы сведём задачу к решению той же системы, что и при первом подходе.

Решение этой системы удобно начать со второго уравнения, которое сразу даёт: $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$. Решениями системы и, соответственно, решениями исходного уравнения будут те и только те из этих значений x, которые обращают первое уравнение в верное числовое равенство. Для этой проверки удобно в первом уравнении системы понизить вдвое степень выражения $\sin^2\left(\frac{5x}{4}-\frac{5\pi}{12}\right)$ за счёт удвоения аргумента, применив формулу $\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$. В результате мы получим уравнение

$$\cos\left(\frac{5x}{2}-\frac{5\pi}{6}\right)=-1,$$

так что теперь нужно вычислять значение выражения $A=\cos\left(\frac{5x}{2}-\frac{5\pi}{6}\right)$.

Для $x=\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, мы имеем: $A=\cos\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{5\pi}{6}+5\pi n\right)=\cos\pi n=(-1)^n$.

Поэтому выражение A принимает только значения 1 и -1 в зависимости от того, чётное или нечётное число n. Следовательно, из проверяемых значений x решениями исходного уравнения являются только те, которые соответствуют нечётным n, т.е.

$$x=\frac{\pi}{3}+2\pi(2m+1)=\frac{7\pi}{3}+4\pi m, m\in\mathbb{Z}.$$

Для $x=-\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, мы имеем:

$$A=\cos\left(-\frac{5\pi}{6}-\frac{5\pi}{6}+5\pi n\right)=\cos\left(-\frac{5\pi}{3}+5\pi n\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}-2\pi+4\pi n+\pi n\right)$$
$$=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\pi n\right)=(-1)^n\cos\frac{\pi}{3}=\frac{(-1)^n}{2}.$$

Поэтому выражение A принимает только значения $\frac{1}{2}$ (при чётных n) и $-\frac{1}{2}$ (при нечётных n). Поскольку ни при одном n это выражение не может быть равно -1, ни один x из второй серии не является решением исходного уравнения.

Ответ: $x=\frac{7\pi}{3}+4\pi m, m\in\mathbb{Z}$.

Задача 5. Окружности Ω_1 и Ω_2 с центрами в точках O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке A. Общая внешняя касательная к этим окружностям касается Ω_1 и Ω_2 соответственно в точках B_1 и B_2. Общая касательная к окружностям, проходящая через точку A, пересекает отрезок B_1B_2 в точке C. Прямая, делящая угол ACO_2 пополам, пересекает прямые O_1B_1, O_1O_2, O_2B_2 в точках D_1, L, D_2 соответственно. Найдите отношение $LD_2:O_2D_2$, если известно, что $CD_1=CO_1$.

Решение. Конфигурация, о которой идёт речь в задаче, изображена на Рисунке 1. Чтобы разобраться в этом рисунке, обратим внимание на большое число прямых углов — поскольку радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной, прямые O_1B_1 и O_2B_2 перпендикулярны прямой B_1B_2, а прямая O_1O_2 перпендикулярна прямой AC.

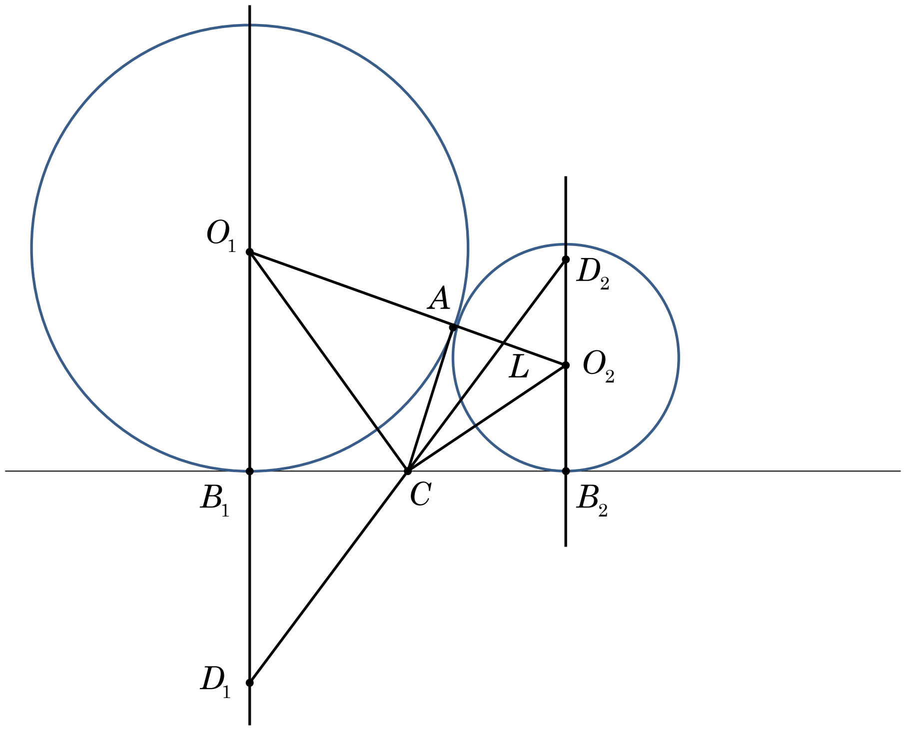

Рисунок 1

Кроме того, поскольку :

- $\Delta O_1B_1C = \Delta O_1AC$ — они прямоугольные, у них общая гипотенуза O_1C и равны катеты O_1B_1 и O_1A (это радиусы первой окружности);
- $\Delta O_2B_2C = \Delta O_2AC$ — они прямоугольные, у них общая гипотенуза O_2C и равны катеты O_2B_2 и O_2A (это радиусы второй окружности),

можно утверждать, что $\angle B_1O_1C = \angle CO_1A$, $\angle CO_2A = \angle CO_2B_2$. Для упрощения записей удобно обозначить величины углов B_1O_1C и B_2O_2C какими-нибудь буквами, например, α и β (см. Рисунок 2). Тогда $\angle CO_1A = \alpha$, $\angle CO_2A = \beta$, $\angle B_1CO_1 = \angle ACO_1 = 90^\circ - \alpha$, $\angle B_2CO_2 = \angle ACO_2 = 90^\circ - \beta$. Применяя теорему о сумме углов четырёхугольника к четырёхугольнику $B_1O_1O_2B_2$, мы имеем: $90^\circ + 2\alpha + 2\beta + 90^\circ = 360^\circ$, так что величины α и β связаны простым соотношением: $\alpha + \beta = 90^\circ$. Для его получения с равным успехом можно сослаться на то, что $\angle B_1O_1A = 2\alpha$ и $\angle B_2O_2A = 2\beta$ в сумме дают 180° (как внутренние односторонние углы при параллельных прямых O_1B_1 и O_2B_2, пересечённых прямой B_1B_2) или вычислить развёрнутый угол B_1CB_2 как сумму $2\left(90^\circ - \alpha\right) + 2\left(90^\circ - \beta\right)$. Поэтому $90^\circ - \alpha = \beta$, $90^\circ - \beta = \alpha$ — мы учли эти соотношения на Рисунке 2 (хотя этот рисунок является копией Рисунка 1, мы изменили форматирование линий, чтобы выделить те элементы, которые будут основными на этом этапе рассуждений).

Далее, треугольник O_1CD_1 по условию является равнобедренным и потому высота CB_1 также является и биссектрисой, т.е. $\angle B_1CD_1 = 90^\circ - \alpha = \beta$. Значит, равный этому углу вертикальный угол D_2CB_2 также равен $90^\circ-\alpha$. С другой стороны, угол B_2CD_2 является суммой углов O_2CB_2 (величиной α) и D_2CO_2 (величиной $\alpha/2$, т.к. по условию прямая D_1D_2 делит угол ACO_2 пополам). Таким образом, $90^\circ-\alpha=\alpha+\alpha/2$, откуда мы имеем: $\alpha=36^\circ$ (и, значит, $\beta=54^\circ$) – это ключевое свойство нашей конфигурации.

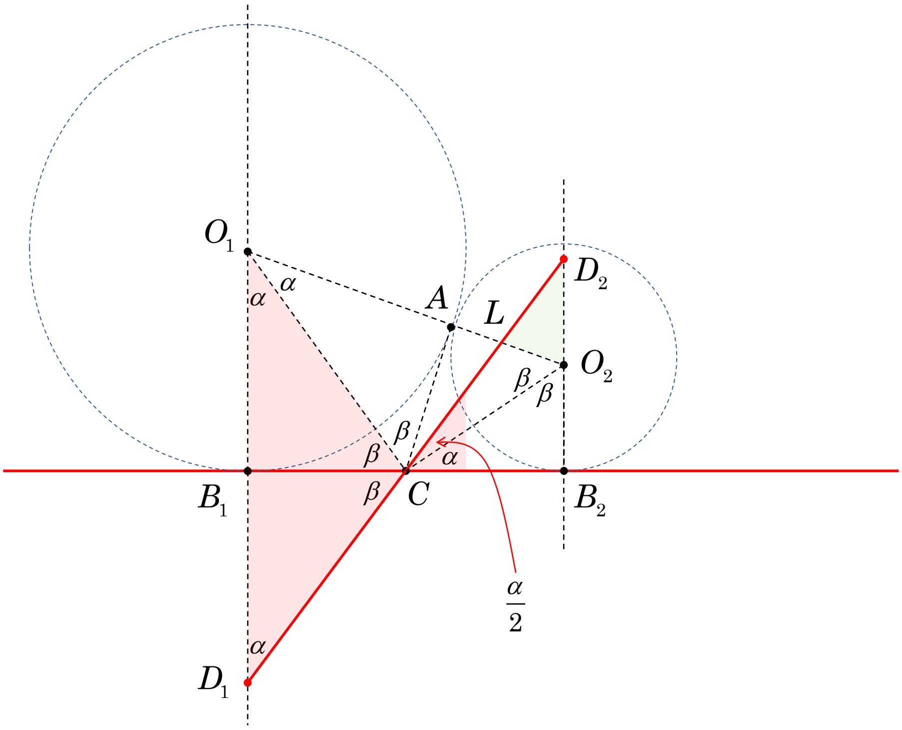

Рисунок 2

Теперь мы можем вычислить величины внутренних углов треугольника LD_2O_2:

1. Из прямоугольного треугольника CD_2B_2 угол D_2 равен $90^\circ-3\alpha/2=36^\circ$ (с равным успехом можно использовать то, что углы D_2 и O_1D_1C, который равен 36°, равны как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых O_1D_1 и O_2D_2, пересечённых прямой D_1D_2);
2. Из развёрнутого угла $B_2O_2D_2$ угол O_2 равен $180^\circ-2\beta=72^\circ$ (с равным успехом можно использовать и то, что углы O_2 и D_1O_1A, который равен $2\alpha=72^\circ$, равны как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых O_1D_1 и O_2D_2, пересечённых прямой O_1O_2);
3. Из суммы углов треугольника AD_2O_2 угол L равен $180^\circ-36^\circ-72^\circ=72^\circ$.

Рассматривая сторону LO_2 как основание этого треугольника, мы видим, что углы при основании равны. Значит, этот треугольник равнобедренный: $LD_2 = O_2D_2$, так что $LD_2 : O_2D_2 = 1:1$.

Ответ: $1:1$.

Задача 6. Найдите все положительные x, y, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} x^{3/2} + y = 16 \\ x + y^{2/3} = 8 \end{cases}$$

Решение. Введём новые неизвестные $u = x^{1/2}$, $v = y^{1/3}$. Для них система примет вид:

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = 16 \\ u^2 + v^2 = 8 \end{cases}$$

Эта система симметрична относительно u и v. Поэтому для её решения применим стандартный приём, а именно, введём элементарные симметрические многочлены $u+v$ и uv в качестве новых неизвестных a и b соответственно. Поскольку

$$u^3 + v^3 = (u+v)\left(u^2 - uv + v^2\right) = (u+v)\left((u+v)^2 - 3uv\right)$$
$$u^2 + v^2 = (u+v)^2 - 2uv,$$

для неизвестных a и b последняя система примет вид:

$$\begin{cases} a\left(a^2 - 3b\right) = 16 \\ a^2 - 2b = 8. \end{cases}$$

Исключая b, мы получим кубическое уравнение относительно a: $a^3 - 24a + 32 = 0$.

Самый распространённый метод решения уравнения высокой степени вида $P(x) = 0$ ($P(x)$ — многочлен) заключается в разложении многочлена $P(x)$ на два множителя меньшей степени и последующем расщеплении уравнения $P(x) = 0$ на два уравнения.

Разложение многочлена на множители обычно базируется на следующей *теореме Безу*:

если уравнение $P(x) = 0$, где $P(x)$ — многочлен, имеет корень x_0, то многочлен $P(x)$ можно разложить на множители, причём один из множителей — это $(x - x_0)$ (второй множитель обычно находят делением многочлена $P(x)$ на двучлен $(x - x_0)$ «в столбик»).

Как правило, уравнения высоких степеней, встречающиеся на экзаменах, имеют только целые коэффициенты. В этом случае для поиска корней можно использовать следующую теорему:

если коэффициенты уравнения $a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ являются целыми числами и целое число x_0 — корень этого уравнения, то x_0 является делителем свободного члена a_0. Если рациональное число $x_0 = p/q$, где целые числа p и q — взаимно простые (т.е. дробь p/q несократима), является корнем этого уравнения, то p — делитель свободного члена a_0, а q — делитель старшего коэффициента a_n.

После этих общих замечаний приступим к решению нашего уравнения. Свободный член (число 32) делится только на

$$1, -1, 2, -2, 4, -4, 8, -8, 16, -16, 32, -32,$$

а старший коэффициент (число 1) только на 1 и -1. Поэтому, *если* наше уравнение имеет рациональные корни, то искать их нужно только среди следующих 12 чисел:

$$1, -1, 2, -2, 4, -4, 8, -8, 16, -16, 32, -32.$$

Отметим — мы не утверждаем, что хотя бы одно из них является корнем. Сформулированная выше теорема гарантирует лишь, что никакое другое рациональное число корнем быть не может. Простая подстановка показывает, что $a_0 = 4$ — корень уравнения $a^3 - 24a + 32 = 0$. Поэтому многочлен $P(a) = a^3 - 24a + 32$ можно разложить на два множителя, причём один из них равен $(a-4)$. Второй множитель можно найти делением многочлена $a^3 - 24a + 32$ на двучлен $(a-4)$ «в столбик». Но мы применим другой метод, который интересен тем, что дословное его повторение позволяет легко доказать теорему Безу:

$$P(a) = \left(a^3 - 24a + 32\right) - 0 = \left(a^3 - 24a + 32\right) - \left(4^3 - 24 \cdot 4 + 32\right) = \left(a^3 - 4^3\right) - 24(a-4)$$
$$= (a-4)\left(a^2 + 4a + 16\right) - 24(a-4) = (a-4)\left(a^2 + 4a - 8\right).$$

Поэтому наше уравнение распадается на два: $a - 4 = 0$ и $a^2 + 4a - 8 = 0$. Первое уравнение даёт первый корень $a_1 = 4$, который мы уже нашли раньше. Второе уравнение даёт ещё два корня: $a_2 = -2 + 2\sqrt{3}$ и $a_3 = -2 - 2\sqrt{3}$. Соответствующие значения b: $b_1 = 4, b_2 = 4 - 4\sqrt{3}, b_3 = 4 + 4\sqrt{3}$.

Поэтому для неизвестных u и v мы имеем три системы:

$$\begin{cases} u + v = 4 \\ uv = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} u + v = -2 + 2\sqrt{3} \\ uv = 4 - 4\sqrt{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} u + v = -2 - 2\sqrt{3} \\ uv = 4 + 4\sqrt{3} \end{cases}$$

Первая система имеет единственное решение: $u=2, v=2$. Поскольку $x=u^2$, $y=v^3$, этому решению соответствуют следующие значения основных неизвестных: $x=4,\ \ y=8$.

Так как число $4-4\sqrt{3}$ отрицательно, второе уравнение второй системы влечёт, что, *если* она и имеет решение (u_0,v_0), то числа u_0 и v_0 разных знаков (легко показать, что вторая система имеет два решения, обладающих этим свойством). С другой стороны, числа x и y положительны. Поэтому система

$$\begin{cases} x^{1/2}=u_0 \\ y^{1/3}=v_0 \end{cases}$$

не имеет решений. Это означает, что решать вторую систему нет необходимости.

Так как число $4+4\sqrt{3}$ положительно, второе уравнение третьей системы влечёт, что, *если* она и имеет решение (u_0,v_0), то числа u_0 и v_0 либо оба положительны, либо оба отрицательны. Первое же уравнение третьей системы говорит, что сумма чисел u_0 и v_0 отрицательна. Поэтому числа u_0 и v_0 отрицательны (*если* эти числа существуют; на самом деле третья система не имеет решений). Поэтому система

$$\begin{cases} x^{1/2}=u_0 \\ y^{1/3}=v_0 \end{cases}$$

не имеет решений. Это означает, что решать и третью систему нет необходимости.

Ответ: $x=4, y=8$.

Задача 7. В основании прямой призмы лежит правильный треугольник со стороной 1. Высота призмы равна $\sqrt{2}$. Найдите расстояние между скрещивающимися диагоналями боковых граней.

Решение. Пусть A, B, C — вершины правильного треугольника, лежащего в основании призмы, A_1, B_1, C_1 — соответствующие им вершины треугольника, который является верхним основанием призмы (боковые рёбра — AA_1, BB_1, CC_1; см. Рисунок 3). В силу симметрии расстояния между всеми парами скрещивающихся диагоналей боковых граней равны между собой. Для определённости мы будем находить расстояние между диагоналями AC_1 и CB_1.

По поводу термина «диагональ» следует сделать важное замечание. В большинстве школьных учебников, например, «Геометрии 7-9» Л.С.Ананасяна, В.Ф.Бутузова и др., «Геометрии 7-9» А.В.Погорелова, «Геометрии 7-9» Шарыгина И.Ф., диагональю многоугольника называется ***отрезок***, соединяющий две несоседние вершины. В классическом учебнике «Геометрия» А.П.Киселёва диагональю многоугольника называется «всякая ***прямая***, которая соединяет вершины двух углов многоугольника, не прилежащих к одной стороне». Однако формулируя и доказывая свойства диагоналей параллелограмма и прямоугольника, Ф.П.Киселёв считает диагональю ***отрезок***, соединяющий противоположные вершины, а не ***прямую***. Это ясно, например, из следующих формулировок: «Если четырёхугольник — параллелограмм, то его диагонали, пересекаясь, делятся пополам», «В прямоугольнике диагонали равны».

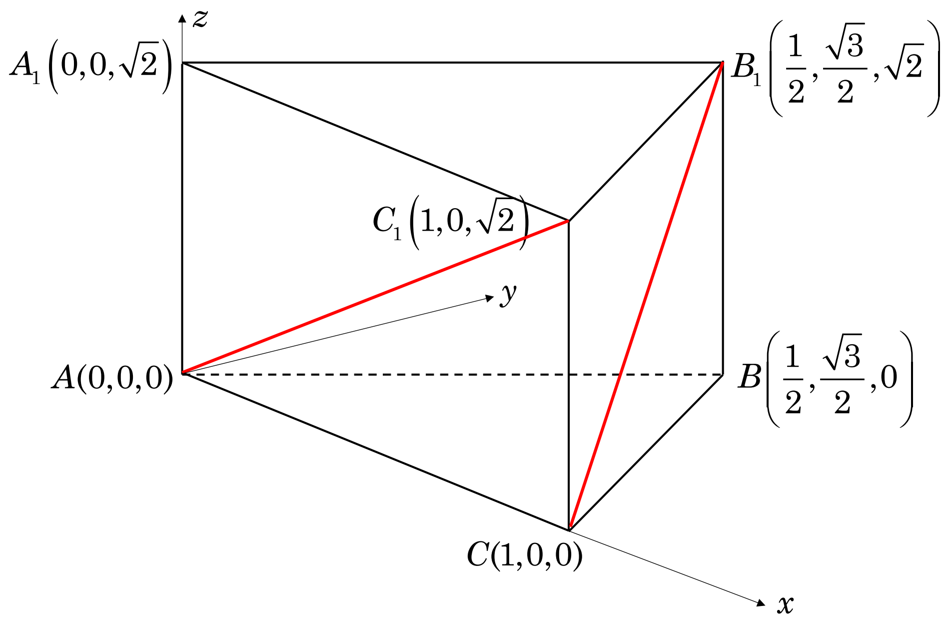

Рисунок 3

«Математическая энциклопедия» (Москва, Изд-во «Советская энциклопедия», 1979) даёт следующее определение диагонали: «Диагональ — отрезок прямой, соединяющей две вершины многоугольника (многогранника), не лежащие на одной стороне (на одной грани).»

Но в нашей задаче авторы говорят не просто о диагоналях, а о «скрещивающихся диагоналях». Как школьные учебники, так и «Математическая энциклопедия» определяют только «скрещивающиеся ***прямые***». Но можно говорить и о скрещивающихся отрезках в пространстве как об отрезках, которые лежат на скрещивающихся прямых.

В общем, задача сформулирована неудачно, т.к. неясно, что понимать под «скрещивающимися диагоналями» AC_1 и CB_1, ***отрезки*** AC_1 и CB_1 ***или прямые*** AC_1 и CB_1.

Чтобы показать, к чему может привести путаница в терминологии, рассмотрим Рисунок 4, на котором изображены две пересекающиеся прямые, a и b, и два непересекающихся отрезка, AB и CD на них. Расстояние между прямыми равно 0, в то время как расстояние между отрезками — это длина отрезка BC, которая положительна.

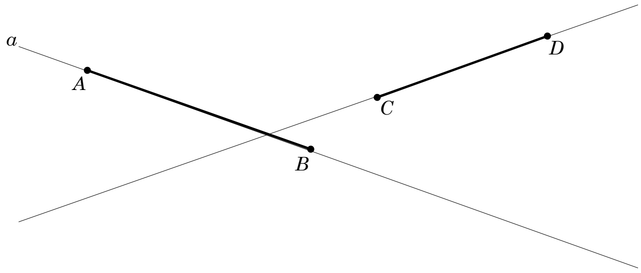

Рисунок 4

Мы будем считать, что диагонали — это отрезки. но дадим такое решение, которое применимо и в случае, когда под диагоналями понимаются и прямые. Кроме того, мы приведём ещё одно решение, которое исходит из того, что диагонали — это прямые (именно так трактуется термин «диагональ» в решении, предложенном экзаменационной комиссией).

Чтобы решить задачу, введём систему координат как показано на Рисунке 3. Поскольку треугольник ABC — правильный, а его сторона равна 1, координаты вершин A, B, C есть: $A(0,0,0)$, $B\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$, $C(1,0,0)$. Далее, поскольку призма прямая, а её высота равна $\sqrt{2}$, координаты вершин A_1, B_1, C_1 есть: $A_1\left(0,0,\sqrt{2}\right)$, $B_1\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},\sqrt{2}\right)$,

Метод координат в геометрии означает, что мы не только отождествляем точки и тройки их кодинат, но и вообще все геометрические объекты описываем в алгебраических терминах. В частности, мы отождествляем геометрические фигуры с их уравнениями (в зависимости от ситуации, с неравенствами или системами уравнений/неравенств). Поэтому теперь мы найдём уравнения, которые задают диагонали AC_1 и CB_1.

Напомним соответствующую теорию. При этом для сокращения записей в ходе дальнейших рассуждений мы введём операцию «сложения» точки и вектора, понимая под «суммой» произвольной точки P и вектора $\vec{v}$ точку Q, которая получится, если от точки P отложить вектор $\vec{v}$. Если точка P имеет координаты (P_x,P_y,P_z), вектор $\vec{v}$ — координаты (v_x,v_y,v_z), то точка Q имеет координаты $Q_x = P_x + v_x$, $Q_y = P_y + v_y$, $Q_z = P_z + v_z$. Поэтому сумму точки P и вектора $\vec{v}$ можно определить как такую точку Q, что радиус-вектор $\overrightarrow{OQ}$ равен сумме радиус-вектора $\overrightarrow{OP}$ и вектора $\vec{v}$.

По аналогии с «суммой» точки и вектора, мы определим «разность» $Q-P$ произвольных точек Q и P как вектор $\vec{v}$, координаты которого равны разностям координат точек Q и P: $v_x = Q_x - P_x$, $v_y = Q_y - P_y$, $v_z = Q_z - P_z$. С равным успехом «разность» $Q - P$ можно определить как (свободный) вектор $\overrightarrow{PQ}$.

Пусть $M(x,y,z)$ — неопределённая точка отрезка PQ. Эту точку можно получить, откладывая от точки P вектор $\overrightarrow{PM}$: $M = P + \overrightarrow{PM}$. Вектор $\overrightarrow{PM}$ в свою очередь получается из вектора $\overrightarrow{PQ}$ умножением на число $u = PM/PQ$; это число, очевидно, лежит на отрезке $[0;1]$. Поэтому $M = P + u \cdot \overrightarrow{PQ}$. Координаты вектора $\overrightarrow{PQ}$ получаются вычитанием из координат конца вектора соответствующих координат начала: $\overrightarrow{PQ} = Q - P$. Поэтому

$$M = P + u\left(Q - P\right) = (1-u)P + uQ,$$

или, в координатной форме,

$$\begin{cases} x = (1-u)P_x + uQ_x, \\ y = (1-u)P_y + uQ_y, \\ z = (1-u)P_z + uQ_z. \end{cases}$$

Если мы задаём этими уравнениями ***отрезок*** PQ, то параметр u меняется от 0 до 1. Если же считать, что этот параметр может принимать произвольное действительное значение, то мы получим параметрическое уравнение ***прямой*** PQ.

Поскольку точка A имеет координаты $(0;0;0)$, вектор $\overrightarrow{AC_1}$ — координаты $\left(1;0;\sqrt{2}\right)$, диагональ AC_1 задаётся уравнениями $x = u,\ y = 0,\ z = \sqrt{2}u,$ где $u \in [0;1]$.

Точка C имеет координаты $(1;0;0)$, вектор $\overrightarrow{CB_1}$ — координаты $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2},\sqrt{2}\right)$. Поэтому диагональ BC_1 задаётся уравнениями $x = \dfrac{2-v}{2},\ \ y = \dfrac{\sqrt{3}v}{2},\ \ z = \sqrt{2}v,$ где $v \in [0;1]$.

Нам нужно найти расстояние между *отрезками* AB_1 и BC_1. Напомним, что расстоянием между двумя множествами (телами, фигурами), Φ_1 и Φ_2, называется наименьшее из расстояний $\rho\left(P_1,P_2\right)$, где P_1 — произвольная точка множества Φ_1, а P_2 — произвольная точка множества Φ_2 (вообще говоря, этот минимум может и не достигаться, так что следует говорить не о минимуме, а о точной нижней границе). Имея в виду параметрическое описание отрезков AB_1 и BC_1, мы можем сказать, что квадрат расстояния между произвольными точками этих отрезков равен

$$\left(u-\frac{2-v}{2}\right)^2+\left(0-\frac{\sqrt{3}v}{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}u-\sqrt{2}v\right)^2=3u^2+3v^2-3uv-2u-v+1.$$

Таким образом, наша задача свелась к вычислению минимума функции двух незакисимых переменных $f(u,v)=3u^2+3v^2-3uv-2u-v+1$ на квадрате $0\le u\le 1$, $0\le v\le 1$.

Рассмотрим эту функцию как квадратичную относительно u (переменную v будем считать параметром) и запишем её в стандартном виде:

$$f(u,v)=3u^2-\left(3v+2\right)u+\left(3v^2-v+1\right).$$

Известно, что наименьшее значение квадратичной функции ax^2+bx+c с положительным старшим коэффициентом достигается в точке $x_0=-\frac{b}{2a}$ и равно $y_0=-\frac{b^2-4ac}{4a}\equiv-\frac{D}{4a}$. Поэтому при фиксированном значении v наименьшее значение функции $f(u,v)=3u^2-\left(3v+2\right)u+\left(3v^2-v+1\right)$ достигается в точке $u_0=\frac{3v+2}{6}$ и равно $m(v)=\frac{27v^2-24v+8}{12}$. Наименьшее значение квадратичной функции $m(v)$ достигается в точке $v_0=\frac{4}{9}$ и равно $\frac{2}{9}$. При этом соответствующее значение u_0 равно $\frac{5}{9}$, так что точка глобального минимума функции $f(u,v)$ лежит на квадрате $0\le u\le 1$, $0\le v\le 1$. Это означает, что наименьшее значение величины $\rho^2\left(P_1,P_2\right)$, где P_1 — произвольная точка диагонали AC_1, а P_2 — произвольная точка диагонали CB_1, равно $\frac{2}{9}$. Поэтому искомое расстояние между этими диагоналями равно $\sqrt{\frac{2}{9}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Наше решение автоматически даёт и точки, в которых достигается расстояние между диагоналями AC_1 и CB_1. На первой диагонали это точка P_1^* с координатами $x=\frac{5}{9}$, $y=0$, $z=\frac{5\sqrt{2}}{9}$, а на второй — точка P_2^* с координатами $x=\frac{7}{9}$, $y=\frac{2\sqrt{3}}{9}$, $z=\frac{4\sqrt{2}}{9}$. Точка P_1^* делит диагональ AC_1 в отношении 5:4, считая от точки A, а точка P_2^* делит диагональ CB_1 в отношении 4:5, считая от точки C.

Второе решение мы дадим в предположении, что диагонали AC_1 и CB_1 — *прямые, а не отрезки.* Это решение будет «чисто геометрическим», без использования метода координат и векторной алгебры. Начнём решение с того, что напомним несколько фактов из стандартного школьного курса стереометрии.

1. Предположим, что нам дана какая-то плоскость π и параллельная ей прямая a. Тогда длина перпендикуляра, опущенного из произвольно выбранной точки $P \in a$ на плоскость π, не зависит от этой точки. Длина этого перпендикуляра называется расстоянием от прямой a до плоскости π и обозначается $\rho(a,\pi)$ или $d(a,\pi)$.
2. Если у нас есть две скрещивающиеся прямые, то через каждую из них можно провести плоскость, параллельную второй прямой, и притом только одну. Поробнее, если прямые a и b скрещиваются, то существует и притом только одна плоскость $\pi_{a,b}$, которая содержит прямую a и параллельна прямой b. Также существует и притом только одна плоскость $\pi_{b,a}$, которая содержит прямую b и параллельна прямой a. Плоскости $\pi_{a,b}$ и $\pi_{b,a}$ параллельны друг другу.
3. Построить плоскость $\pi_{a,b}$ можно, например, следуюшим образом. Нужно прямую b параллельным переносом переместить так, чтобы её образ, b', пересёкся с прямой a. Через две пересекающиеся прямые a и b' можно провести плоскость. Эта плоскость и будет искомой плоскостью $\pi_{a,b}$.
4. Расстояние от прямой b до плоскости $\pi_{a,b}$ и называется расстоянием между скрещивающимися прямыми a и b и обозначается $\rho(a,b)$ или $d(a,b)$ (см. Рисунок 5).

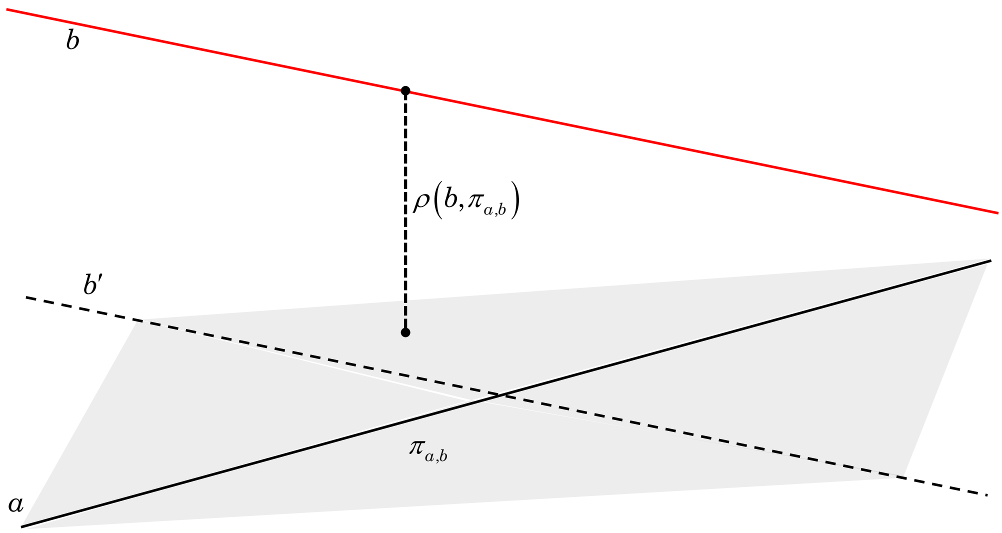

Рисунок 5

В некоторых учебниках расстоянием между скрещивающимися прямыми называется длина отрезка P_1P_2 с концами на этих прямых (т.е. $P_1 \in a$, $P_2 \in b$), такого, что прямая P_1P_2 является общим перпендикуляром к этим прямым. Несложно показать, что эти определения эквивалентны. Имея в виду приведённое выше общее определение расстояния между двумя множествами в метрическом пространстве, следует подчеркнуть, что школьные определения расстояния между скрещивающимися прямыми на самом деле являются теоремами, показывающими, как найти это расстояние.

После этих замечаний приступим непосредственно к решению нашей задачи. Пусть диагональ AC_1 — это прямая a, а диагональ CB_1 — прямая b. Как было отмечено выше, нам нужно прямую $b \equiv CB_1$ параллельным переносом переместить так, чтобы её образ, b', пересёкся с прямой $a \equiv AC_1$. Сделать это удобно в плоскости грани CC_1B_1B (см. Рисунок 6), проведя через точку C_1 (которая лежит на прямой $a \equiv AC_1$) прямую b', параллельную прямой $b \equiv CB_1$. Пусть D — точка пересечения прямых CB и b'.

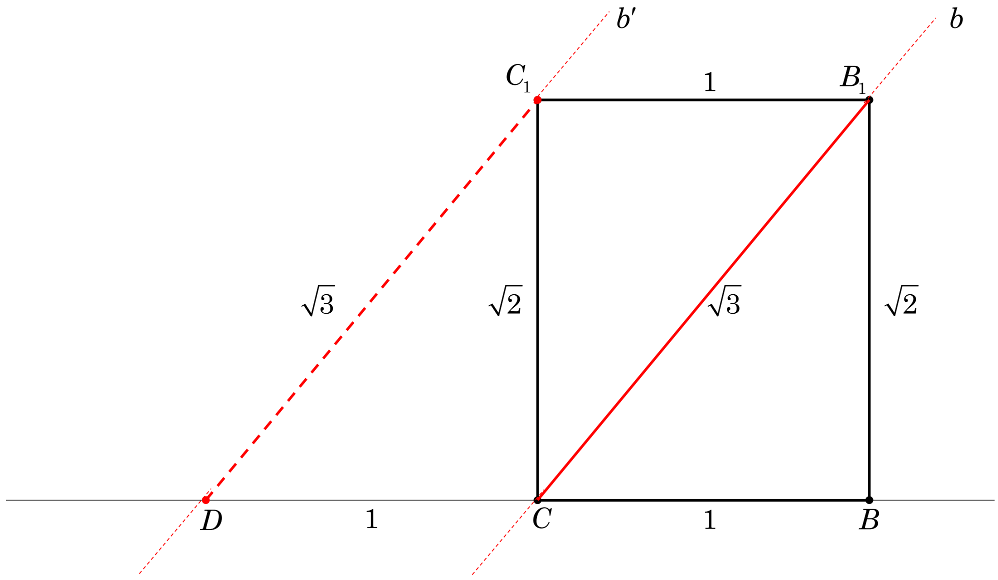

Рисунок 6

Из Рисунка 6 ясно, что $DC = 1$, $DC_1 = \sqrt{3}$. Кроме того, из Рисунка 7, где изображена плоскость нижнего основания призмы, ясно, что $DA = \sqrt{3}$ (достаточно применить теорему косинусов к ΔDAC).

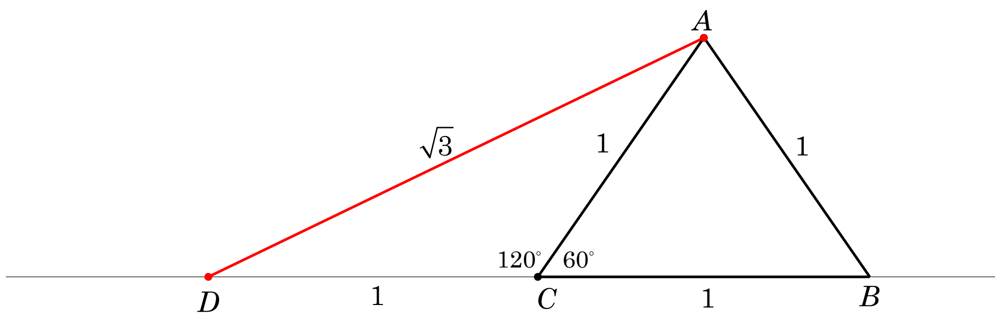

Рисунок 7

Теперь рассмотрим основную объёмную конфигурацию (см. Рисунок 8). Из нашего построения следует, что плоскость AC_1D и будет плоскостью $\pi_{a,b}$, которая содержит одну из скрещивающихся прямых (именно, $a \equiv AC_1$) и параллельна второй, $b \equiv CB_1$. Поэтому искомым расстоянием между скрещивающимися диагоналями AC_1 и CB_1 будет расстояние ρ от любой точки прямой CB_1, например, от точки C, до плоскости AC_1D.

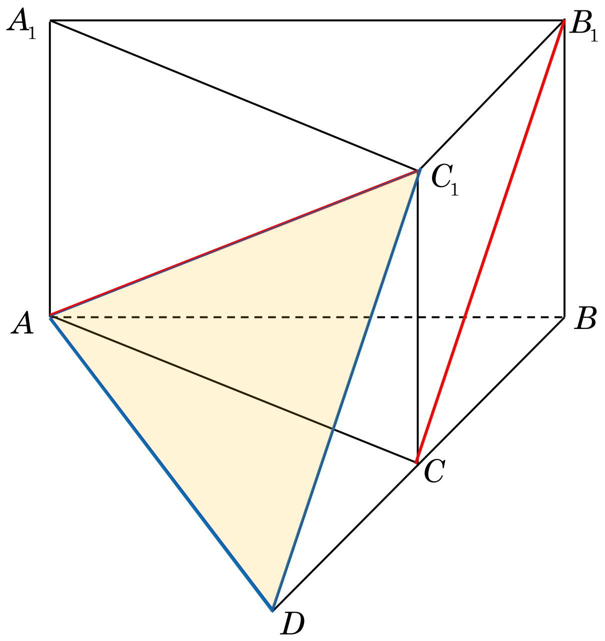

Рисунок 8

Найти это расстояние удобно из стандартной формулы для объёма пирамиды AC_1DC, считая, что треугольник AC_1D является основанием, а точка C — вершиной (тогда высота пирамиды, h, и будет искомым расстоянием):

$$\rho = h = \frac{3V_{AC_1DC}}{S_{AC_1D}}.$$

Из Рисунков 6 и 7 ясно, что все стороны треугольника AC_1D равны $\sqrt{3}$, так что он является равносторонним. Поэтому его площадь равна $3\sqrt{3}/4$.

Объём пирамиды AC_1DC легко найти из имеющихся данных, если в качестве основания рассмотреть треугольник DAC. Площадь этого треугольника мы легко найдём из Рисунка 7:

$$S_{DAC} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Высотой будет отрезок $C_1C = \sqrt{2}$, так что

$$V_{AC_1DC} = \frac{1}{3} S_{DAC} \cdot C_1C = \frac{\sqrt{6}}{12}.$$

Теперь для искомого расстояния между скрещивающимися диагоналями мы имеем:

$$h = \frac{3V_{AC_1DC}}{S_{AC_1D}} = \frac{3\sqrt{6}/12}{3\sqrt{3}/4} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Задача 8. Пусть

$$f(x,y) = \sqrt{-6x^2 - 14y^2 - 18xy + 6} + y,$$
$$g(x,y) = -\sqrt{-6x^2 - 14y^2 - 18xy + 6} + y.$$

Найдите все значения, которые может принимать хотя бы одна из этих функций.

Решение. Пусть E_f и E_g — области значений функций $f(x,y)$ и $g(x,y)$ соответственно. В задаче речь идёт о нахождении объединения $E = E_f \cup E_g$ $E = E_f \cup E_g$ этих множеств.

По определению, область значений функции $z = f(x,y)$ – это множество чисел z таких, что существует хотя бы одна точка (x,y) из области определения функции, для которой верно равенство $z = f(x,y)$. Это определение можно переформулировать следующим образом: область определения функции $z = f(x,y)$ — это множество значений параметра z, для которых уравнение $f(x,y) = z$ имеет решение. Поэтому E — это множество значений параметра z, для которых хотя бы одно из двух уравнений, $f(x,y) = z$ или $g(x,y) = z$, имеет решение или, что то же самое, имеет решение совокупность

$$\left[\begin{array}{l} f(x,y) = z, \\ g(x,y) = z. \end{array}\right.$$

Поскольку области определения функций $f(x,y)$ и $g(x,y)$ совпадают, эту совокупность можно получить при расщеплении уравнения

$$\left(f(x,y) - z\right) \cdot \left(g(x,y) - z\right) = 0 \qquad (1)$$

на два уравнения: $f(x,y) - z = 0$ и $g(x,y) - z = 0$. Подставляя в (1) формулы, которые задают функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$, мы получим:

$$\left(\sqrt{-6x^2 - 14y^2 - 18xy + 6} + y - z\right) \cdot \left(-\sqrt{-6x^2 - 14y^2 - 18xy + 6} + y - z\right) = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$\left((y - z) + \sqrt{-6x^2 - 14y^2 - 18xy + 6}\right) \cdot \left((y - z) - \sqrt{-6x^2 - 14y^2 - 18xy + 6}\right) = 0.$$

С помощью тождества $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ последнее уравнение приводится к виду:

$$(y-z)^2=-6x^2-14y^2-18xy+6. \qquad (2)$$

Стандартная школьная практика требует на этом этапе обязательно учесть область определения, т.е. добавить к уравнению (2) неравенство $-6x^2-14y^2-18xy+6\geq 0$. На самом деле в этом нет никакой необходимости. Выражение $-6x^2-14y^2-18xy+6$ в силу (2) равно полному квадрату и потому неотрицательно, так что его можно представить в виде $\left(\sqrt{-6x^2-14y^2-18xy+6}\right)^2$.

Итак, теперь задача свелась к следующей: *при каком значении параметра z уравнение* (2) *имеет хотя бы одно решение* (x,y)?

Если в уравнении (2) раскрыть скобки и привести подобные члены, мы получим уравнение

$$6x^2+15y^2+z^2+18xy-2yz-6=0.$$

Это уравнение можно рассматривать как квадратное относительно x; в стандартной форме оно выглядит так:

$$6x^2+18y\cdot x+\left(15y^2+z^2-2yz-6\right)=0.$$

Это уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда его дискриминат неорицателен, т.е. найдутся числа y и z такие, что (мы вычисляем $D/4$)

$$(9y)^2-6\left(15y^2+z^2-2yz-6\right)\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad 3y^2-4yz+2z^2-12\leq 0.$$

Последнее неравенство можно рассматривать как квадратное относительно y. Поскольку старший коэффициент квадратичного выражения в левой части положителен, оно имеет решение тогда и только тогда, когда его дискриминат неорицателен, т.е. найдётся число z такое, что (мы вычисляем $D/4$)

$$(2z)^2-3\left(2z^2-12\right)\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad z^2\leq 18 \quad\Leftrightarrow\quad -3\sqrt{2}\leq z\leq 3\sqrt{2}.$$

Ответ: $\left[-3\sqrt{2};3\sqrt{2}.\right]$.

Замечание. Задачу можно решать идейно более простым методом (хотя технически и более громоздким):

(1) найти области значений E_f и E_g функций $f(x,y)$ и $g(x,y)$ стандартным исследованием этих функций с помощью производных;
(2) объединить эти две области.

Реализуем этот план. Но прежде отметим, что, поскольку наши функции зависят от двух аргументов, школьную процедуру нужно немного модифицировать. Именно, сначала мы зафиксируем значение одного аргумента, например, y (в данной задаче это удобнее), и рассмотрим наши функции как функции одного аргумента, x: $f(x,y)\equiv f_y(x)$, $g(x,y)\equiv g_y(x)$. Это позволит найти области значений $E_f(y)\equiv E_{f_y}$, $E_g(y)\equiv E_{g_y}$ при изменении только одной переменной x. Эти области, конечно, будут зависеть от y; если, например, они окажутся промежутками, то их концы будут какими-то функциями от y. Затем мы начнём менять y и посмотрим, как будут вести себя области $E_f(y)$ и $E_g(y)$. Это даст нам множества E_f и E_g, а, значит, и их объединение.

Если рассматривать исходные функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$ как функции одного аргумента x (считая y параметром), то их исследование сводится к изучению функции $h_y(x)=\sqrt{-6x^2-14y^2-18xy+6}\equiv\sqrt{-2r_y(x)}$, где $r_y(x)=3x^2+7y^2+9xy-3$. Область определения этой функции совпадает с множеством решений неравенства $r_y(x)\le 0$. Поскольку мы считаем x единственной переменной, перепишем его в виде:

$$3x^2+9y\cdot x+\left(7y^2-3\right)\le 0. \tag{3}$$

Дискриминант D квадратного трёхчлена в левой части даётся формулой:

$$D=\left(9y\right)^2-12\left(7y^2-3\right)=36-3y^2.$$

В дальнейшем нужно различать три случая.

Случай 1. Если дискриминант отрицателен, т.е. $y>2\sqrt{3}$ или $y<-2\sqrt{3}$, то график квадратичной функции $r_y(x)$ (это парабола, ветви которой направлены вверх) не пересекает ось абсцисс и потому неравенство (3) не имеет решений. Иначе говоря, при $y\in\left(-\infty,-2\sqrt{3}\right)\cup\left(2\sqrt{3},+\infty\right)$ функция $h_y(x)=\sqrt{-2r_y(x)}$ не определена, каким бы ни был x. Соответственно при этих значениях переменных не определены и исходные функции f и g.

Случай 2. Если $D=0$, т.е. $y=\pm 2\sqrt{3}$, то график квадратичной функции $r_y(x)$ касается оси абсцисс в точке $x=-9y/6=\mp 3\sqrt{3}$ и потому неравенство (3) имеет единственное решение $x=\mp 3\sqrt{3}$; в этой точке функция $r_y(x)$ равна 0. Иначе говоря, при $y=2\sqrt{3}$ и $y=-2\sqrt{3}$ функция $h_y(x)$, а вслед за ней и исходные функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$, определены в одной точке x, которая равна $-3\sqrt{3}$ и $3\sqrt{3}$ соответственно. При этих значениях y и x функция $h_y(x)$ равна 0. Соответственно, исходные функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$ принимают одно и то же значение $z=2\sqrt{3}$, если $\left(x,y\right)=\left(-3\sqrt{3},2\sqrt{3}\right)$, или $z=-2\sqrt{3}$, если $\left(x,y\right)=\left(3\sqrt{3},-2\sqrt{3}\right)$.

Случай 3 (самый интересный). Если $D>0$, т.е. $-2\sqrt{3}<y<2\sqrt{3}$, то график квадратичной функции $r_y(x)$ пересекает ось абсцисс в точках $x_{1,2}=\dfrac{-9y\pm\sqrt{36-3y^2}}{6}$ и потому множеством решений неравенства (3) является отрезок $\dfrac{-9y-\sqrt{36-3y^2}}{6}\le x\le\dfrac{-9y+\sqrt{36-3y^2}}{6}$. Иначе говоря, при $-2\sqrt{3}<y<2\sqrt{3}$ функция $h_y(x)$, а вслед за ней и исходные функции, определены тогда и только тогда, когда

$$\frac{-9y-\sqrt{36-3y^2}}{6}\le x\le\frac{-9y+\sqrt{36-3y^2}}{6}. \qquad (4)$$

В невырожденном Случае 3 вершина параболы $z=r_y(x)$ имеет координаты: $x_{\text{В}}=-\dfrac{3y}{2}$, $y_{\text{В}}=\dfrac{y^2-12}{4}$. Поскольку точка $x_{\text{В}}$ принадлежит отрезку (4), при изменении x на этом отрезке функция $z=r_y(x)$ сначала убывает от 0 до $\dfrac{y^2-12}{4}$, а затем возрастает от $\dfrac{y^2-12}{4}$ до 0. На отрезке **Ошибка! Источник ссылки не найден.** поведение функции $h_y(x)=\sqrt{-2r_y(x)}$ противоположно поведению функции $r_y(x)$, т.е. $h_y(x)$ сначала возрастает от 0 до $\sqrt{\dfrac{12-y^2}{2}}$ (достигая этого максимума при $x=x_0$), а затем убывает до 0.

Отсюда следует, что при изменении x на отрезке (4):

- функция $f_y(x)=h_y(x)+y$ сначала возрастает от y до $y+\sqrt{\dfrac{12-y^2}{2}}$ (достигая этого максимума при $x=-3y/2$), а затем убывает до y;
- функция $g_y(x)=-h_y(x)+y$ сначала убывает от y до $y-\sqrt{\dfrac{12-y^2}{2}}$ (достигая этого минимума при $x=-3y/2$), а затем возрастает до y.

Таким образом, при фиксированном $y\in\left(-2\sqrt{3},2\sqrt{3}\right)$ область значений функции $f_y(x)$ — отрезок $\left[y,y+\sqrt{\dfrac{12-y^2}{2}}\right]$, а область значений функции $g_y(x)$ — отрезок $\left[y-\sqrt{\dfrac{12-y^2}{2}},y\right]$. Если $y=2\sqrt{3}$ или $y=-2\sqrt{3}$, эти отрезки вырождаются в точки $z=2\sqrt{3}$ и $z=-2\sqrt{3}$ соответственно, т.е. Случай 2 можно включить в Случай 3.

Начнём теперь менять переменную y, предполагая, конечно, что $y \in \left[-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\right]$, и посмотрим, как будет вести себя правый конец области значений функции $f_y(x)$, т.е. число $y + \sqrt{\dfrac{12-y^2}{2}}$. С этой целью исследуем функцию $F(y) = y + \sqrt{\dfrac{12-y^2}{2}}$ по стандартной схеме:

1. Эта функция определена и непрерывна при $y \in \left[-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\right]$.
2. При $y \in \left(-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\right)$ существует конечная производная $F'(y) = 1 - \dfrac{y}{\sqrt{2\left(12-y^2\right)}}$. Эта производная обращается в 0 при $y = 2\sqrt{2}$, причём слева от точки $y = 2\sqrt{2}$ производная положительна, а справа — отрицательна.
3. Поэтому $F(y)$ возрастает на отрезке $-2\sqrt{3} \le y \le 2\sqrt{2}$ и убывает на отрезке $2\sqrt{2} \le y \le 2\sqrt{3}$.
4. $F\left(-2\sqrt{3}\right) = -2\sqrt{3}, \quad F\left(2\sqrt{3}\right) = 2\sqrt{3}, \quad F\left(2\sqrt{2}\right) = 3\sqrt{2}$.

Поэтому график функции $z = F(y)$ выглядит так, как показано но Рисунке 9.

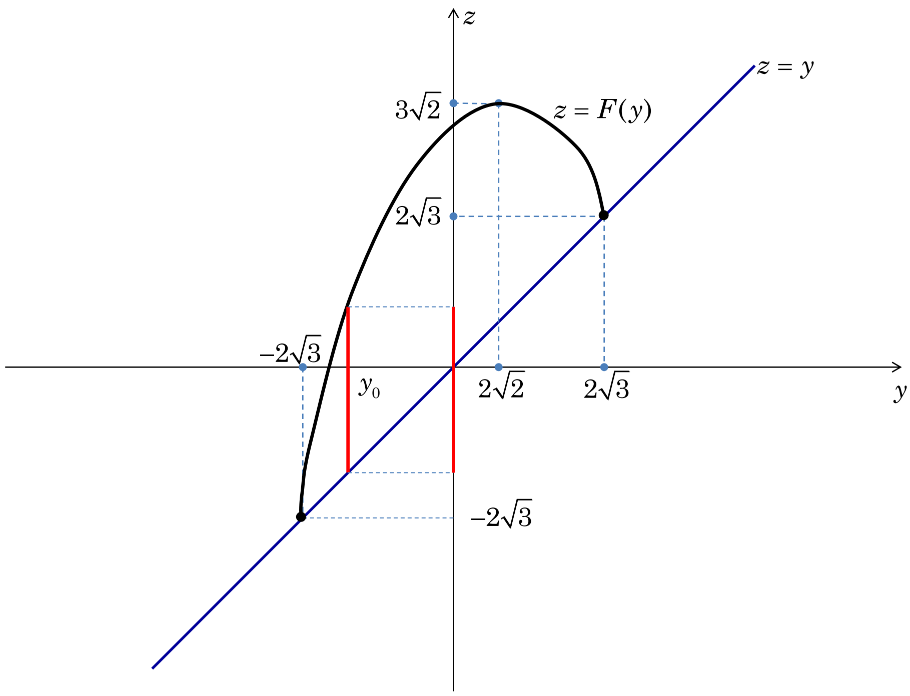

Рисунок 9

При фиксированном значении $y_0 \in \left[-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\right]$ область значений функции $f_{y_0}(x) \equiv f(x, y_0)$ — это отрезок $\left[y_0, y_0 + \sqrt{\dfrac{12 - y_0^2}{2}}\right]$. Этот отрезок можно рассматривать как проекцию вертикального отрезка, который образуется от пересечения графиков функций $z = y$ и $z = F(y)$ с вертикальной прямой $y = y_0$, на ось ординат (см. Рисунок 9). Поэтому область значений функции $f(x, y)$ — это проекция графика функции $z = F(y)$ на ось ординат, т.е. это отрезок $\left[-2\sqrt{3}, 3\sqrt{2}\right]$.

Подобным же образом можно найти и область значений функции $g(x, y)$. Для этого нужно исследовать функцию $G(y) = y - \sqrt{\dfrac{12 - y^2}{2}}$. Стандартная схема исследования функции даёт следующий результат: $G(y)$ убывает на отрезке $-2\sqrt{3} \le y \le -2\sqrt{2}$ от $G\left(-2\sqrt{3}\right) = -2\sqrt{3}$ до $G\left(-2\sqrt{2}\right) = -3\sqrt{2}$ и возрастает на отрезке $-2\sqrt{2} \le y \le 2\sqrt{3}$ от $G\left(-2\sqrt{2}\right) = -3\sqrt{2}$ до $G\left(2\sqrt{3}\right) = 2\sqrt{3}$. Поэтому область значений функции $g(x, y)$ — это отрезок $\left[-3\sqrt{2}, 2\sqrt{3}\right]$.

Объединение отрезков $\left[-2\sqrt{3}, 3\sqrt{2}\right]$ и $\left[-3\sqrt{2}, 2\sqrt{3}\right]$ даёт то же ответ, что и первый способ решения — отрезок $\left[-3\sqrt{2}, 3\sqrt{2}\right]$.

ДВИ-2015, вариант 151

Задача 1. Найдите $f(2)$, если $f(x)=\frac{x}{5}+\frac{3}{x}+\frac{1}{10}$.

Решение. Подставляя в формулу, задающую функцию $f(x)$, вместо x число 2, мы получим:

$$f(2)=\frac{2}{5}+\frac{3}{2}+\frac{1}{10}= {}^{2/}\frac{2}{5}+{}^{5/}\frac{3}{2}+\frac{1}{10}=\frac{4}{10}+\frac{15}{10}+\frac{1}{10}=\frac{4+15+1}{10}=\frac{20}{10}=2.$$

Ответ: 2.

Задача 2. Найдите сумму квадратов корней уравнения $x^2-7x+5=0$.

Решение. Прежде всего выясним, имеет ли данное нам уравнение корни, а если имеет, то сколько. С этой целью вычислим его дискриминант D:

$$D=(-7)^2-4\cdot 1\cdot 5=49-20=29.$$

Поскольку дискриминант положителен, уравнение имеет два корня:

$$x_1=\frac{7+\sqrt{29}}{2},\quad x_2=\frac{7-\sqrt{29}}{2}.$$

Сумма квадратов этих корней есть

$$x_1^2+x_2^2=\left(\frac{7+\sqrt{29}}{2}\right)^2+\left(\frac{7-\sqrt{29}}{2}\right)^2=\frac{49+14\sqrt{29}+29}{4}+\frac{49-14\sqrt{29}+29}{4}=39.$$

Эту сумму можно находить и с помощью теоремы Виета, которая утверждает, что, *если* квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет два корня (возможно совпадающих), то их сумма и произведение равны $-b/a$ и c/a соответственно. Чтобы применить теорему Виета для вычисления суммы квадратов корней, необходимо сумму квадратов, $x_1^2+x_2^2$, выразить через сумму корней и их произведение. Сделать это можно с помощью тождества $x_1^2+x_2^2=\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2$. В нашем случае этот подход даёт:

$$x_1^2+x_2^2=\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2=7^2-2\cdot 5=49-10=39.$$

Ответ: 39.

Замечание. Из формулировки задачи можно заключить, что уравнение имеет корни и сразу переходить к вычислению суммы их квадратов с помощью теоремы Виета. Однако при такой интерпретации условия остаётся неясным, сколько же корней имеет уравнение, один или два. Если уравнение имеет один корень, x_0, то «сумма квадратов корней» – это просто квадрат этого корня, т.е. число x_0^2. Теорема Виета в этой ситуации предполагает, что уравнение имеет не один, а «два совпадающих корня»: $x_1 = x_0, x_2 = x_0$ (довольно нелепая формулировка при буквальной интерпретации) и соответственно для «суммы квадратов корней» даёт значение $2x_0^2$.

Задача 3. Решите неравенство $\cos x + \sqrt{2}\cos 2x - \sin x \geq 0$.

Решение. Применяя формулу $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ сделаем так, чтобы в наше неравенство входили тригонометрические функции одного аргумента:

$$\cos x + \sqrt{2}\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) - \sin x \geq 0.$$

Перегруппируем члены:

$$\left(\cos x - \sin x\right) + \sqrt{2}\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) \geq 0,$$

разложим на множители выражение $\cos^2 x - \sin^2 x$:

$$\left(\cos x - \sin x\right) + \sqrt{2}\left(\cos x - \sin x\right)\left(\cos x + \sin x\right) \geq 0$$

и вынесем за скобку общий множитель $\left(\cos x - \sin x\right)$:

$$\left(\cos x - \sin x\right)\left(1 + \sqrt{2}\left(\cos x + \sin x\right)\right) \geq 0.$$

Выражения $\cos x - \sin x$ и $\cos x + \sin x$ преобразуем с помощью дополнительного аргумента в синус и косинус соответственно:

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x - \sin\frac{\pi}{4}\sin x\right) = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

$$\cos x + \sin x = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right) = \sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos x + \cos\frac{\pi}{4}\sin x\right) = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right),$$

Теперь исходное неравенство примет вид:

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\cdot\left(\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}\right) \geq 0.$$

Для упрощения записей удобно ввести новую неизвестную $t = x + \frac{\pi}{4}$. Это даст неравенство $\cos t \cdot \left(\sin t + \frac{1}{2} \right) \geq 0$, которое распадается на две системы:

$$\begin{cases} \cos t \geq 0 \\ \sin t \geq -\frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos t \leq 0 \\ \sin t \leq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Из тригонометрической окружности ясно, что множество решений первой системы задаётся соотношением $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq t \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, а второй — соотношением $\frac{7\pi}{6} + 2\pi n \leq t \leq \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Поскольку $x = t - \frac{\pi}{4}$, отсюда немедленно следует ответ.

Ответ: $\left[-\frac{5\pi}{12} + 2\pi n, \ \frac{\pi}{4} + 2\pi n \right] \cup \left[\frac{11\pi}{12} + 2\pi n, \ \frac{5\pi}{4} + 2\pi n \right], \ n \in \mathbb{Z}.$

Задача 4. Решите уравнение $\log_x \left| 2x^2 - 3 \right| = 4 \log_{\left| 2x^2 - 3 \right|} x$.

Решение. Прежде всего перейдём во всех логарифмах к одному основанию, например, 10:

$$\frac{\lg \left| 2x^2 - 3 \right|}{\lg x} = 4 \frac{\lg x}{\lg \left| 2x^2 - 3 \right|} ,$$

после чего избавимся от дробей:

$$\lg^2 \left| 2x^2 - 3 \right| = 4 \lg^2 x .$$

Последнее уравнение имеет вид $A^2 = B^2$. Поэтому оно распадается на два уравнения: $\lg \left| 2x^2 - 3 \right| = 2 \lg x$ и $\lg \left| 2x^2 - 3 \right| = -2 \lg x$.

Первое уравнение влечёт, что $\lg \left| 2x^2 - 3 \right| = \lg \left(x^2 \right)$, откуда в свою очередь следует, что $\left| 2x^2 - 3 \right| = x^2$. Известно, что уравнение вида $|A| = B$, где $B \geq 0$, равносильно совокупности двух уравнений $A = B$, $A = -B$. Поэтому уравнение $\left| 2x^2 - 3 \right| = x^2$ равносильно совокупности двух уравнений: $2x^2 - 3 = x^2$ и $2x^2 - 3 = -x^2$. Каждое из этих уравнений имеет по два корня; первое: $x = \pm\sqrt{3}$, второе: $x = \pm 1$.

Аналогично, уравнение $\lg\left|2x^2-3\right|=-2\lg x$ влечёт, что $\lg\left|2x^2-3\right|=\lg\frac{1}{x^2}$, откуда в свою очередь следует, что $\left|2x^2-3\right|=\frac{1}{x^2}$. Уравнение $\left|2x^2-3\right|=\frac{1}{x^2}$ равносильно совокупности двух уравнений: $2x^2-3=\frac{1}{x^2}$ и $2x^2-3=-\frac{1}{x^2}$, которые приводятся к биквадратным уравнениям $2x^4-3x^2-1=0$ и $2x^4-3x^2+1=0$ соответственно. Первое из этих уравнений имеет два корня, $x=\pm\frac{\sqrt{3+\sqrt{17}}}{2}$, а второе — четыре, $x=\pm1$, $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Резюмируя, мы имеем следующие значения неизвестной:

$$x=\pm\sqrt{3},\quad x=\pm1,\quad x=\pm\frac{\sqrt{3+\sqrt{17}}}{2},\quad x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ещё раз подчеркнём следующее важное обстоятельство. Хотя выписанные выше значения неизвестной получены из исходного уравнения *законными* математическими преобразованиями *без* единой *ошибки*, на этом этапе решения мы не можем гарантировать, что найденные числа действительно являются корнями исходного уравнения. Дело в том, что проделанные преобразования, вообще говоря, не являются равносильными. Пока мы можем гарантировать только то, что, ***если*** *исходное уравнение имеет корни, то все они содержатся в приведённом списке*. Иначе говоря, искать корни нужно только среди этих «подозреваемых»; другие числа совершенно точно не являются корнями. Выяснить, какие из найденных значений неизвестной действительно корни исходного уравнения, а какие лишь «мусор», приобретённый в ходе (неравносильных) преобразований очень легко — нужно провести проверку. Вообще говоря, проверка должна быть полной, т.е. нужно каждое проверяемое значение неизвестной подставить в исходное уравнение и выяснить, получится истинное числовое равенство или нет. Но для логарифмических уравнений (только для них и нескольких других простых типов уравнений, например, дробно-рациональных) достаточно проверить, что исходное уравнение имеет смысл; это автоматически даст истинное числовое равенство. Иначе говоря, можно проверить, что «подозрительные» значения неизвестной входят в область допустимых значений уравнения, ОДЗ. Ещё раз подчеркнём, *случай логарифмических уравнений один из немногих, где понятие ОДЗ оправдано; вообще говоря, понятие ОДЗ совершенно бесполезно при решении уравнений и неравенств, а иногда и просто вредно, т.к. иногда его тяжело найти, а бездумное его применение может привести к ошибочному ответу*.

В нашем случае ОДЗ задаётся следующим набором условий:

$$x>0,\, x\neq1,\, \left|2x^2-3\right|>0,\, \left|2x^2-3\right|\neq1.$$

Нетрудно показать, что этот набор условий сводится к следующим требованиям:

$$x > 0,\ \ x \neq \sqrt{2}, \sqrt{\frac{3}{2}}, 1\,.$$

Из списка

$$x = \pm\sqrt{3}, \qquad x = \pm 1, \qquad x = \pm\frac{\sqrt{3+\sqrt{17}}}{2}, \qquad x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

этим требованиям удовлетворяют лишь числа $\sqrt{3}, \dfrac{\sqrt{3+\sqrt{17}}}{2}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Ответ: $\left\{\sqrt{3}, \dfrac{\sqrt{3+\sqrt{17}}}{2}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right\}$.

Замечание 1. Предложенное нам уравнение можно решать и равносильными преобразованиями, которые в результате сразу дают ответ, без всякой проверки (на самом деле проверка остаётся, только в ослабленном виде). Можно рассуждать, например, так (модифицируя уже проведённые рассуждения).

Переход в исходном уравнении к основанию 10 является равносильным преобразованием, т.е.

$$\log_x\left|2x^2-3\right| = 4\log_{\left|2x^2-3\right|} x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\lg\left|2x^2-3\right|}{\lg x} = 4\frac{\lg x}{\lg\left|2x^2-3\right|}\,.$$

Если в дробно-рациональном уравнении мы избавляемся от знаменателей, то для равносильности необходимо сохранить условие, которое гарантирует, что знаменатели отличны от 0. В результате мы получим систему, которая равносильна исходному уравнению:

$$\begin{cases} \lg^2\left|2x^2-3\right| = 4\lg^2 x \\ \lg x \neq 0 \\ \lg\left|2x^2-3\right| \neq 0 \end{cases}$$

В этой системе неравенство $\lg\left|2x^2-3\right| \neq 0$ вытекает из неравенства $\lg x \neq 0$ и равенства $\lg^2\left|2x^2-3\right| = 4\lg^2 x$. Поэтому неравенство $\lg\left|2x^2-3\right| \neq 0$ можно опустить. Далее, неравенство $\lg x \neq 0$ равносильно тому, что $x \neq 1, x > 0$, а уравнение $\lg^2\left|2x^2-3\right| = 4\lg^2 x$ равносильно совокупности двух уравнений: $\lg\left|2x^2-3\right| = 2\lg x$ и $\lg\left|2x^2-3\right| = -2\lg x$. Резюмируя, мы имеем совокупность из двух систем:

$$\begin{cases} \lg\left|2x^2-3\right| = 2\lg x \\ x > 0, x \neq 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lg\left|2x^2-3\right| = -2\lg x \\ x > 0, x \neq 1 \end{cases}$$

Следует отметить, что в этих системах неравенство $x>0$ можно было бы и опустить, т.к. оно вытекает из самого факта наличия $\lg x$ в уравнениях систем («всё, что написано – существует!»). Но на следующем шаге преобразований, когда мы заменим $2\lg x$ и $-2\lg x$ на $\lg x^2$ и $\lg\frac{1}{x^2}$, условие $x>0$ всё равно появится, так что убирать его не имеет смысла. Итак, далее мы имеем:

$$\begin{cases}\lg\left|2x^2-3\right|=\lg x^2\\ x>0,\, x\neq 1\end{cases}\qquad \begin{cases}\lg\left|2x^2-3\right|=\lg\dfrac{1}{x^2}\\ x>0,\, x\neq 1\end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases}\left|2x^2-3\right|=x^2\\ x>0,\, x\neq 1\end{cases}\qquad \begin{cases}\left|2x^2-3\right|=\dfrac{1}{x^2}\\ x>0,\, x\neq 1\end{cases}$$

Освобождаясь от модулей, мы уравнения каждой из этих систем превратим в совокупность двух уравнений. Соответственно, в результате мы получим совокупность из четырёх систем:

$$\begin{cases}2x^2-3=x^2\\ x>0,\, x\neq 1\end{cases}\quad \begin{cases}2x^2-3=-x^2\\ x>0,\, x\neq 1\end{cases}\quad \begin{cases}2x^2-3=\dfrac{1}{x^2}\\ x>0,\, x\neq 1\end{cases}\quad \begin{cases}2x^2-3=-\dfrac{1}{x^2}\\ x>0,\, x\neq 1\end{cases}$$

Условие $x>0$ гарантирует равносильность при переходе в двух последних системах от дробно-рациональных уравнений к целым:

$$\begin{cases}2x^2-3=x^2\\ x>0,\, x\neq 1\end{cases}\quad \begin{cases}2x^2-3=-x^2\\ x>0,\, x\neq 1\end{cases}\quad \begin{cases}2x^4-3x^2-1=0\\ x>0,\, x\neq 1\end{cases}\quad \begin{cases}2x^4-3x^2+1=0\\ x>0,\, x\neq 1\end{cases}$$

Первая система имеет единственное решение $x=\sqrt{3}$, вторая — не имеет решений, третья имеет единственное решение $x=\dfrac{\sqrt{3+\sqrt{17}}}{2}$, четвёртая — единственное решение $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Объединяя множества решений этих четырёх систем, мы получим тот же ответ, что и при первом методе решения.

В условиях экзамена для рассматриваемой задачи второй метод решения (равносильными преобразованиями) вряд ли оправдан. Вы потратите много времени анализируя равносильность каждого шага и можете допустить ошибку. Первый метод (получать уравнения-следствия, а затем сделать проверку) гораздо разумнее.

Замечание 2. Хотя логика описанных методов решения не требует проверки того, что числа $\sqrt{3}, \dfrac{\sqrt{3+\sqrt{17}}}{2}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ действительно являются корнями исходного уравнения, на экзамене полезно провести «психологическую» проверку («а вдруг я случайно где-то ошибся!»), т.е. подставить эти числа в исходное уравнение и убедиться, что в результате получится истинное числовое равенство. Сделать это совсем несложно. Например, подстановка в исходное уравнение $x=\sqrt{3}$ даёт:

$$\log_{\sqrt{3}}|2\cdot 3-3| = 4\log_{|2\cdot 3-3|}\sqrt{3} \Leftrightarrow \log_{\sqrt{3}} 3 = 4\log_3\sqrt{3} \Leftrightarrow 2 = 4\cdot\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2=2,$$

т.е. истинное числовое равенство.

Задача 5. Окружность радиуса $3/2$ касается середины стороны BC треугольника ABC и пересекает сторону AB в точках D и E так, что $AD:DE:EB = 1:2:1$. Чему может равняться AC, если $\angle BAC = 30^\circ$?

Решение. На Рисунке 1 мы изобразили конфигурацию, о которой идёт речь в задаче.

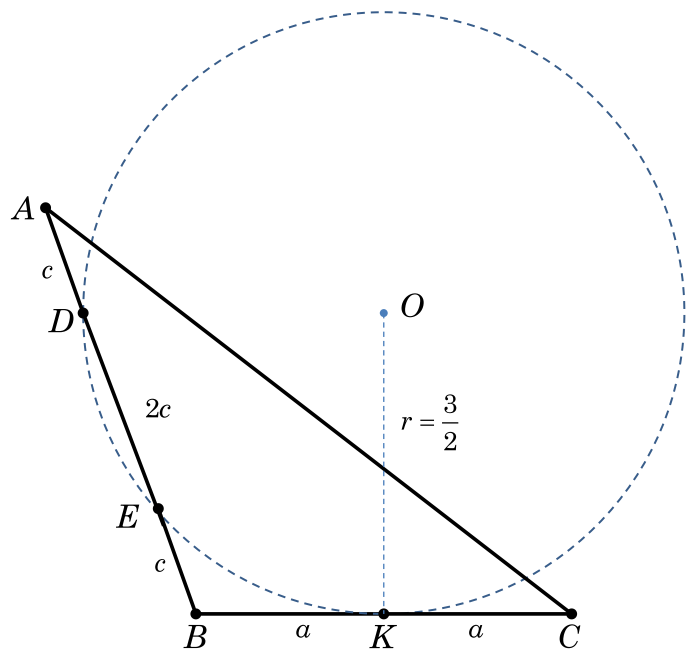

Рисунок 1

На этом рисунке: O – центр окружности, $r=3/2$ — её радиус, K – точка касания окружности и прямой BC (так что OK – радиус окружности, проведённый в точку касания и потому $OK \perp BC$), a – половина длины отрезка BC (так что

$BK = KC = a$), c – четверть длины отрезка AB (так что $AD = c$, $DE = 2c$, $BE = c$).

Опустим перпендикуляр OL из центра окружности на хорду DE. Он разделит эту хорду пополам, т.е. $DL = LE = c$ (см. Рисунок 2). Тогда $BL = LA = 2c$, т.е. LO является серединным перпендикуляром к стороне BC треугольника ABC. Радиус KO, как нетрудно видеть, будет серединным перпендикуляром к стороне BC. Известно, что точка пересечения серединных перпендикуляров к двум сторонам треугольника является центром окружности, описанной вокруг этого треугольника. В нашем случае прямые LO и KO пересекаются в точке O. Таким образом, центр O окружности о которой идёт речь в условии задачи, одновременно будет и центром окружности, описанной вокруг треугольника ABC, и если R — её радиус, то $OA = OB = OC = R$.

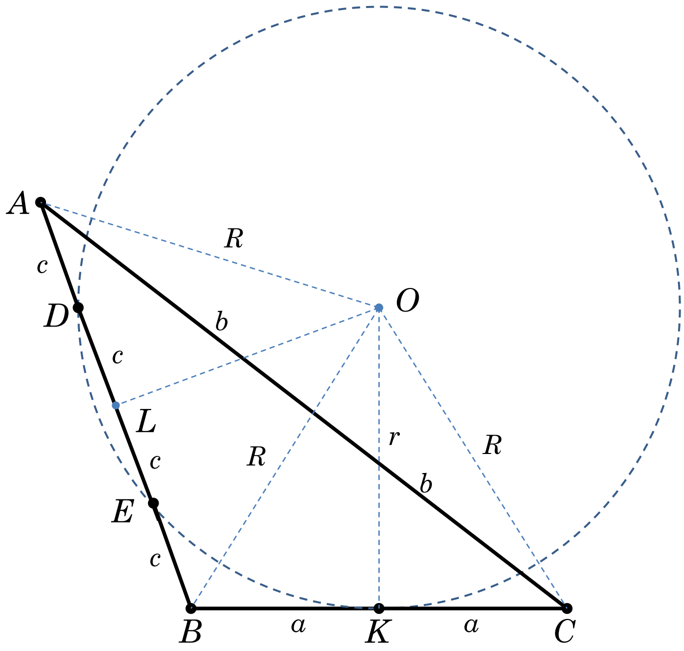

Рисунок 2

Теорема синусов для треугольника ABC даёт:

$$\frac{2a}{\sin 30^\circ} = 2R \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{R}{2}.$$

Последнее равенство означает, что в прямоугольном треугольнике BOK катет BK равен половине гипотенузы BO. Поэтому угол BOK равен 30°. Поскольку в треугольнике BOK нам известен второй катет, $OK = r = 3/2$, мы можем найти R и a: $R = BO = \dfrac{OK}{\cos 30^\circ} = \dfrac{3/2}{\sqrt{3}/2} = \sqrt{3}$, $a = \dfrac{R}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Далее, теорема о касательной и секущей, которые проведены к окружности из одной точки, даёт: $BK^2 = BE \cdot BD \Leftrightarrow a^2 = 3c^2$. Поскольку $a = \sqrt{3}/2$, отсюда мы находим c: $c = 1/2$.

Теперь в треугольнике ABC мы знаем две стороны, $BC = 2a = \sqrt{3}$ и $AB = 4c = 2$, и угол, $\angle BAC = 30^\circ$. Длину x третьей стороны, AC, мы можем найти, если напишем теорему косинусов относительно стороны BC:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos\angle BAC.$$

Поставляя известные значения, мы получим квадратное уравнение относительно $x = AC$: $x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 = 0$. Это уравнение имеет два корня: $x_1 = \sqrt{3} + \sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{3} - \sqrt{2}$.

Ответ: $\sqrt{3} \pm \sqrt{2}$.

Замечание. Строго говоря, решение будет неполным, если мы не выясним, существует ли конфигурация, описанная в условии задачи, в которой длина стороны AC равна $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ или $\sqrt{3} - \sqrt{2}$. Мы сейчас покажем, что такая конфигурация существует как для $AC = \sqrt{3} + \sqrt{2}$, так и для $AC = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ — мы просто её построим, используя дополнительные факты, установленные в ходе решения.

Возьмём отрезок $AB = 2$ и разделим его на четыре равные части точками D, L, E (в направлении от A к B). Из точки L построим перпендикуляр $LO = \sqrt{2}$. Тогда $OE = OD = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(1/2\right)^2} = \dfrac{3}{2}$, $OB = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$.

Теперь построим отрезок $BC = \sqrt{3}$ так, чтобы угол OBC был равен 60°. Сделать это можно двумя способами: в первом случае точки O и C лежат по одну сторону от прямой AB, во втором – по разные. Но в каждом случае треугольник OBC, очевидно, будет равносторонним с высотой $OK = 3/2$, которая к тому же является и медианой.

Соединив точки C и A мы получим треугольник ABC. Поскольку расстояния OE, OD, OK равны $3/2$, окружность радиуса $r = 3/2$ с центром в точке O пройдёт через точки E, D, K. Более того, так как $OK \perp BC$, окружность будет касаться отрезка BC в точке K (который является серединой BC). Отрезок AB пересечёт окружность в точках E и D, причём $AD : DE : EB = \dfrac{1}{2} : 1 : \dfrac{1}{2} = 1 : 2 : 1$.

Пусть α — величина угла ABO. Тогда $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$. В первом случае расположения точки C угол ABC равен $60^\circ + \alpha$, во втором случае этот угол равен $60^\circ - \alpha$. Для косинуса угла ABC мы имеем:

$$\cos\angle ABC = \cos\left(60^\circ \pm \alpha\right) = \cos 60^\circ \cos\alpha \mp \sin 60^\circ \sin\alpha = \frac{1 \mp \sqrt{6}}{2\sqrt{3}}.$$

Поэтому квадрат стороны AC равен

$$AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos\angle ABC = 4 + 3 - 4\sqrt{3} \cdot \frac{1 \mp \sqrt{6}}{2\sqrt{3}} = 5 \pm 2\sqrt{6} = \left(\sqrt{3} \pm \sqrt{2}\right)^2.$$

Итак, в первом случае расположения точки C сторона AC равна $\sqrt{3} + \sqrt{2}$, во втором — $AC = \sqrt{3} - \sqrt{2}$.

Осталось проверить, что в обоих случаях угол BAC равен 30°. Для этого подсчитаем его косинус с помощью теоремы косинусов:

$$\cos\angle BAC = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{6 \pm 2\sqrt{6}}{4 \cdot \left(\sqrt{3} \pm \sqrt{2}\right)} = \frac{2\sqrt{3}\left(\sqrt{3} \pm \sqrt{2}\right)}{4 \cdot \left(\sqrt{3} \pm \sqrt{2}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Поскольку на промежутке $\left[0{,}180^\circ\right]$ косинус является взаимно-однозначной функцией, отсюда следует, что $\angle BAC = 30^\circ$.

Задача 6. Велосипедист Василий выехал из пункта А в пункт Б. Проехав треть пути, Василий наткнулся на выбоину, вследствие чего велосипед безнадёжно вышел из строя. Не теряя времени, Василий бросил сломавшийся велосипед и пошёл пешком обратно в пункт А за новым велосипедом. В момент поломки из пункта А выехал мотоциклист Григорий. На каком расстоянии от пункта А он встретит Василия, если пункт Б отстоит от пункта А на 4 км, а Василий доберётся до пункта А тогда же, когда Григорий до пункта Б? Скорости велосипеда, мотоцикла и пешехода считать постоянными.

Решение. Пусть С — точка, в которой Василий наткнулся на выбоину и сломал велосипед. По условию расстояние АС (по дороге) равно $4/3$ км. Если $\upsilon_{\text{п}}$ – скорость пешехода (измеренная в км/час), то после поломки Василий (пешком) доберётся до пункта А через $\frac{4}{3\upsilon_{\text{п}}}$ часов. Если $\upsilon_{\text{м}}$ – скорость мотоциклиста (км/час), то Григорий доберётся до пункта Б через $\frac{4}{\upsilon_{\text{м}}}$ часов. Поскольку Григорий выехал из пункта А тогда же, когда Василий после поломки велосипеда пешком отправился из

В обратно в А, а добрались они до мест назначения одновременно, верно равенство $\frac{4}{3v_{\text{п}}}=\frac{4}{v_{\text{м}}}$. Из него мы имеем: $v_{\text{м}}=3v_{\text{п}}$.

Теперь проанализируем факт встречи Василия и Григория. Пусть В – точка, в которой Василий встретил Григория, а $s=\mathrm{AB}$ – искомое расстояние от места встречи до пункта А (по дороге). После того, как Василий отправился обратно в А, до места встречи он прошёл расстояние $\left(\frac{4}{3}-s\right)$ км и, следовательно, потратил на дорогу от С до В время $t_{\text{Василий}}=\frac{4-3s}{3v_{\text{п}}}$ (часов). Григорий до места встречи проехал расстояние s (км) и, следовательно, потратил на дорогу от А до В время $t_{\text{Григорий}}=\frac{s}{v_{\text{м}}}=\frac{s}{3v_{\text{п}}}$ (часов). Поскольку Григорий выехал из пункта А тогда же, когда Василий после поломки велосипеда пешком отправился из В обратно в А, до места встречи они добрались одно и то же время $t_{\text{В}}$, т.е. $t_{\text{Василий}}=t_{\text{Григорий}}=t_{\text{В}}$. Используя полученные выше формулы, мы можем переписать это равенство в виде $\frac{s}{3v_{\text{п}}}=\frac{4-3s}{3v_{\text{п}}}\Leftrightarrow s=4-3s\Leftrightarrow 4s=4\Leftrightarrow s=1$.

Ответ: 1 км.

Замечание. Короткое и изящное решение получится, если применить графический метод. Введём на дороге из А в Б координаты, взяв пункт А в качестве начала координат, а направление от А к Б в качестве положительного. Тогда точка А имеет координату 0, точка Б – координату 4, точка С (место поломки) – координату $4/3$, точка В (место встречи) – координату s (s – искомое расстояние от места встречи до А).

Если в качестве начального момента времени взять момент, когда Василий после поломки велосипеда из пункта С пешком пошёл обратно в пункт А, а Григорий на мотоцикле выехал из пункта А в пункт Б, то до момента прибытия Василия в А закон его движения даётся формулой: $x_{\text{Василий}}(t)=\frac{4}{3}-v_{\text{п}}t$. В двумерной системе координат (t,x) этот закон представляется отрезком СА прямой линии, которая проходит через точку $C\left(0,\frac{4}{3}\right)$ и угловой коэффициент которой равен $-v_{\text{п}}$ (см. Рисунок 3, где этот отрезок изображён синим); угловой коэффициент отрицателен, т.к. Василий идёт в отрицательном направлении (от Б к А). Точка A, в которой эта прямая пересекает ось абсцисс, соответствует прибытию Василия в пункт А.

Закон движения Григория до момента его прибытия в Б даётся формулой: $x_{\text{Григорий}}(t)=v_{\text{м}}t$. На Рисунке 3 он представляется отрезком ОБ (красного цвета) прямой линии, которая проходит через начало координат О и угловой коэффициент которой равен $v_м$. Так как скорость мотоциклиста больше скорости пешехода, этот отрезок идёт круче отрезка СА. Начало координат соответствует началу движения в момент $t = 0$ из точки А, конечная точка отрезка ОБ, точка Б, ордината которой равна 4, соответствует прибытию Григория в пункт Б. Поскольку Василий и Григорий прибыли в пункты назначения (А для Василия и Б для Григория) одновременно, точки А и Б лежат на одной вертикали (иначе говоря, они имеют равные абсциссы).

Факт встречи Василия и Григория в какой-то момент времени означает равенство их координат в этот момент. Поэтому их встрече в пункте В в момент $t_В$ соответствует пересечение отрезков СА и ОБ в точке В с координатами $(t_В, s)$.

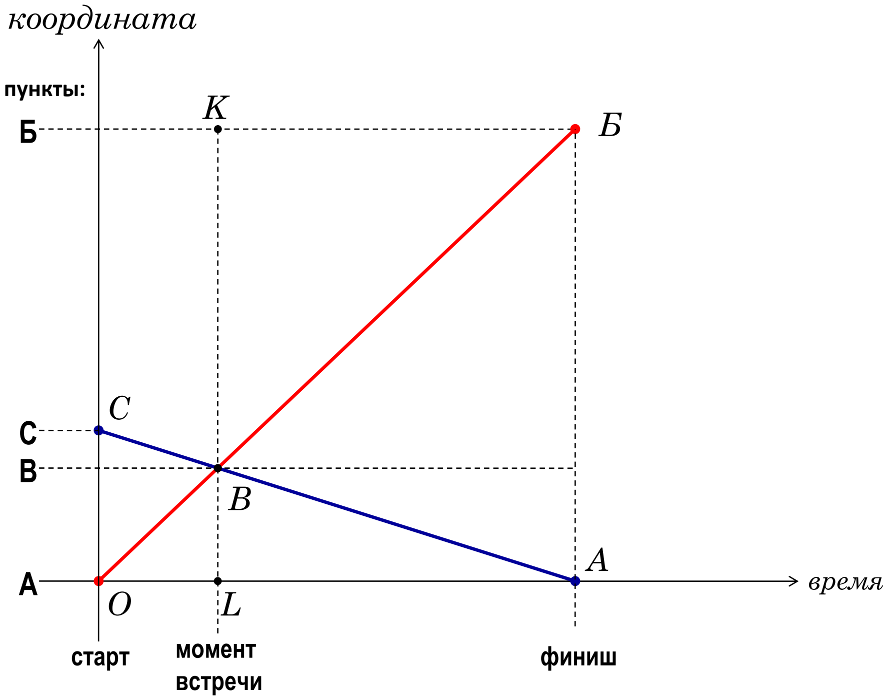

Рисунок 3

Рассмотрим треугольники OCB и $БAB$. Они подобны по трём углам, причём коэффициент подобия равен 3 (т.к. основание OC треугольника OCB равно $4/3$, а основание $БA$ треугольника $БAB$ равно 4). В треугольнике OCB проекция стороны OB на основание OC равна s, а соответствующая ей в треугольника $БAB$ проекция стороны $BБ$ на основание $БA$ равна $4 - s$. Подобие треугольников даёт равенство: $4 - s = 3s$, откуда мы сразу находим искомое расстояние s.

Задача 7. В правильную треугольную призму с основаниями ABC, $A'B'C'$ и рёбрами AA', BB', CC' вписана сфера. Найдите её радиус, если известно, что расстояние между прямыми AE и BD равно $\sqrt{13}$, где E и D — точки, лежащие на $A'B'$ и $B'C'$ соответственно, и $A'E : EB' = B'D : DC' = 1:2$.

Решение. Пусть a – длина стороны основания, h – высота призмы, R – радиус сферы. Если O – центр сферы, K и K' – точки касания сферы с нижним и верхним основаниями соответственно, то прямые OK и OK' перпендикулярны нижнему и верхнему основаниям соответственно. Поскольку основания параллельны, параллельны и прямые OK и OK'. Но эти прямые имеют общую точку, точку O. Значит, эти прямые совпадают. Иначе говоря, отрезок KK' является высотой призмы, а точка O делит его пополам. Отсюда следует, что $h=2R$.

Далее, ясно, что центр сферы и точки её касания с боковыми гранями лежат в одной плоскости, которая параллельна основаниям. Сечение этой плоскостью даёт равносторонний треугольник со стороной a, в который вписана окружность радиуса R. Поэтому $a=2\sqrt{3}R$.

Таким образом, условие, что в призму можно вписать сферу – это просто способ охарактеризовать анализируемую конфигурацию одним параметром R.

Теперь приступим непосредственно к решению нашей задачи (см. Рисунок 4).

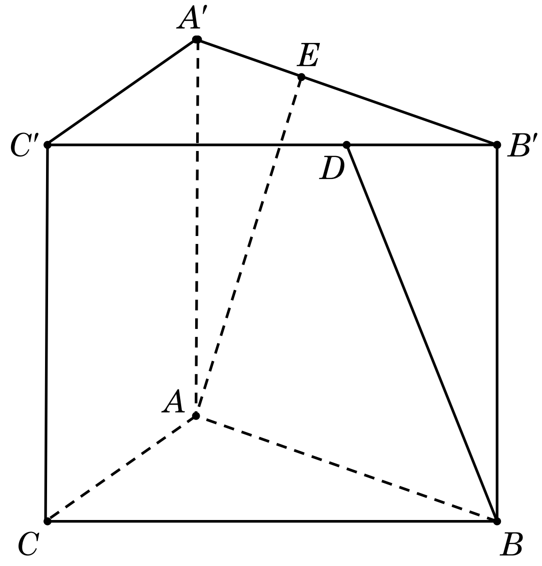

Рисунок 4

Чтобы найти расстояние между скрещивающимися прямыми a и b, прежде всего нужно провести через одну из прямых, например, через прямую b, плоскость, параллельную другой (в рассматриваемом случае прямой a). Для этого можно через какую-то точку X прямой b провести прямую a^*, параллельную прямой a. Плоскость π, проведённая через пересекающиеся прямые a^* и b, параллельна прямой a, так как эта плоскость содержит прямую (прямую a^*), параллельную прямой a.

В нашем случае можно взять в качестве прямой a прямую AE, в качестве прямой b — прямую BD, в качестве точки X — точку D. Прямую, параллельную прямой AE и проходящую через точку D, можно получить с помощью параллельного переноса точек пространства на вектор $\overrightarrow{ED}$. При этом преобразовании точка E, очевидно, перейдёт в точку D (см. Рисунок 5, где для удобства рассуждений треугольник $A'B'C'$ разбит на части параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстояние $a/6$). Из треугольника DEB' по теореме косинусов мы имеем:

$$DE = \sqrt{\left(\frac{2a}{3}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{2a}{3} \cdot \frac{a}{3} \cdot \cos 60^\circ} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

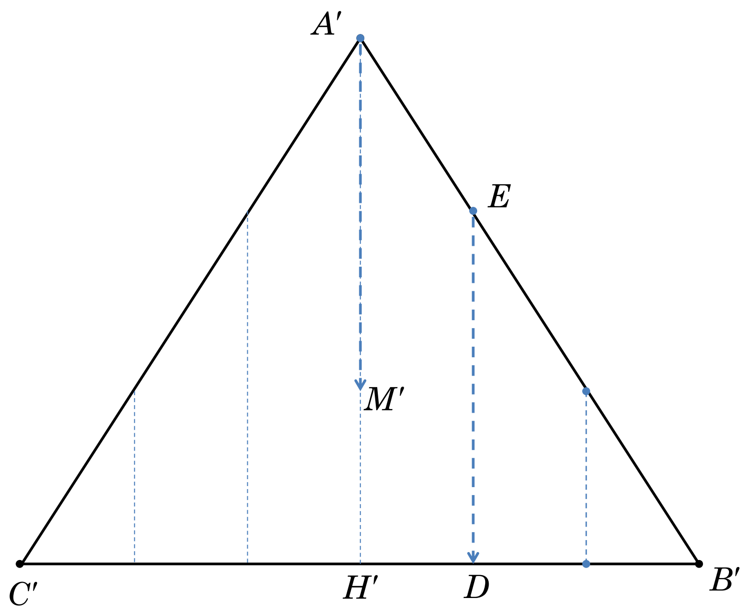

Рисунок 5

Гораздо интереснее и важнее понять, в какую точку перейдёт точка A. Эта точка, назовём её M, конечно, лежит в плоскости нижнего основания (поскольку вектор $\overrightarrow{ED}$ параллелен плоскостям оснований) и совпадает с проекцией образа M' точки A' при рассматриваемом параллельном переносе на нижнее основание. Вектор $\overrightarrow{ED}$ перпендикулярен стороне $C'B'$. Поэтому точка M' лежит на высоте $A'H'$, опущенной из точки A' на основание $C'B'$. Длина этой высоты равна $a\sqrt{3}/2$, так что $M'H' = a\sqrt{3}/6 = A'M'/2$. Иначе говоря, точка M' делит высоту в отношении 2:1 (считая от вершины A'). Значит, M' — центр треугольника $A'B'C'$ и, соответственно, M — центр треугольника ABC.

Таким образом, плоскость MDB (далее мы на неё будем ссылаться как на плоскость π) содержит прямую BD и параллельна прямой AE. Поэтому расстояние между скрещивающимися прямыми AE и BD — это расстояние от любой точки P

прямой AE до плоскости π. Найдём это расстояние. Перед этим отметим, что сечение призмы плоскостью π — это трапеция $SRDB$, где S — основание перпендикуляра BS, опущенного из точки B на сторону AC нижнего основания, R — основание перпендикуляра $B'R$, опущенного из точки B' на сторону $A'C'$ верхнего основания (см. Рисунок 6). Ясно, что S — середина стороны AC. Нетрудно также установить, что $C'R = a/3$, т.е. точка R делит сторону $A'C'$ в отношении 2:1, считая от точки A'.

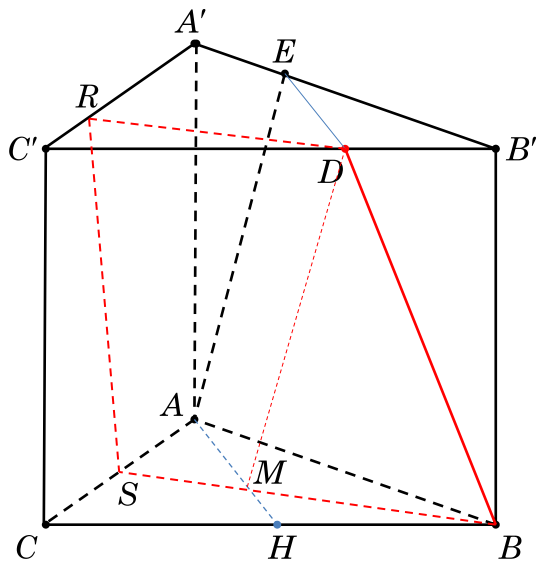

Рисунок 6

Прямая BS перпендикулярна боковой грани $CAA'C'$. Поэтому эта прямая перпендикулярна прямым AC и RS. Это означает, что угол φ между плоскостью π и нижним основанием — это угол RSC (см. Рисунок 7).

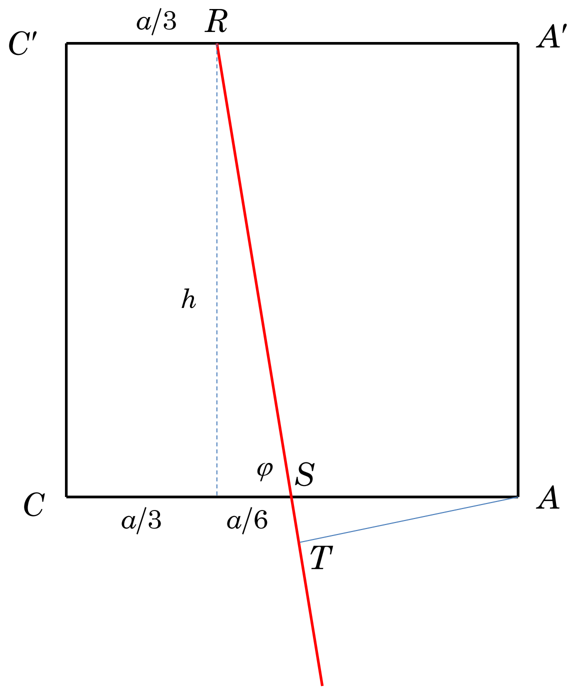

Рисунок 7

Тангенс этого угла равен $\dfrac{h}{a/6}=\dfrac{2R}{2\sqrt{3}R/6}=2\sqrt{3}$.

Ясно, кроме того, что расстояние от точки A до прямой RS (т.е. длина перпендикуляра AT, опущенного из точки A на прямую RS) — это расстояние между скрещивающимися прямыми AE и BD. Из прямоугольного треугольника ATS мы имеем:

$$AT=AS\cdot\sin\varphi=\frac{a}{2}\cdot\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}=\frac{2\sqrt{3}R}{2}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}=\frac{6}{\sqrt{13}}R.$$

По условию $AT=\sqrt{13}$. Поэтому $R=13/6$.

Ответ: 13/6.

Задача 8. Найдите все пары (α,β), при которых достигается минимум выражения

$$\frac{4-3\sin\alpha}{2+\cos\alpha}+\frac{2+\cos2\alpha}{\beta^2+\beta+1}+\frac{\beta^2+\beta+1}{\sqrt{\beta}+1}+\frac{\sqrt{\beta}+1}{4-3\sin\alpha}.$$

Решение. Для сокращения записей введём следующие обозначения:

$$a = 4 - 3\sin\alpha, \quad b = 2 + \cos 2\alpha, \quad c = \beta^2 + \beta + 1, \quad d = \sqrt{\beta} + 1.$$

Это позволит записать анализируемое выражение компактнее, как сумму

$$F = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a}.$$

Поскольку и $\sin\alpha$, и $\cos 2\alpha$ по абсолютной величине не превосходят 1, можно гарантировать положительность величин a и b. Величина d положительна как сумма числа 1 и арифметического квдратного корня. Кроме того, наличие вырадения $\sqrt{\beta}$ влечёт неотрицательность β, что, в свою очередь, влечёт неотрицательность величины c (впрочем, $c > 0$ как квадратный трёхчлен с положительным старшим коэффициентом и отрицательным дискриминантом). Таким образом, анализируемое выражение F является суммой чтырёх положительных числел. Неравенство, связывающее среднее арифметическое и среднее геометрическое четырёх неотрицательных чисел, позволяет заключить, что

$$F \geq 4 \cdot \sqrt[4]{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{d}{a}} \equiv 4.$$

Но отсюда, вообще говоря, не следует, что наименьшее значение нашего выражения F равно 4.

Если рассматривать F как функцию четырёх независимых положительных переменных a, b, c, d, то это утверждение будет верно, если существуют значения $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$ такие, что $F(a,b,c,d) = 4$. Чтобы разобраться с этой проблемой, вспомним заключительную часть теоремы о неравенстве, связывающем среднее арифметическое и среднее геометрическое четырёх неотрицательных чисел: знак равенства в этом неравенстве достигается тогда и только тогда, когда числа равны между собой. В нашем случае это означает, что $F(a,b,c,d) = 4$ тогда и только тогда, когда $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{a}$. Пусть k — общее значение этих дробей. Тогда $a = kb, \quad b = kc, \quad c = kd, \quad d = ka$. Перемножив эти равенства мы получим: $abcd = k^4 abcd$. Поскольку все фигурирующие здесь числа положительны, последнее соотношение влечёт, что $k = 1$, а тогда $a = b = c = d$. Обратно, если положительные числа a,b,c,d равны между собой, то $F(a,b,c,d) = 4$.

Итак, если F рассматривать как функцию четырёх независимых положительных переменных a,b,c,d, то её наименьшее значение равно 4 и достигается оно на бесконечном количестве четвёрок (a,b,c,d) вида (t,t,t,t), где $t > 0$.

Но у нас числа a,b,c,d не являются независимыми. Поэтому наименьшее значение исходного выражения как функции двух независимых переменных, $\alpha \in \mathbb{R}$ и $\beta \geq 0$, равно 4 тогда и только тогда, когда существуют числа $\alpha \in \mathbb{R}$ и $\beta \geq 0$, для которых верны равенства: $4-3\sin\alpha = 2+\cos 2\alpha = \beta^2+\beta+1 = \sqrt{\beta}+1$, т.е. когда имеет решение система

$$\begin{cases} 4-3\sin\alpha = 2+\cos 2\alpha \\ 4-3\sin\alpha = \sqrt{\beta}+1 \\ \beta^2+\beta+1 = \sqrt{\beta}+1 \end{cases}$$

(«тройное» равенство $a=b=c=d$ можно превращать в обычную систему трёх уравнений разными способами; мы выбрали наиболее удобный для последующих рассуждений).

С помощью формулы для косинуса двойного аргумента первое уравнение этой системы легко сводится к следующему квадратному уравнению относительно $\sin\alpha$: $2\sin^2\alpha-3\sin\alpha+1=0$, откуда $\sin\alpha = \dfrac{3\pm\sqrt{9-8}}{4} = 1; \dfrac{1}{2}$. Поэтому выражение $a = 4-3\sin\alpha$ может быть равно только 1 или $5/2$.

Соответственно, второе уравнение распадётся на два: $\sqrt{\beta}+1=1$, $\sqrt{\beta}+1=5/2$, так что $\beta=0$ или $\beta=9/4$. Простой подстановкой мы можем убедиться, что значение $\beta=0$ удовлетворяет третьему уравнению, а $\beta=9/4$ — нет.

Таким образом, наименьшее значение исходного выражения равно 4, причём достигается оно при $\sin\alpha=1$, т.е. при $\alpha=\pi/2+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$, и $\beta=0$.

Ответ: $(\alpha,\beta) = \left(\pi/2+2\pi n, 0\right), n\in\mathbb{Z}$.

ДВИ-2016, вариант 161

Задача 1. Найдите $f\left(\frac{2}{7}\right)$, если $f(x)=\frac{x}{1-x}+\frac{3}{7}$.

Решение. При $x=\frac{2}{7}$ выражение $\frac{x}{1-x}$ равно $\frac{\frac{2}{7}}{1-\frac{2}{7}}=\frac{2}{7}:\frac{5}{7}=\frac{2}{7}\cdot\frac{7}{5}=\frac{2}{5}$.

Поэтому $f\left(\frac{2}{7}\right)=\frac{2}{5}+\frac{3}{7}=\frac{2\cdot7+3\cdot5}{5\cdot7}=\frac{14+15}{35}=\frac{29}{35}$.

Ответ: $\frac{29}{35}$.

Задача 2. Разность между наибольшим и наименьшим корнями уравнения $x^2+ax-6=0$ равна 5. Найдите все возможные значения a.

Решение. Дискриминант квадратного уравнения $x^2+ax-6=0$ равен a^2+24. При всех значениях параметра a это выражение положительно. Поэтому рассматриваемое квадратное уравнение имеет два корня: $x_+=\frac{-a+\sqrt{a^2+24}}{2}$ и $x_-=\frac{-a-\sqrt{a^2+24}}{2}$. Ясно, что $x_+>x_-$. Поэтому разность между наибольшим и наименьшим корнями — это $x_+-x_-=\sqrt{a^2+24}$. Она равна 5 тогда и только тогда, когда параметр a удовлетворяет равенству $\sqrt{a^2+24}=5$. Это иррациональное уравнение легко решается возведением в квадрат (это преобразование, очевидно, равносильно): $a^2+24=25 \Leftrightarrow a^2=1 \Leftrightarrow a=\pm1$.

Ответ: $a=\pm1$.

Задача 3. Решите уравнение $2\cos^2 x+3\sin 2x=4+3\cos 2x$.

Решение. *Первый способ.* С помощью тождеств $\sin 2x=2\sin x\cos x$ и $\cos 2x=2\cos^2 x-1$ сделаем так, чтобы во всех тригонометрических функциях был один и тот же аргумент:

$$2\cos^2 x+6\sin x\cos x=4+6\cos^2 x-3 \Leftrightarrow -4\cos^2 x+6\sin x\cos x=1.$$

Заменяя число 1 в првой части последнего уравнения на $\sin^2 x+\cos^2 x$, мы получим однородное уравнение второй степени относительно $\sin x$ и $\cos x$:

$$\sin^2 x - 6\sin x\cos x + 5\cos^2 x = 0.$$

Если допустить, что $\cos x = 0$, то уравнение влечёт равенство 0 и $\sin x$. Однако, $\sin x$ и $\cos x$ не могут быть одновременно равны 0 (например, в силу основного тригонометрического тождества). Итак, уравнение влечёт, что $\cos x \neq 0$. Поэтому его можно разделить на $\cos^2 x$, что даст уравнение $\operatorname{tg}^2 x - 6\operatorname{tg} x + 5 = 0$.

Замена $t = \operatorname{tg} x$ сводит дело к квадратному уравнению: $t^2 - 6t + 5 = 0$, которое имеет два корня: $t_1 = 1$, $t_2 = 5$. Возвращаясь к основной неизвестной x, мы получим совокупность из двух простейших тригонометрических уравнений: $\operatorname{tg} x = 1$ и $\operatorname{tg} x = 5$. Множество решений первого задаётся формулой $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$, а второго – формулой $x = \operatorname{arctg} 5 + \pi m,\ m \in \mathbb{Z}$.

Второй способ. Понизим степень выражения $2\cos^2 x$ за счёт удвоения аргумента: $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$. В результате уравнение примет вид: $3\sin 2x - 2\cos 2x = 3$. Чтобы его решить, как обычно, разделим его почленно на $\sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$:

$$\frac{3}{\sqrt{13}}\sin 2x - \frac{2}{\sqrt{13}}\cos 2x = \frac{3}{\sqrt{13}},$$

и введём новый аргумента φ как $\arcsin\dfrac{3}{\sqrt{13}}$ или, что равносильно, как $\arccos\dfrac{2}{\sqrt{13}}$ или $\operatorname{arctg}\dfrac{3}{2}$. В результате мы получим уравнение

$$\sin\varphi\sin 2x - \cos\varphi\cos 2x = \frac{3}{\sqrt{13}} \Leftrightarrow \cos(2x + \varphi) = -\frac{3}{\sqrt{13}}.$$

Множество его решений описыватся формулой $2x + \varphi = \pm\arccos\left(-\dfrac{3}{\sqrt{13}}\right) + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. С помощью тождеств $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$ и $\arcsin a + \arccos a = \dfrac{\pi}{2}$ эта формула может быть упрощена (ниже мы используем то, что $\varphi = \arcsin\dfrac{3}{\sqrt{13}}$):

$$2x + \varphi = \pm\left(\pi - \arccos\frac{3}{\sqrt{13}}\right) + 2\pi n \Leftrightarrow 2x = -\arcsin\frac{3}{\sqrt{13}} \pm \left(\frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{3}{\sqrt{13}}\right) + 2\pi n.$$

Рассматривая отдельно случаи «+» и «–» перед скобкой, мы получим две серии: $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n$ и $x = -\dfrac{\pi}{4} - \arcsin\dfrac{3}{\sqrt{13}} + \pi n = -\dfrac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}\dfrac{3}{2} + \pi n$.

Отметим, что серия $x=-\dfrac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\dfrac{3}{2}+\pi n$ совпадает с серией $x=\operatorname{arctg}5+\pi m$, если заменить $n-1$ на m и отметить, что $\dfrac{3\pi}{4}-\operatorname{arctg}\dfrac{3}{2}\equiv\dfrac{3\pi}{4}-\varphi$ совпадает с $\operatorname{arctg}5$. Действительно,

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4}-\varphi\right)=\frac{\operatorname{tg}\dfrac{3\pi}{4}-\operatorname{tg}\varphi}{1+\operatorname{tg}\dfrac{3\pi}{4}\cdot\operatorname{tg}\varphi}=\frac{-1-\operatorname{tg}\varphi}{1-\operatorname{tg}\varphi}=\frac{-1-\dfrac{3}{2}}{1-\dfrac{3}{2}}=5,$$

а неравенство $\dfrac{\sqrt{2}}{2}<\dfrac{3}{\sqrt{13}}<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ влечёт, что $\dfrac{\pi}{4}<\arcsin\dfrac{3}{\sqrt{13}}<\dfrac{\pi}{3}$ и, значит, $\dfrac{5\pi}{12}<\dfrac{3\pi}{4}-\varphi<\dfrac{\pi}{2}$.

Ответ: $\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ \ \operatorname{arctg}5+\pi m,\ \ n,m\in\mathbb{Z}.$

Задача 4. Решите неравенство $\log_{1-\log_3 x}\left(1+\log_x^2 3\right)\le 1$.

Решение. Заменим $\log_x 3$ на $1/\log_3 x$ и введём новую неизвестную $y=\log_3 x$. В результате мы получим неравенство без повторных логарифмов: $\log_{1-y}\left(1+1/y^2\right)\le 1$. Избавиться от логарифмов и решить это неравенство можно несколькими способами.

Первый способ (стандартный метод расщепления) – самый простой. Рассмотрим два случая: $0<1-y<1$ и $1-y>1$ (мы должны знать, больше или меньше 1 основание логарифма). Известно, что логарифмическая функция $f(z)=\log_a z$ определена на множестве $z>0$, при $z=a$ принимает значение 1 и

- монотонно убывает, если $0<a<1$, так что при $0<a<1$ неравенство $\log_a z\le 1$ равносильно неравенству $z\ge a$;
- монотонно возрастает, если $a>1$, так что при $a>1$ неравенство $\log_a z\le 1$ равносильно неравенству $0<z\le a$.

Поэтому неравенство $\log_{1-y}\left(1+1/y^2\right)\le 1$ распадается на две системы:

$$\begin{cases}1+1/y^2\ge 1-y\\ 0<1-y<1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1\ge -y^3\\ 0<y<1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y^3\ge -1\\ 0<y<1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y\ge -1\\ 0<y<1\end{cases}\Leftrightarrow 0<y<1.$$

и

$$\begin{cases}1+1/y^2\le 1-y\\ 1-y>1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1\le -y^3\\ y<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y^3\le -1\\ y<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y\le -1\\ y<0\end{cases}\Leftrightarrow y\le -1.$$

Второй способ – уже использовавшийся модифицированный метод интервалов. Чтобы его применить, перейдём к какому-нибудь числовому основанию, например, 10:

$$\frac{\lg\left(1+1/y^2\right)}{\lg(1-y)} \le 1$$

и перенесём все члены в левую часть:

$$\frac{\lg\left(1+1/y^2\right)}{\lg(1-y)} - 1 \le 0 \Leftrightarrow \frac{\lg\left(1+1/y^2\right) - \lg(1-y)}{\lg(1-y) - \lg 1} \le 0.$$

Знак выражения $\lg f - \lg g$ на множестве $f > 0, g > 0$ (где определены оба логарифма) совпадает со знаком выражения $f - g$. Поэтому последнее неравенство равносильно системе из трёх неравенств, $\dfrac{\left(1+1/y^2\right)-(1-y)}{(1-y)-1} \le 0$, $1+\dfrac{1}{y^2} > 0$, $1-y > 0$, которая сводится к системе:

$$\begin{cases} \dfrac{y^3+1}{y^3} \ge 0 \\ y < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(y+1)(y^2-y+1)}{y^3} \ge 0 \\ y < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \le -1,\ y > 0 \\ y < 1 \end{cases} \Leftrightarrow y \le -1, 0 < y < 1.$$

Возвращаясь к основной неизвестной x, мы получим совокупность из двух простых логарифмических неравенств: $0 < \log_3 x < 1$ и $\log_3 x \le -1$, которые легко решаются:

$$0 < \log_3 x < 1 \Leftrightarrow \log_3 1 < \log_3 x < \log_3 3 \Leftrightarrow 1 < x < 3,$$

$$\log_3 x \le -1 \Leftrightarrow \log_3 x \le \log_3 \frac{1}{3} \Leftrightarrow 0 < x \le \frac{1}{3}.$$

Ответ: $\left(0; \dfrac{1}{3}\right] \cup (1;3)$.

Задача 5. Две окружности касаются внутренним образом в точке T. Хорда AB внешней окружности касается внутренней окружности в точке S. Прямая TS пересекает внешнюю окружность в точках T и C. Найдите площадь четырёхугольника $TACB$, если известно, что $CB = TB = 3$, а радиусы окружностей относятся как $5:8$.

Решение. Конфигурация, о которой идёт речь в задаче, изображена на Рисунке 1. На этом рисунке l – общая касательная к окружностям (она проходит через точку T).

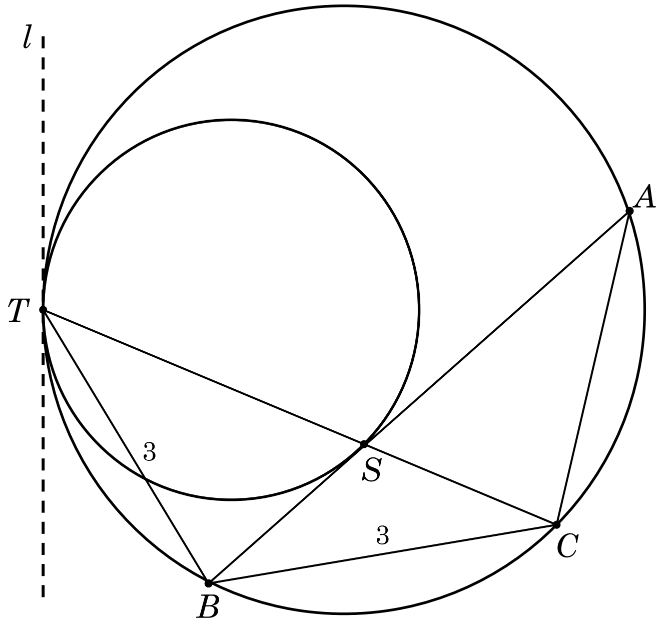

Рисунок 1

Чтобы разобраться в этой конфигурации, уберём внутреннюю окружность (см. Рисунок 2) и проанализируем конфигурацию только с внешней окружностью.

По условию хорды CB и TB равны. Значит, равны и стягиваемые ими дуги, дуга CB и дуга TB; пусть 2α – их градусная мера.

Углы TAB, TCB вписаны во внешнюю окружность, а градусная мера дуги TB, на которые они опираются, равна 2α. Значит эти углы равны α: $\angle TAB = \angle TCB = \alpha$.

Углы BAC, BTC также вписаны во внешнюю окружность, а градусная мера дуги BC, на которые они опираются, равна 2α. Значит эти углы тоже равны α: $\angle BAC = \angle BTC = \alpha$.

Во внешней окружности есть ещё один стандартный угол; это угол MTB между касательной l и хордой TC (здесь M – некоторая точка на нижней части прямой l). Такой угол, как известно, измеряется половиной дуги, заключённой внутри него, т.е. половиной дуги TB. Градусная мера дуги TB равна 2α. Значит, $\angle MTB = \alpha$.

На Рисунке 2 есть ещё одна дуга внешней окружности и два вписанных угла, на неё опирающихся. Это дуга AC и углы ATC и ABC. Если градусную меру дуги AC обозначить 2β, то $\angle ATC = \angle ABC = \beta$.

Резюмируя, можно сказать, что, анализируя конфигурацию, связанную с внешней окружностью, мы по известным градусным мерам дуг мы находили углы.

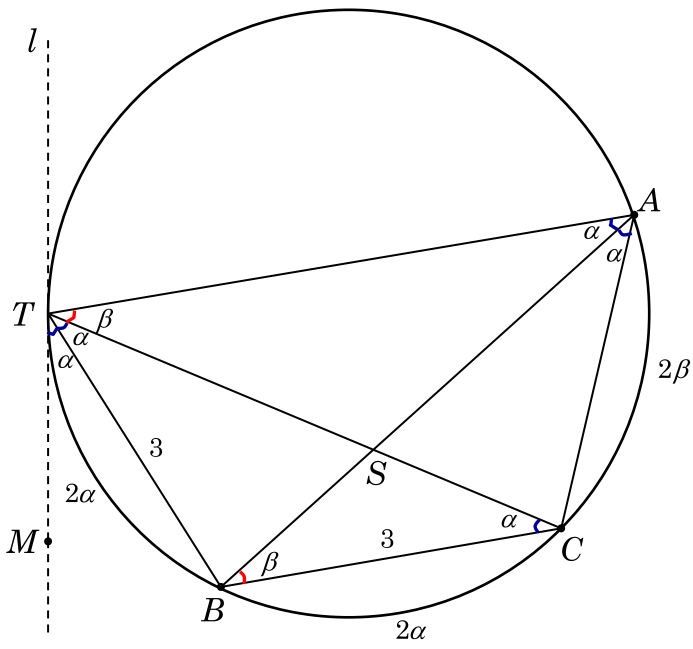

Рисунок 2

Теперь проанализируем конфигурацию, связанную с внутренней окружностью, учитывая результаты, полученные для внешней окружности. Для этого повторим Рисунок 1, убрав с него внешнюю окружность; см. Рисунок 3, где K и L – точки пересечения с внутренней окружностью прямых TB и TA.

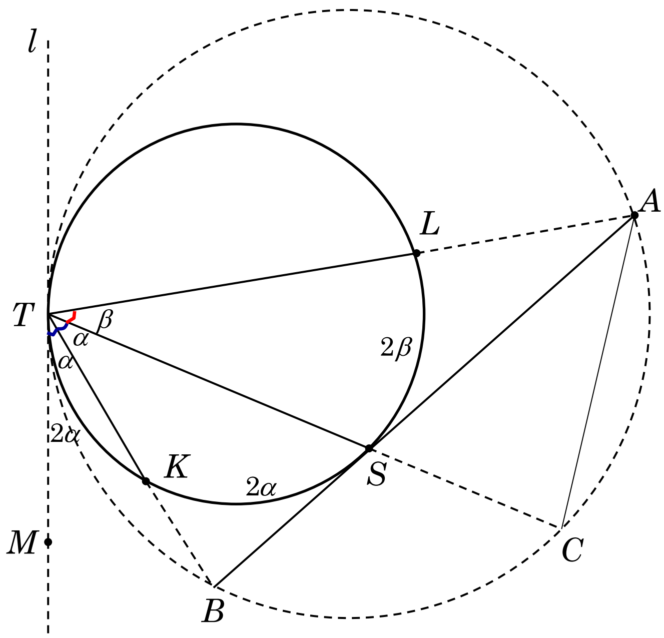

Рисунок 3

В конфигурации, изображённой на этом рисунке нам известны величины вписанных углов LTS и STK. Значит, градусные меры дуг LS и KS, на которые опираются эти углы, равны 2β и 2α соответственно. Кроме того, мы знаем угол KTM между хордой TK и касательной l. Значит, градусная мера дуги TK, заключённой между ними, равна 2α. Как и раньше, резюмируя, можно сказать, что, анализируя конфигурацию, связанную с внутренней окружностью, мы по известным углам мы находили градусные меры дуг. Эта процедура обратна той, которую мы применяли при анализе конфигурации, связанной с внешней окружностью.

Но теперь мы сможем сделать и один новый шаг. Именно, кроме касательной l для внутренней окружности имеется ещё одна касательная — AB. Мы можем определить градусную меру дуги TKS, заключённую между этой касательной и хордой TS; как видно из Рисунка 3, она равна 4α. Поэтому угол TSB равен 2α. С другой стороны, этот угол является внешним углом треугольника TSA, в котором мы знаем внутренние углы, не смежные с эти внешним: $\angle ATS = \beta$, $\angle TAS = \alpha$. Поскольку внешний угол треугольника равен сумме внутренних с ним не смежных, $2\alpha = \beta + \alpha$. Значит, $\beta = \alpha$ – этот результат является ключевым для решения задачи. Он означает, что на самом деле мы имеем дело с конфигурацией, изображённой на Рисунке 4.

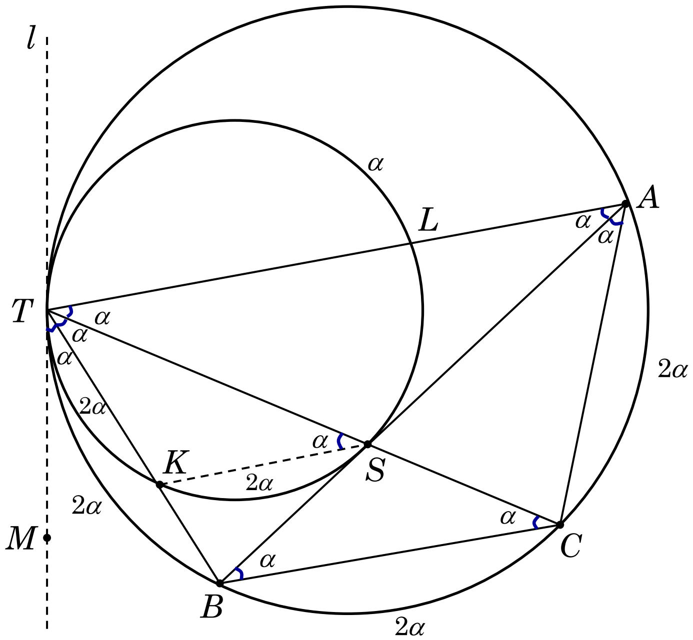

Рисунок 4

Теперь легко заключить, что четырёхугольник $TACB$, площадь которого мы должны найти, является трапецией, причём равнобочной. Действительно,

- $TA \parallel BC$, так как равны внутренние накрест лежащие углы ABC и BAT, образованные при пересечении прямых TA и BC прямой AB;
- $TB = AC$, так как они являются хордами внешней окружности, стягивающими равные дуги.

В этой трапеции мы знаем основание $BC = 3$ и боковые стороны $TB = AC = 3$, так что задача будет практически решена, если мы найдём второе основание, TA.

Если r_1 – радиус внешней окружности, то из теоремы синусов для треугольника TBC мы имеем: $\frac{BC}{\sin\alpha} = 2r_1$. Аналогично, теорема синусов для треугольника TKS даёт: $\frac{KS}{\sin\alpha} = 2r_2$, где r_2 – радиус внутренней окружности. Разделим эти равенства почленно: $\frac{KS}{BC} = \frac{r_2}{r_1}$. Но по условию $BC = 3$, $\frac{r_2}{r_1} = \frac{5}{8}$. Значит, $KS = \frac{15}{8}$.

Этот же результат можно получить немного быстрее, если заметить, что треугольники TKS и TBC подобны (углы при основаниях TS и TC равны). В подобных треугольниках сходственные стороны относятся как радиусы описанных окружностей. Поэтому $\frac{KS}{BC} = \frac{r_2}{r_1}$.

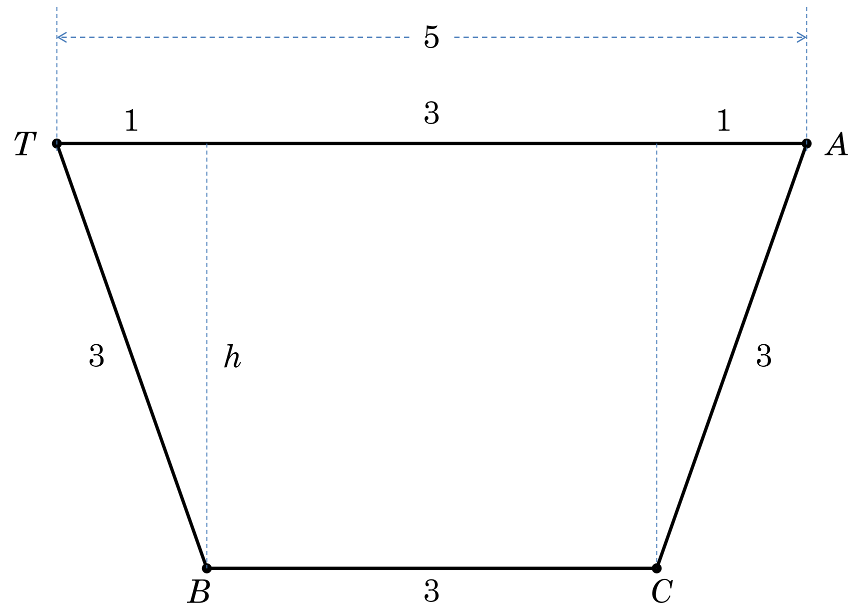

Рисунок 5

Из подобия треугольников TKS и TBC следует ещё один полезный результат. Поскольку коэффициент подобия при переходе от треугольника TKS к треугольнику TBC равен $\frac{r_2}{r_1} = \frac{5}{8}$, отрезок TS составляет $\frac{5}{8}$ отрезка TC. Если длину $\frac{1}{8}$ отрезка TC обозначить x, то $TC = 8x$, $TS = 5x$ (таким образом, x является наибольшей общей мерой отрезков TS и TC). Тогда $SC = 3x$.

Теперь рассмотрим треугольники BSC и AST. Они, очевидно, подобны. Значит, $\frac{TA}{BC}=\frac{TS}{SC}\Leftrightarrow\frac{TA}{3}=\frac{5x}{3x}\Leftrightarrow TA=5$.

Зная длины оснований и боковые стороны равнобочной трапеции $TACB$, мы без труда найдём её площадь. Как ясно из Рисунка 5, высота h этой трапеции равна $\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$. Поэтому искомая площадь равна $\frac{3+5}{2}\cdot 2\sqrt{2}=8\sqrt{2}$.

Ответ: $8\sqrt{2}$.

Замечание. Хотя это и не требуется по условию задачи, мы можем найти радиусы окружностей, r_1 и r_2, и угол α. Для этого воспользуемся формулой, которая позволяет найти длину a хорды, если известен радиус r окружности и градусная мера φ дуги, стягиваемой этой хордой: $a=2r\sin\frac{\varphi}{2}$.

Применяя эту формулу к хордам $BC=3$ и $TA=5$ внешней окружности, мы получим систему двух уравнений с двумя неизвестными r_1 и α:

$$\begin{cases} 3=2r_1\sin\alpha \\ 5=2r_1\sin(\pi-3\alpha) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3=2r_1\sin\alpha \\ 5=2r_1\left(3\sin\alpha-4\sin^3\alpha\right) \end{cases}$$

Почленное деление уравнений даёт:

$$\frac{5}{3}=3-4\sin^2\alpha\Leftrightarrow\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Соответственно, $r_1=\frac{3}{2\sin\alpha}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\approx 2.6$, а $r_2=\frac{5r_1}{8}=\frac{15\sqrt{3}}{16}\approx 1.6$. Отметим, кроме того, что $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $\cos 2\alpha=\frac{1}{3}$, $\sin 2\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$, так что $\alpha\approx 35^\circ$.

Задача 6. Ровно в 9:00 из пункта А в пункт Б выехал автомобиль. Проехав две третьих пути, наблюдательный водитель автомобиля заметил, что мимо него в сторону пункта А проехал некий велосипедист. В тот самый момент, когда автомобиль прибыл в пункт Б, из пункта Б в пункт А выехал автобус. Когда до пункта А оставалось две пятых пути, не менее наблюдательный водитель автобуса заметил, что он поравнялся с тем самым велосипедистом. Во сколько приедет велосипедист в пункт А, если известно, что автобус прибыл в пункт А ровно в 11:00? Скорости велосипедиста, автомобиля и автобуса считать постоянными.

Решение. Будем измерять расстояния километрами, время – часами, скорости – км/час. Пусть s – расстояние от пункта А до пункта Б, v_1 – скорость автомобиля, v_2 – скорость велосипедиста, v_3 – скорость автомобиля.

Введём на дороге из А в Б координаты, взяв пункт А в качестве начала координат, направление от А к Б в качестве положительного. Если в качестве начального момента времени взять 9:00, то до момента t_1 прибытия в Б закон движения автомобиля, т.е. зависимость координаты x автомобиля от времени t, даётся формулой: $x_1(t) = v_1 t$.

В двумерной системе координат (t,x) этот закон движения представляется отрезком AB прямой линии l_1, которая проходит через начало координат и угловой коэффициент которой равен v_1 (см. Рисунок 6). Точка A с координатами $(0,0)$ соответствует нахождению автомобиля в момент 0 в пункте А, точка B соответствует прибытию автомобиля в пункт Б (эта точка характеризуется тем, что её ордината равна s, и потому может быть определена как точка пересечения прямой l_1 и горизонтальной прямой $x = s$).

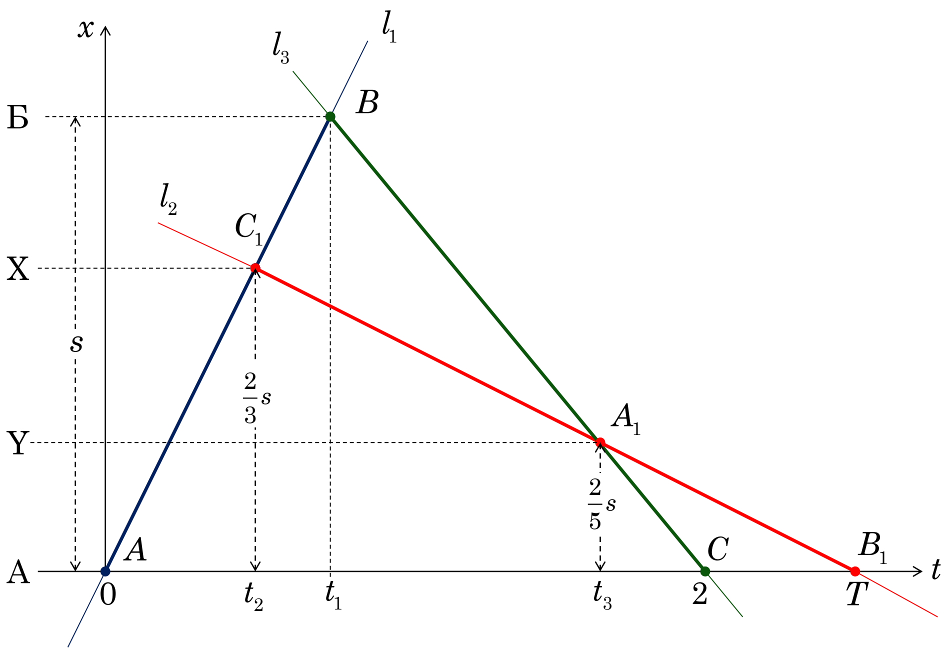

Рисунок 6

Пусть X – точка на дороге от А до Б, в которой автобус поравнялся с велосипедистом, t_2 – момент времени, когда произошло это событие. Соответствующую точку на графике движения автобуса обозначим символом C_1. Эта точка характеризуется тем, что её ордината равна $2s/3$ (по условию расстояние АХ равно $2s/3$), и потому точка C_1 может быть определена как точка пересечения прямой l_1 и горизонтальной прямой $x = 2s/3$.

Поскольку скорость велосипедиста постоянна, а в момент t_2 он находился в пункте Х, графически изменение координаты велосипедиста с течением времени после момента t_2 и до момента его прибытия в пункт А описывается отрезком C_1B_1 прямой l_2, которая проходит через точку C_1 и угловой коэффициент которой равен $-v_2$. Точка B_1 соответствует прибытию велосипедиста в пункт А. Точка B_1 характеризуется тем, что её ордината равна 0, и потому может быть определена как точка пересечения прямой l_2 и горизонтальной прямой $x=0$. Абсцисса точки B_1 – это искомое время T прибытия велосипедиста в пункт А.

Аналогично, графически изменение координаты автобуса с течением времени с момента t_1 его выезда из пункта Б и до момента $t=2$ его прибытия в пункт А описывается отрезком BC прямой l_3, которая проходит через точку B и угловой коэффициент которой равен $-v_3$. Точка C соответствует прибытию автобуса в пункт А. Точка C характеризуется тем, что её ордината равна 0, и потому может быть определена как точка пересечения прямой l_3 и горизонтальной прямой $x=0$. Её абсцисса – это время прибытия автобуса в пункт А; по условию это время равно 2 (что соответствует абсолютному значению 11:00).

По условию, «когда до пункта А оставалось две пятых пути, не менее наблюдательный водитель автобуса заметил, что он поравнялся с тем самым велосипедистом». Эта фраза означает, что отрезки C_1B_1 и BC пересеклись в точке A_1 с ординатой $\frac{2}{5}s$ (само место встречи на дороге между А и Б на рисунке обозначено Y).

Рисунок 6, на котором мы изобразили графически законы движения автомобиля, велосипедиста и автобуса, идентичен чертежу, иллюстрирующему теорему Морлея. Поэтому верно равенство:

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$$

Из нашего рисунка ясно, что $\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{2s/3}{s/3}=\frac{2}{1}$, $\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{3s/5}{2s/5}=\frac{3}{2}$, $\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{T-2}{T}$. Поэтому теорема Морлея даёт:

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{T-2}{T}=1 \Leftrightarrow 3T-6=T \Leftrightarrow T=3,$$

что соответствует абсолютному значению времени 12:00.

Ответ: Велосипедист приедет в пункт А в 12:00.

Задача 7. В основании правильной пирамиды с вершиной S лежит шестиугольник $ABCDEF$ со стороной 14. Плоскость π параллельна ребру AB, перпендикулярна плоскости DES и пересекает ребро BC в точке K так, что $BK:KC=3:4$. Кроме того, прямые, по которым π пересекает плоскости BCS и

AFS, параллельны. Найдите площадь треугольника, отсекаемого плоскостью π от грани CDS.

Решение. Рассмотрим плоскость основания и введём на ней декартову систему координат как показано на Рисунке 7. Поскольку шестиугольник $ABCDEF$ – правильный, вокруг него можно описать окружность, радиус r которой равен стороне шестиугольника, а диагонали этого шестиугольника пересекаются в центре O этой окружности и разбивают его на 6 правильных треугольников. Поскольку рассматриваемая пирамида правильная, её вершина S проецируется в точку O.

Если окружность, описанную вокруг шестиугольника, рассматривать как тригонометрическую, то вершинам A, B, C, D, E, F соответсвуют углы 0°, 60°, 120°, 180°, 240°, 300° соответственно. Определение $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ непосредственно влечёт, что точка на окружности радиуса r, которой соответстует угол α, имеет координаты $(r\cos\alpha, r\sin\alpha)$. Поэтому мы без труда найдём координаты вершин шестиугольника $ABCDEF$: $A(14,0)$, $B\left(7,7\sqrt{3}\right)$, $C\left(-7,7\sqrt{3}\right)$, $D(-14,0)$, $E\left(-7,-7\sqrt{3}\right)$, $F\left(7,-7\sqrt{3}\right)$. Эти формулы, впрочем, очевидны из Рисунка 7, если учесть, что диагонали шестиугольника пересекаются в точке O и разбивают его на 6 правильных треугольников.

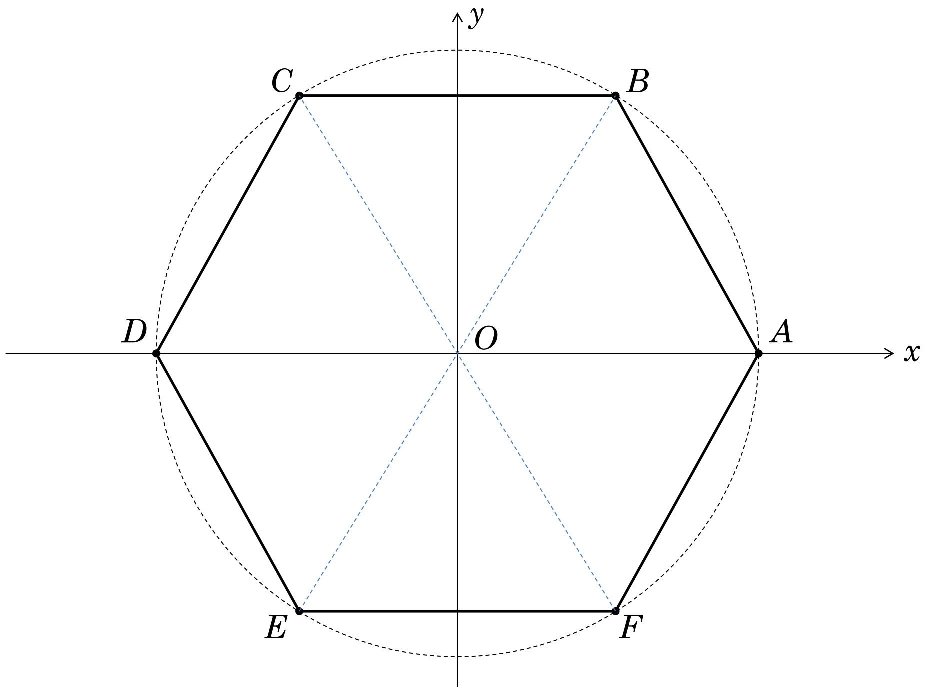

Рисунок 7

Дополним эту систему координат на плоскости основания до системы координат в пространстве, взяв в качестве оси z прямую OS с положительным направлением от O к S. Если $h = OS$ – высота пирамиды, то точка S имеет координаты $(0,0,h)$. Две первые координаты вершин основания не меняются; просто к ним добавляется третья координата, равная 0.

Теперь опишем все геометрические объекты, упомянутые в условии задачи, методами аналической геометрии, т.е. уравнениями.

Начнём с плоскости DES. В самом общем виде уравнение плоскости имеет вид: $ax+by+cz+d=0$, где числа a,b,c не равны 0 одновременно. Поскольку плоскость DES проходит через точки $D(-14,0,0)$, $E(-7,-7\sqrt{3},0)$, $S(0,0,h)$, координаты этих точек удовлетворяют уравнению плоскости DES, т.е. $-14a+d=0,\quad -7a-7\sqrt{3}b+d=0,\quad ch+d=0$. Уравнение плоскости определяется однозначно с точностью до ненулевой мультипликативной константы. Поэтому любой ненулевой коэффициент в уравнении плоскости можно взять произвольно (но отличным от 0). Плоскость DES, очевидно, не проходит через начало координат. Поэтому $d\neq 0$. Из первого из выписанных уравнений ясно, что удобно взять $d=14$. Тогда первое и третье уравнения дают: $a=1,\ c=-14/h$, а второе уравнение позволяет определить b: $b=1/\sqrt{3}$. Итак, плоскость DES имеет уравнение

$$x+\frac{1}{\sqrt{3}}y-\frac{14}{h}z+14=0.$$

Следующая плоскость – это плоскость π, про которую известно, что она перпендикулярна плоскости DES. Поэтому на самом деле нам от плоскости DES нужен только нормальный вектор – он лежит в плоскости π. Известно, что, если какая-то плоскость задаётся уравнением $ax+by+cz+d=0$, то вектор (a,b,c) перпендикулярен этой плоскости. Поэтому вектор $\vec{n}=\left(1,\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{14}{h}\right)$ можно взять в качестве нормального к плоскости DES. Этот вектор является первым вектором, лежащим в плоскости π. Поскольку плоскость π параллельна ребру AB, вектор $\overrightarrow{AB}=\left(-7,7\sqrt{3},0\right)$ также лежит в плоскости π. Поскольку третья координата вектора $\overrightarrow{AB}$ равна 0, а третья координата вектора $\vec{n}$ отлична от нуля, эти векторы неколлинеарны. В этой ситуации для того, чтобы найти уравнение плоскости π, достаточно знать координаты какой-нибудь точки лежащей на π. Такой точкой является точка K, которая делит ребро BC в отношении $3:4$; её координаты, очевидно, равны $\left(1,7\sqrt{3},0\right)$. Теперь мы можем выписать параметрическое уравнение плоскости π:

$$\begin{cases} x=1+u-7v \\ y=7\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}u+7\sqrt{3}v \\ z=-\frac{14}{h}u, \end{cases}$$

где $u, v \in \mathbb{R}$. Исключая из этой системы параметры u и v, мы получим обычное уравнение плоскости π: $3x + \sqrt{3}y + \frac{2h}{7}z - 24 = 0$.

В задаче есть ещё одно условие: прямые, по которым π пересекает плоскости BCS и AFS, параллельны. Займёмся ими.

Уравнения плоскостей BCS и AFS нетрудно найти тем же методом, который мы применяли выше, чтобы найти уравнение плоскости DES. Плоскость BCS задаётся уравнением $y + \frac{7\sqrt{3}}{h}z - 7\sqrt{3} = 0$, а плоскость AFS – уравнением $x - \frac{1}{\sqrt{3}}y + \frac{14}{h}z - 14 = 0$. Линии пересеченния этих плоскостей с плоскостью π можно найти решая системы

$$\begin{cases} 3x + \sqrt{3}y + \frac{2h}{7}z - 24 = 0 \\ y + \frac{7\sqrt{3}}{h}z - 7\sqrt{3} = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 3x + \sqrt{3}y + \frac{2h}{7}z - 24 = 0 \\ x - \frac{1}{\sqrt{3}}y + \frac{14}{h}z - 14 = 0 \end{cases}$$

соответственно. После несложных выкладок мы получим решения этих систем:

$$\begin{cases} x = 1 + \frac{147 - 2h^2}{21h}t \\ y = 7\sqrt{3} - \frac{7\sqrt{3}}{h}t \\ z = t \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 11 - \frac{147 + h^2}{21h}t \\ y = -3\sqrt{3} - \frac{147 - h^2}{7\sqrt{3}h}t \\ z = t \end{cases}$$

где $t \in \mathbb{R}$ – произвольный параметр.

Поэтому в качестве направляющих векторов прямых, по которым π пересекает плоскости BCS и AFS, можно взять векторы $\left(\frac{147 - 2h^2}{21h}, -\frac{7\sqrt{3}}{h}, 1\right)$ и $\left(-\frac{147 + h^2}{21h}, \frac{147 - h^2}{7\sqrt{3}h}, 1\right)$. Параллельность прямых равносильна коллинеарности их направляющих векторов. Поскольку третьи координаты этих направляющих векторов совпадают, должны совпадать и две другие координаты. Это даёт равенства: $\frac{147 - 2h^2}{21h} = -\frac{147 + h^2}{21h}$, $\frac{147 - h^2}{7\sqrt{3}h} = -\frac{7\sqrt{3}}{h}$, откуда мы находим, что $h = 7\sqrt{6}$.

Теперь мы можем уточнить уравнение плоскости π, в котором до сих пор был один неопределённый параметр – высота призмы. Сейчас мы можем сказать, что это уравнение имеет вид: $3x + \sqrt{3}y + 2\sqrt{6}z - 24 = 0$.

И, наконец, мы можем непосредственно заняться треугольником, отсекаемым плоскостью π от грани CDS. Для этого определим точки пересечения плоскости π с рёбрами CD, CS, DS.

Параметрическое уравнение прямой CD можно записать условной формулой $(x,y,z)=C+t\cdot\overrightarrow{CD}$, где $t\in\mathbb{R}$, а действия понимаются покоординатно. Параметр t однозначно определяет положение точки на прямой CD; в частности, $t\in[0,1]$ соответствует точкам отрезка CD, $t=0$ даёт точку C, $t=1$ – точку D. Поскольку $C=\left(-7,7\sqrt{3},0\right)$, $\overrightarrow{CD}=\left(-7,-7\sqrt{3},0\right)$, координаты (x,y,z) точек прямой CD и только они имеют вид: $x=-7-7t$, $y=7\sqrt{3}-7\sqrt{3}t$, $z=0$, где $t\in\mathbb{R}$. Подставляя эти формулы в уравнение плоскости π, мы получим, что $t=-\dfrac{4}{7}$. Так как $-\dfrac{4}{7}\notin[0,1]$, ребро CD не пересекается с плоскостью π. Но прямая CD с плоскостью π пересекается, причём точка пересечения (обозначим её L) расположена слева от точки C на расстоянии, равном $4/7$ длины отрезка CD. Длина ребра CD равна 14. Поэтому $CL=8$ (см. Рисунок 8).

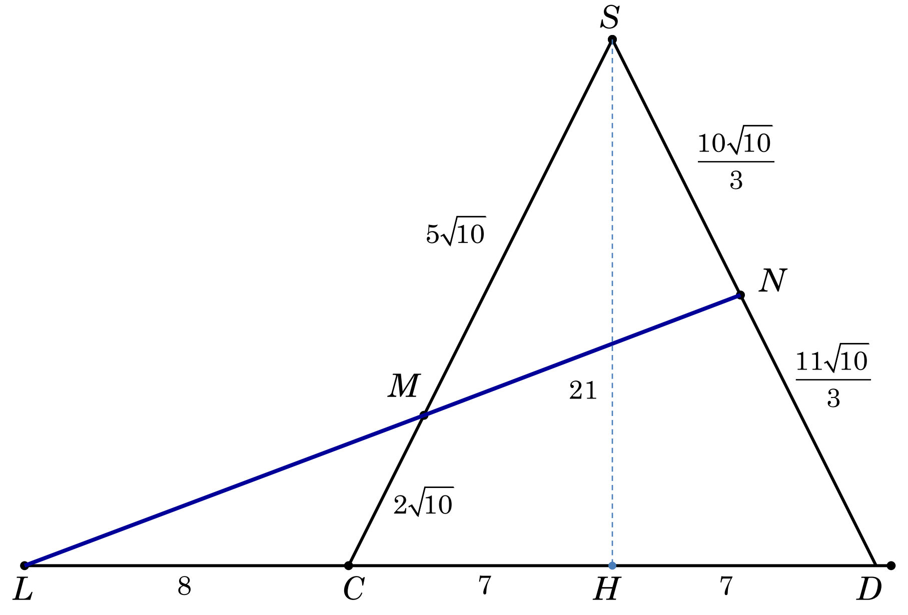

Рисунок 8

Параметрическое уравнение прямой CS можно записать условной формулой

$$(x,y,z)=C+t\cdot\overrightarrow{CS}=\left(-7,7\sqrt{3},0\right)+t\cdot\left(7,-7\sqrt{3},7\sqrt{6}\right)=\left(-7+7t,7\sqrt{3}-7\sqrt{3}t,7\sqrt{6}t\right),$$

где $t\in\mathbb{R}$, причём $t\in[0,1]$ соответствует точкам ребра CS. Подставляя формулы для x,y,z в уравнение плоскости π, мы получим $t=2/7$. Это означает, что ребро CS пересекается с плоскостью π, причём точка пересечения (обозначим её M)

отсекает от отрезка CS $2/7$ его длины, считая от точки C. Длина ребра CS равна $\sqrt{7^2+\left(-7\sqrt{3}\right)^2+\left(7\sqrt{6}\right)^2}=7\sqrt{10}$. Поэтому $CM=2\sqrt{10}$ (см. Рисунок 8).

Параметрическое уравнение прямой DS имеет вид:

$$(x,y,z)=D+t\cdot\overrightarrow{DS}=\left(-14,0,0\right)+t\cdot\left(14,0,7\sqrt{6}\right)=\left(-14+14t,0,7\sqrt{6}t\right),$$

где $t\in\mathbb{R}$, причём $t\in[0,1]$ соответствует точкам ребра DS. Подставляя формулы для x,y,z в уравнение плоскости π, мы получим, что $t=11/21$. Значит, ребро DS пересекается с плоскостью π, причём точка пересечения (обозначим её N) отсекает от отрезка DS $11/21$ его длины, считая от точки D (см. Рисунок 8). Длина ребра DS равна $\sqrt{14^2+\left(7\sqrt{6}\right)^2}=7\sqrt{10}$. Поэтому $DN=11\sqrt{10}/3$ (см. Рисунок 8).

Теперь на Рисунке 8 мы имеем все данные, чтобы вычислить площадь треугольника SMN, отсекаемого плоскостью π от грани CDS. Высота SH равнобедренного треугольника CSD равна $\sqrt{\left(7\sqrt{10}\right)^2-7^2}=21$, так что

$$\sin C=\frac{21}{7\sqrt{10}}=\frac{3}{\sqrt{10}},\quad \cos C=\frac{7}{7\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{10}},$$

$$\sin S=\sin\left(180^\circ-2C\right)=\sin 2C=2\sin C\cos C=\frac{3}{5}.$$

Значит, площадь треугольника SMN равна

$$\frac{1}{2}\cdot MS\cdot NS\cdot\sin S=\frac{1}{2}\cdot 5\sqrt{10}\cdot\frac{10\sqrt{10}}{3}\cdot\frac{3}{5}=50.$$

Ответ: 50.

Задача 8. Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{106+\log_a^2\cos(ax)+\log_a\cos^{10}(ax)}+\sqrt{58+\log_a^2\sin(ax)-\log_a\sin^6(ax)}$$
$$+\sqrt{5+\log_a^2\operatorname{tg}(ax)+\log_a\operatorname{tg}^2(ax)}$$

и все пары (a,x), при которых оно достигается.

Решение. Данное нам выражение (обозначим его $F(a,x)$) является функцией *двух равноправных переменных*, a и x. Обозначения задачи могут натолкнуть на ошибочный вывод, что a — параметр, x — *единственная* переменная, а речь идёт об определении для каждого (допустимого) значения a

наименьшего значения данного нам выражения как функции *одной* переменной x. Такая постановка задачи имеет смысл, но в такой формулировке задача становится очень сложной и может быть решена только численно. В Замечании после решения мы поговорим об этом немного подробнее.

Итак, нам нужно найти наименьшее значение функции $F(a,x)$ и точки (a,x), в которых оно достигается. При решении Задачи 8 ДВИ-2018 мы отметили, что:

1. В высшей математике имеется стандартный общий метод решения задач на максимум/минимум для функций двух и более аргументов, но на вступительном экзамене речь может идти только о методе, основанном на специфическом виде функции $F(a,x)$.
2. Обычно подобные задачи решаются следующим образом:
   a) Анализируемая функция приводится к виду, который позволяет использовать какое-то классическое неравенство: неравенство, связывающее среднее арифметическое и среднее геометрическое, неравенство Коши-Буняковского, неравенство треугольника, неравенство Бернулли и т.д.
   b) С помощью этого неравенства находится верхняя или нижняя (в зависимости от вопроса задачи) оценка для анализируемой функции.
   c) После этого доказывается, что эта граница действительно достигается при допустимых значениях аргументов.
3. Вопрос задачи (найти наибольшее или наименьшее значение) определяется составителем задачи не произвольно, а тем, какую оценку, верхнюю или нижнюю, даёт применяемое классическое неравенство.

После этих вводных комментариев перейдём непосредственно к решению нашей задачи.

Прежде всего для сокращения записей обозначим произведение ax какой-нибудь буквой, например, t: $t = ax$. Т.к. $a \neq 0$ (эта переменная стоит в основании логаифмов и потому положительна и не равна 1), основную переменную x можно выразить через новую переменную t: $x = t/a$. Таким образом между x и t имеется взаимно однозначное соответствие. Значит, можно находить минимум выражения

$$f(a,t) = \sqrt{106 + \log_a^2 \cos t + \log_a \cos^{10} t} + \sqrt{58 + \log_a^2 \sin t - \log_a \sin^6 t}$$
$$+ \sqrt{5 + \log_a^2 \operatorname{tg} t + \log_a \operatorname{tg}^2 t}\,.$$

В этой формуле под знаком логарифма стоят: $\cos t$, $\sin t$, $\operatorname{tg} t$. Поэтому все три выражения положительны (впрочем, положительность $\operatorname{tg} t$ следует из положительности $\cos t$ и $\sin t$). Следовательно, область определения функции $f(a,t)$ – это область D_f на плоскости (a,t), задаваемая соотношениями: $a > 0$, $a \neq 1$, $2\pi n < t < \pi/2 + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

При отмеченных значениях переменных мы можем заменить $\log_a \cos^{10} t$, $\log_a \sin^6 t$, $\log_a \mathrm{tg}^2 t$ на $10\log_a \cos t$, $6\log_a \sin t$, $2\log_a \mathrm{tg}\, t$ соответственно:

$$f(a,t) = \sqrt{106 + \log_a^2 \cos t + 10\log_a \cos t} + \sqrt{58 + \log_a^2 \sin t - 6\log_a \sin t}$$
$$+ \sqrt{5 + \log_a^2 \mathrm{tg}\, t + 2\log_a \mathrm{tg}\, t}\,.$$

В последнем выражении под радикалами стоят квадратные трёхчлены относительно $u = \log_a \cos t$, $v = \log_a \sin t$, $w = \log_a \mathrm{tg}\, t$: $u^2 + 10u + 106$, $v^2 - 6v + 58$, $w^2 + 2w + 5$ соответственно. Отметим, что переменные u, v, w не являются независимыми, т.к. $w \equiv \log_a \mathrm{tg}\, t = \log_a \sin t - \log_a \cos t = v - u$.

Весьма разумным представляется выделение в появившихся квадратных трёхчленах полных квадратов: $u^2 + 10u + 106 = (u+5)^2 + 81$, $v^2 - 6v + 58 = (3-v)^2 + 49$ (причина, по которой мы предпочли писать $\left(3-v\right)^2$, а не $\left(v-3\right)^2$, станет понятна позже), $w^2 + 2w + 5 = (w+1)^2 + 4$, что даст для $f \equiv f(a,t)$ следующую формулу:

$$f = \sqrt{(u+5)^2 + 81} + \sqrt{(3-v)^2 + 49} + \sqrt{(w+1)^2 + 4}\,.$$

Имея в виду, что вторые слагаемые под радикалами являются квадратными числами, перепишем f в виде:

$$f = \sqrt{(u+5)^2 + 9^2} + \sqrt{(3-v)^2 + 7^2} + \sqrt{(w+1)^2 + 2^2}\,. \qquad (1)$$

Любое выражение вида $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ можно интерпретировать как длину вектора (α,β) с координатами α и β. Рассмотрим поэтому следующие три вектора: $\vec{U} = (u+5,9)$, $\vec{V} = (3-v,7)$, $\vec{W} = (w+1,2)$. Тогда f можно интерпретировать как сумму длин этих векторов: $f = \left|\vec{U}\right| + \left|\vec{V}\right| + \left|\vec{W}\right|$.

В силу неравенства треугольника сумма длин векторов не меньше, чем длина суммы этих векторов, т.е.

$$\left|\vec{U}\right| + \left|\vec{V}\right| + \left|\vec{W}\right| \ge \left|\vec{U} + \vec{V} + \vec{W}\right| \qquad (2)$$

причём знак равенства достигается тогда и только тогда, когда эти векторы коллинеарны и одинаково направлены.

В нашем случае

$$\vec{U} + \vec{V} + \vec{W} = (u+5,9) + (3-v,7) + (w+1,2)$$
$$= (9 + u - v + w, 18) = (9,18).$$

Здесь мы использовали отмеченную ранее связь между переменными u, v, w: $w = v - u$. Это соотношение позволило установить независимость вектора $\vec{U} + \vec{V} + \vec{W}$ от переменных; именно по этой причине при выделении полного квадрата в квадратном трёхчлене $v^2-6v+58$ мы предпочли запись $(3-v)^2+49$ записи $(v-3)^2+49$. Длина вектора $(9,18)$ равна $\sqrt{9^2+18^2}=9\sqrt{5}$, а тангенс угла, образуемого с положительным направлением оси абсцисс, равен 2. Применяя неравенство треугольника в форме (2), мы получим, что $f\geq 9\sqrt{5}$. *Однако, это ещё не означает, что мы нашли наименьшее значение выражения* f. Мы сможем гарантировать, что $9\sqrt{5}$ не просто оценка снизу для значений выражения f, а его наименьшее значение, если установим, что эта оценка достигается для допустимых значений аргументов, т.е. существует хотя бы одна пара $(a,t)\in D_f$ такая, что $f(a,t)=9\sqrt{5}$.

Чтобы это установить, отметим, что в неравенстве (2) знак равенства достигается тогда и только тогда когда векторы $\vec{U},\vec{V},\vec{W}$ коллинеарны и одинаково направлены. В этом случае эти векторы коллинеарны своей сумме, т.е. вектору $(9,18)$, и направлены в ту же сторону, что и эта сумма. Последнее означает, что векторы $\vec{U},\vec{V},\vec{W}$ образуют с положительным направлением оси абсцисс угол, тангенс которого равен 2, что равносильно равенствам

$$\begin{cases} \dfrac{9}{\log_a\cos t+5}=2 \\ \dfrac{7}{3-\log_a\sin t}=2 \\ \dfrac{2}{\log_a\sin t-\log_a\cos t+1}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_a\cos t=-\dfrac{1}{2} \\ \log_a\sin t=-\dfrac{1}{2} \\ \log_a\sin t=\log_a\cos t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos t=\dfrac{1}{\sqrt{a}} \\ \sin t=\dfrac{1}{\sqrt{a}} \end{cases}$$

Если последняя система имеет решение, то основное тригонометрическое тождество влечёт, что $a=2$. Обратно, если $a=2$, то последняя система система примет вид

$$\begin{cases} \cos t=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin t=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Эта система имеет бесконечное множество решений, задаваемое формулой $t=\dfrac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$

Итак, функция $f(a,t)$ действительно принимает значение $9\sqrt{5}$, причём это значение достигается в бесконечном числе точек (a,t) вида $\left(2;\dfrac{\pi}{4}+2\pi n\right),\ n\in\mathbb{Z}$.

Поскольку $t = ax$, $a = 2$, соответствующие значения основной переменной x даются формулой $x = \frac{\pi}{8} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Рисунок 9 иллюстрирует проведённые рассуждения.

На Рисунке 9.a показан случай неколлениарных векторов $\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}$, когда $\left|\vec{U} + \vec{V} + \vec{W}\right| < \left|\vec{U}\right| + \left|\vec{V}\right| + \left|\vec{W}\right|$.

На Рисунке 9.b показан случай коллинеарных и одинаково направленных векторов $\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}$; в этом случае $\left|\vec{U} + \vec{V} + \vec{W}\right| = \left|\vec{U}\right| + \left|\vec{V}\right| + \left|\vec{W}\right|$.

Ответ: наименьшее значение исходного выражения равно $9\sqrt{5}$; достигается оно в бесконечном числе точек (a, x) вида $\left(2, \frac{\pi}{8} + \pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

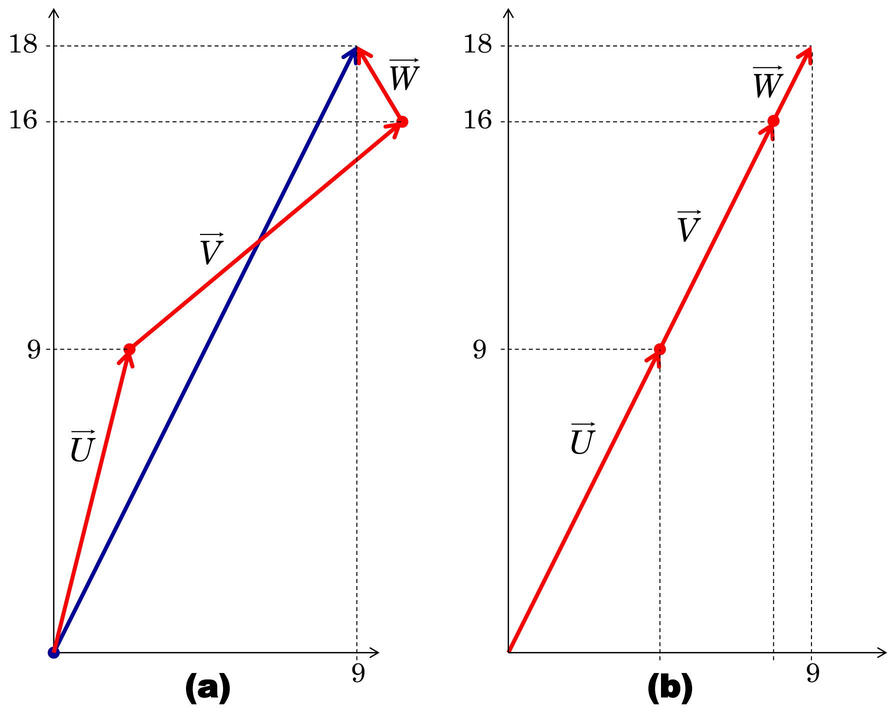

Рисунок 9

Замечание. Как мы отмечали, если немного изменить формулировку задачи и попросить найти для каждого (допустимого) значения a наименьшее значение данного нам выражения как функции *одной* переменной x, то задача становится очень сложной и может быть решена только численно. При этом, как и при решении исходной задачи, можно исследовать выражение (1).

Ясно, что для каждого конкретного значения a наименьшее значение функции $f_a(t) \equiv f(a,t)$ не может быть меньше, чем наименьшее значение функции $f(a,t)$ при всех допустимых значениях (a,t):

$$\min_t f_a(t) \geq \min_{(a,t)} f(a,t).$$

Мы установили, что $\min_{(a,t)} f(a,t) = 9\sqrt{5}$, причём достигается он при $a = 2$, $t = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Поэтому $\min_t f_2(t) = 9\sqrt{5}$, причём достигается он при $t = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. В Таблице 1 приведены значения функции $f_2(t)$, вычисленные по формуле (1) при $a = 2$ для $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ (поскольку эта функция периодична с периодом 2π, можно ограничиться этим интервалом) с шагом $\Delta t = 0.05$.

Таблица 1. Значения функции $f_2(t)$

t	$f_2(t)$	t	$f_2(t)$	t	$f_2(t)$
0.05	24.30137	0.55	20.23804	1.05	20.23687
0.10	22.78684	0.60	20.19122	1.10	20.28573
0.15	21.98358	0.65	20.15848	1.15	20.34637
0.20	21.46747	0.70	20.13754	1.20	20.42161
0.25	21.10726	0.75	20.12676	1.25	20.51582
0.30	20.84469	0.80	20.12497	1.30	20.63597
0.35	20.64859	0.85	20.13142	1.35	20.79393
0.40	20.50024	0.90	20.14571	1.40	21.01190
0.45	20.38749	0.95	20.16779	1.45	21.33818
0.50	20.30205	1.00	20.19795	1.50	21.91045

Из Таблицы 1 хорошо видно, что наименьшее значение функции $f_2(t)$ равно примерно 20.125, достигается оно (с точностью до периода 2π) при $t \approx 0.8$. Если провести расчёты с меньшим шагом, то мы сможем определить наименьшее значение и точку, в которой оно достигается, точнее. Например, если взять $\Delta t = 0.001$, то мы получим, что $\min_t f_2(t) \approx 20.12461$, причём достигается это значение (с точностью до периода 2π) при $t \approx 0.785$. В ходе теоретического анализа мы установили, что $\min_t f_2(t) = 9\sqrt{5} = 20.12461\ldots$, а достигается это значение (с точностью до периода 2π) при $t = \frac{\pi}{4} = 0.785398\ldots$. Таким образом, численные результаты дают тот же результат, что и теоретический анализ.

Возьмём теперь другое значение параметра a, например, $a = 10$. В Таблице 2 приведены значения функции $f_{10}(t)$, вычисленные по формуле (1) при $a = 10$ для $t \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ с шагом $\Delta t = 0.05$.

Таблица 2. Значения функции $f_{10}(t)$

t	$f_{10}(t)$	t	$f_{10}(t)$	t	$f_{10}(t)$
0.05	20.53370	0.55	20.14273	1.05	20.14612
0.10	20.35719	0.60	20.13969	1.10	20.15069
0.15	20.27842	0.65	20.13761	1.15	20.15652
0.20	20.23337	0.70	20.13634	1.20	20.16399
0.25	20.20448	0.75	20.13577	1.25	20.17367
0.30	20.18470	0.80	20.13585	1.30	20.18649
0.35	20.17059	0.85	20.13655	1.35	20.20402
0.40	20.16028	0.90	20.13787	1.40	20.22922
0.45	20.15263	0.95	20.13985	1.45	20.26860
0.50	20.14693	1.00	20.14257	1.50	20.34083

Из Таблицы 2 хорошо видно, что наименьшее значение функции $f_{10}(t)$ равно примерно 20.13577; достигается оно (с точностью до периода 2π) при $t \approx 0.75$. Если провести расчёты с меньшим шагом, то мы сможем определить наименьшее значение и точку, в которой оно достигается, точнее. Например, если взять $\Delta t = 0.001$, то мы получим, что $\min\limits_{t} f_{10}(t) \approx 20.1357$, причём достигается это значение (с точностью до периода 2π) при $t \approx 0.768$. *Как само наименьшее значение, так и точка минимума изменились*!

ДВИ-2017, вариант 171

Задача 1. Какое число больше: $\sqrt{\frac{6}{7}+7+\frac{7}{6}}$ или 3?

Решение. 1 *способ.* Рассмотрим первое число и вычислим значение числового выражения под знаком радикала:

$$\frac{6}{7}+7+\frac{7}{6}=7+\frac{36+49}{42}=7+\frac{85}{42}=7+2\frac{1}{42}=9\frac{1}{42}.$$

Получившееся число больше, чем 9. Поэтому арифметический квадратный корень из него больше, чем 3.

2 *способ.* Числа $\frac{6}{7}$ и $\frac{7}{6}$ взаимно обратны. Известно, что сумма $a+\frac{1}{a}$ двух положительных взаимно обратных чисел не меньше, чем 2, причём эта сумма равна 2 тогда и только тогда, когда эти числа равны 1. Поэтому $\frac{6}{7}+\frac{7}{6}>2$ и, следовательно, $\sqrt{\frac{6}{7}+7+\frac{7}{6}}>\sqrt{7+2}=\sqrt{9}=3.$

Ответ: первое число больше.

Задача 2. Известно, что $a+b+c=5$ и $ab+bc+ac=4$. Найдите $a^2+b^2+c^2$.

Решение. Воспользуемся тождеством:

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc.$$

Подставляя сюда данные нам числовые значения выражений $a+b+c$ и $ab+bc+ac$, мы получим:

$$5^2=a^2+b^2+c^2+2\cdot 4 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=17.$$

Ответ: 17.

Задача 3. Решите уравнение $\sin 7x+\sin 6x=\sin x$.

Решение. В левой части сумму $\sin 7x+\sin x$ превратим в произведение по формуле $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$. В правой части $\sin x$ заменим (по формуле для синуса двойного аргумента) на произведение $2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$. В результате исходное уравнение примет вид:

$$2\sin\frac{13x}{2}\cos\frac{x}{2}=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}.$$

Обращая внимание на общий множитель $\cos\frac{x}{2}$ в левой и правой частях, расщепим это уравнение на два: $\cos\frac{x}{2}=0$ и $\sin\frac{13x}{2}=\sin\frac{x}{2}$.

Уравнение $\cos\frac{x}{2}=0$ является простейшим тригонометрическим уравнением и мы сразу можем выписать множество его решений: $x=\pi+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

Чтобы решить уравнение $\sin\frac{13x}{2}=\sin\frac{x}{2}$, перенесём все члены в левую часть и превратим разность $\sin\frac{13x}{2}-\sin\frac{x}{2}$ в произведение по формуле $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$:

$$2\cos\frac{7x}{2}\sin 3x=0.$$

Это уравнение опять распадается на два простейших: $\cos\frac{7x}{2}=0$ и $\sin 3x=0$. Множество решений первого даётся формулой: $x=\frac{\pi}{7}+\frac{2\pi m}{7}$, $m\in\mathbb{Z}$, а множество решений второго – формулой $x=\frac{\pi n}{3}$, $n\in\mathbb{Z}$.

В принципе уже сейчас можно выписать ответ в виде: $x=\pi+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $x=\frac{\pi}{7}+\frac{2\pi m}{7}$, $m\in\mathbb{Z}$; $x=\frac{\pi n}{3}$, $n\in\mathbb{Z}$. Но следует отметить, что множества, задаваемые этими формулами пересекаются. Иначе говоря, если мы в ответ выпишем эти три серии корней, то некоторые значения x встретятся в ответе несколько раз. Формально говоря, это не является ошибкой, т.к. по определению *ответом уравнения является множество его корней*. Если ответ записан как объединение нескольких множеств, то определение не требует, чтобы эти множества попарно не пересекались. Например, если какое-то уравнение решалось методом расщепления и одна ветвь решения дала $x=1$ и $x=2$, а вторая — $x=2$ и $x=3$, то ответом уравнения будет объединение множеств $\{1;2\}$ и $\{2;3\}$, которое можно записать в виде $\{1;2\}\cup\{2;3\}$. Конечно, лучше выполнить эту операцию над множествами и записать ответ в виде $\{1;2;3\}$. Но поскольку $\{1;2;3\}=\{1;2\}\cup\{2;3\}$, формально говоря, запись ответа в виде $\{1;2\}\cup\{2;3\}$ не является ошибкой. Следует, однако, иметь в виду, что иногда условие задачи содержит дополнительные требования, которые могут вынудить нас исключить повторение корней. Например, нас могут спросить, сколько корней расположено на каком-то промежутке; если не исключить кратные корни, то ответ может быть неверным.

В нашем случае очевидно, что серия $x=\pi+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, полученная при решении уравнения $\cos\frac{x}{2}=0$, является подсерией серии $x=\frac{\pi}{7}+\frac{2\pi m}{7}$ при $m=7k+3$ и подсерией серии $x=\frac{\pi n}{3}$ при $n=3(2k+1)$. Поэтому серию $x=\pi+2\pi k$ можно не выписывать.

Сложнее понять, пересекаются или нет серии $\frac{\pi}{7}+\frac{2\pi m}{7}$ и $\frac{\pi n}{3}$. Чтобы выяснить это, отметим, что число x входит в обе серии тогда и только тогда, когда при некоторых целых m и n верно равенство $\frac{\pi}{7}+\frac{2\pi m}{7}=\frac{\pi n}{3}\Leftrightarrow 3+6m=7n$, или, иначе говоря, линейное диофантово уравнение $3+6m=7n$ имеет решение. При этом, если это уравнение действительно имеет решение (m,n), то

- корень с номером m из первой серии совпадает с корнем с номером n из второй серии,
- других совпадающих корней нет.

Решить линейное диофантово уравнение $3+6m=7n$ легко с помощью стандартной процедуры:

1. Найдём какое-нибудь частное решение. Нетрудно видеть, что пара $m_0=3, n_0=3$ является решением; запишем этот факт в виде: $3+6\cdot\mathbf{3}=7\cdot\mathbf{3}$.
2. Вычтем это числовое равенство из исходного уравнения: $6(m-3)=7(n-3)$.
3. Поскольку коэффициенты 6 и 7 — взаимно простые числа, равенство $6(m-3)=7(n-3)$ влечёт, что $m-3$ делится без остатка на 7, т.е. для некоторого целого l верно равенство: $m-3=7l$. С его помощью уравнение $6(m-3)=7(n-3)$ можно переписать в виде: $n-3=6l$.
4. Итак, если пара (m,n) является решением уравнения $3+6m=7n$, то для некоторого целого l верны равенства: $m=3+7l$, $n=3+6l$. Прямой подстановкой легко убедиться, что верно и обратное: если для некоторого целого l верны равенства: $m=3+7l$, $n=3+6l$, то пара (m,n) является решением уравнения $3+6m=7n$.

Теперь мы можем записать множество решений исходного уравнения, не содержащее совпадающих чисел: $x=\frac{\pi}{7}+\frac{2\pi m}{7}$, где $m\in\mathbb{Z}$; $x=\frac{\pi n}{3}$, где $n\in\mathbb{Z}$, но при делении на 6 не даёт в остатке 3. С равным успехом можно использовать и следующую запись: $x=\frac{\pi}{7}+\frac{2\pi m}{7}$, где $m\in\mathbb{Z}$, но при делении на 7 не даёт в остатке 3; $x=\frac{\pi n}{3}$, где $n\in\mathbb{Z}$.

Окончательный ответ, краткости ради, мы запишем в виде, который не исключает повторяющиеся корни.

Ответ: $x = \frac{\pi}{7} + \frac{2\pi m}{7}$, $x = \frac{\pi n}{3}$, $m, n \in \mathbb{Z}$.

Задача 4. Решите неравенство $x^2 \log_7^2 x + 3\log_6^2 x \le x \log_7 x \cdot \log_6 x^4$.

Решение. Перейдём в логарифмах к одному основанию, скажем, 6, т.е. заменим $\log_7 x$ на $\frac{\log_6 x}{\log_6 7}$. Кроме того, заменим $\log_6 x^4$ на $4\log_6 x$ (это можно делать, т.к. в исходном неравенстве неизвестная x стоит под знаком логарифма и потому предполагается положительной):

$$x^2 \frac{\log_6^2 x}{\log_6^2 7} + 3\log_6^2 x \le 4x \frac{\log_6^2 x}{\log_6 7} \Leftrightarrow \log_6^2 x \cdot \left(x^2 - 4\log_6 7 \cdot x + 3\log_6^2 7\right) \le 0.$$

Чтобы решить полученное неравенство применим метод интервалов.

У квадратного трёхчлена $x^2 - 4\log_6 7 \cdot x + 3\log_6^2 7$ величина $\frac{D}{4}$ равна $\left(2\log_6 7\right)^2 - 3\log_6^2 7 = \log_6^2 7$, так что соответствующее квадратное уравнение имеет два корня, $x_{1,2} = 2\log_6 7 \pm \log_6 7 = \log_6 7; 3\log_6 7$, и, значит, этот трёхчлен можно разложить на два линейных множителя:

$$x^2 - 4\log_6 7 \cdot x + 3\log_6^2 7 = \left(x - \log_6 7\right)\left(x - 3\log_6 7\right).$$

С членом $\log_6^2 x$ проще всего разобраться с помощью следующего простого соображения:

знак выражения $\log_a f - \log_a g$ на множестве $f > 0, g > 0$ (где определены оба логарифма) совпадает со знаком выражения $f - g$, если $a > 1$, и противоположен знаку выражения $f - g$, если $0 < a < 1$.

Поэтому на множестве $x > 0$ выражение $\log_6 x \equiv \log_6 x - \log_6 1$ имеет такой же знак, как и выражение $x - 1$. Для решения неравенства вида $A \cdot B \le 0$ (и аналогичных неравенств) важны только знаки сомножителей A и B, а не их точные значения, так что наша задача сводится к решению системы

$$\begin{cases} (x-1)^2 \left(x - \log_6 7\right)\left(x - 3\log_6 7\right) \le 0 \\ x > 0 \end{cases}.$$

Множество решений первого неравенства системы состоит из изолированной точки $x = 1$ и отрезка $\log_6 7 \le x \le 3\log_6 7$. Для этих значений неизвестной условие $x > 0$, очевидно, выполнено, так что множество решений системы совпадает с множеством решений первого неравенства.

Ответ: $\{1\}\cup\left[\log_6 7;3\log_6 7\right]$.

Задача 5. Через вершины A и B треугольника ABC проведена окружность, касающаяся прямых AC и BC. На этой окружности выбрана точка D (внутри треугольника), лежащая на расстоянии $\sqrt{2}$ от прямой AB и на расстоянии $\sqrt{5}$ от прямой BC. Найдите угол $\angle DBC$, если известно, что $\angle ABD = \angle BCD$.

Решение. Окружность касается прямой AC. Поэтому она имеет с этой прямой только одну общую точку, точку касания. С другой стороны, окружность проходит через точку A. Поэтому точка A будет точкой касания окружности и прямой AC. По аналогичной причине точка B является точкой касания окружности и прямой BC. Значит, треугольник ABC образован касательными AC и BC, которые проведены к окружности из одной точки C, и хордой AB. Поэтому отрезки AC и BC равны (т.е. треугольник ABC равнобедренный), центр окружности O лежит на биссектрисе угла ACB, которая одновременно перпендикулярна стороне AB треугольника ABC и проходит через её середину M. Эта конфигурация однозначно характеризуется двумя параметрами, например, радиусом окружности r и углом $\varphi = \angle AOC = \angle BOC$ (см. Рисунок 1).

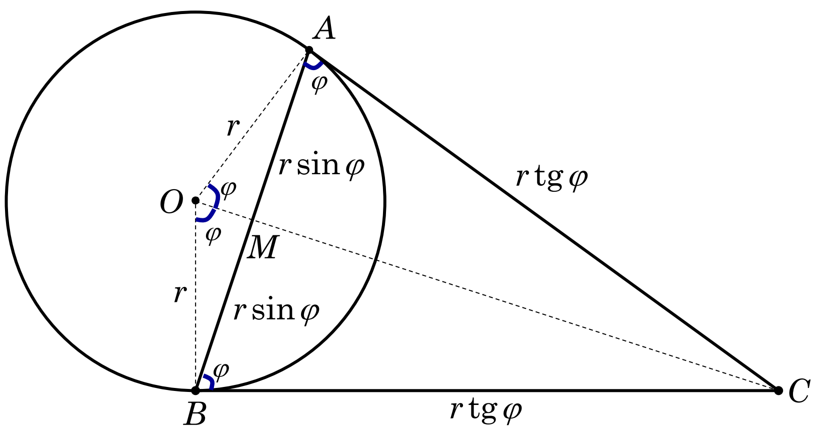

Рисунок 1

Тогда $\angle ACO = \angle BCO = 90^\circ - \varphi$, $\angle ABC = \angle BAC = \varphi$, а градусная мера дуги AB равна 2φ. Через параметры r и φ легко выразить длину хорды AB и касательных AC и BC: $AC = BC = r\,\mathrm{tg}\,\varphi$, $AB = 2r\sin\varphi$.

Положение точки D на дуге AB удобно охарактеризовать величиной угла $\angle DBC = \alpha$ – именно эту величину мы должны найти. Тогда градусная мера дуги BD равна 2α и, значит, угол BAD равен α (как вписанный угол, опирающийся на дугу BD). Поскольку $\angle ABC = \varphi$, угол ABD равен $\varphi - \alpha$ (см. Рисунок 2).

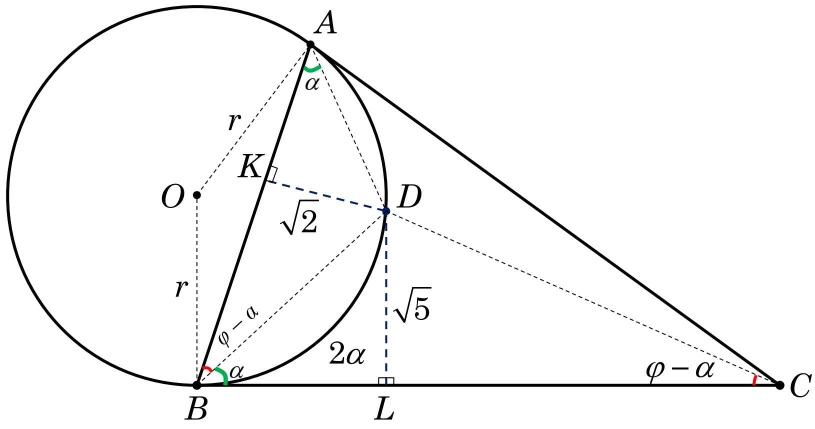

Рисунок 2

Итак, ситуация, описанная в задаче, однозначно характеризуется тремя параметрами: r, φ и α. Через эти параметры мы можем выразить длины всех отрезков, величины всех углов и т.д. В частности, поскольку окружность, о которой идёт речь в задаче, описана вокруг треугольника ADB, из теоремы синусов мы имеем: $AD = 2r\sin(\varphi - \alpha)$, $BD = 2r\sin\alpha$.

Но самое главное — мы можем выразить через r, φ и α:

1. расстояние от точки D до прямой AB;
2. расстояние от точки D до прямой BC;
3. угол BCD.

С другой стороны, эти элементы конфигурации даны нам по условию. Это позволяет получить три уравнения с тремя неизвестными r, φ и α, из которых мы и найдём интересующую нас величину α.

Теперь займёмся реализацией этого плана.

Первое условие – расстояние от точки D до прямой AB равно $\sqrt{2}$. Пусть K — основание перпендикуляра, опущенного из точки D на AB. Из прямоугольного треугольника AKD мы имеем: $KD = AD\sin\alpha$. Но AD мы уже нашли: $AD = 2r\sin(\varphi - \alpha)$. Это даёт первое уравнение:

$$2r\sin(\varphi - \alpha)\sin\alpha = \sqrt{2}. \qquad (1)$$

Второе условие – расстояние от точки D до прямой BC равно $\sqrt{5}$. Пусть L – основание перпендикуляра, опущенного из точки D на BC. Из прямоугольного треугольника BLD мы имеем: $DL = BD\sin\alpha$. Но BD мы уже нашли: $BD = 2r\sin\alpha$. Это даёт второе уравнение:

$$2r\sin^2\alpha = \sqrt{5}. \qquad (2)$$

Третье условие – равенство углов ABD и BCD. В этом случае треугольники ABD и BCD подобны (т.к. $\angle BAD = \angle CBD = \alpha$, $\angle ABD = \angle BCD = \varphi - \alpha$). Обратно, подобие этих треугольников влечёт равенство углов ABD и BCD. Известно, что в подобных треугольниках сходственные стороны пропорциональны высотам, опущенным на эти стороны. Поэтому

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DK}{DL} \Leftrightarrow \frac{2r\sin\varphi}{r\,\mathrm{tg}\,\varphi} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

и, значит, $\sin\varphi = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$.

Теперь разделим почленно равенства (1) и (2):

$$\frac{2r\sin(\varphi-\alpha)\sin\alpha}{2r\sin^2\alpha} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \sqrt{5}\sin(\varphi-\alpha) = \sqrt{2}\sin\alpha. \qquad (3)$$

Поскольку $\sin(\varphi-\alpha) = \sin\varphi\cos\alpha - \cos\varphi\sin\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{10}}\cos\alpha - \dfrac{1}{\sqrt{10}}\sin\alpha$, из (3) мы получим уравнение с одной неизвестной α:

$$\frac{3}{\sqrt{2}}\cos\alpha - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha = \sqrt{2}\sin\alpha \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{2}}\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{2}}\sin\alpha \Leftrightarrow \mathrm{tg}\,\alpha = 1.$$

Поэтому $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$.

Ответ: $\dfrac{\pi}{4}$.

Замечание. Хотя это и не требуется, из (2) легко найти радиус окружности: $r = \dfrac{\sqrt{5}}{2\sin^2\frac{\pi}{4}} = \sqrt{5}$. Значит, и $BL = \sqrt{5}$, а четырёхугольник $BODL$ является квадратом.

Задача 6. Василий с друзьями решили устроить пикник. Для этого им от пункта A нужно добраться вниз по реке до пункта B, причём в их распоряжении есть два катера. Считая себя самым ответственным, Василий вызвался самостоятельно доехать до пункта B на более быстроходном катере и начать готовить место для пикника. Оба катера вышли одновременно из пункта A. Однако, помчавшись восемь километров, Василий заметил на берегу машущего ему рукой Григория, который просил по старой дружбе довести его до пункта C. И хоть пункт C Василий уже проехал, он согласился. По пути в пункт C Василий с Григорием встретили идущий навстречу второй катер с друзьями Василия, откуда те крикнули, что им до пункта B осталась треть пути и чтобы Василий нигде не задерживался. Доставив Григория в пункт C, Василий немедленно помчался догонять друзей. Найдите расстояние между пунктами B и C, если известно, что оба катера пришли в пункт B одновременно, скорости катеров постоянны, а Василий действительно нигде не задерживался.

Решение. Будем измерять расстояния километрами, время – часами, скорости – км/час. Пусть s – расстояние от пункта A до пункта B, v_1 – скорость первого катера относительно берега при движении по течению, v_2 – скорость второго катера относительно берега при движении по течению, v_1' – скорость первого катера относительно берега при движении против течения. Отметим, что величины v_1, v_2, v_1' не будут использоваться ни для каких вычислений; однако их удобно ввести для более компактной записи последующих рассуждений. Пусть, далее, D – точка, в которой Василий развернул свой катер по направлению к пункту C (чтобы довести туда Григория), E – точка, в которой по пути из D в C Василий встретил второй катер. По условию, $AD = 8$, $EB = \frac{s}{3}$, так что $AE = \frac{2s}{3}$. Введём на реке координаты, взяв пункт A в качестве начала координат, направление от A к B в качестве положительного, так что для любой точки на пути от A к B её координата – это просто расстояние от этой точки до точки A.

На Рисунке 3 мы изобразили участок реки между пунктами A и B, отметили координаты, упомянутых выше точек (исключая точку C, для нахождения координаты которой пока нет достаточно информации), с помощью векторов показали перемещения катеров.

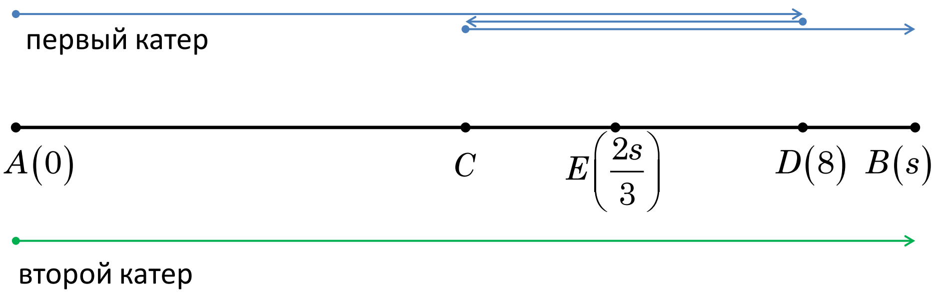

Рисунок 3

Если в качестве начального момента времени взять момент, когда оба катера вышли из пункта A, то до момента T прибытия в B закон движения второго катера, т.е. зависимость его координаты x автомобиля от времени t, даётся формулой:

$x_2(t) = v_2 t$. Отметим, что сам момент T нам совсем не нужен, хотя его легко определить из равенства $\textit{время} = \dfrac{\textit{путь}}{\textit{скорость}}$: $T = \dfrac{s}{v_2}$.

В двумерной системе координат (t, x) этот закон движения представляется отрезком OB^* прямой линии, которая проходит через начало координат O и угловой коэффициент которой равен v_2 (см. Рисунок 4, где этот отрезок изображён красным). Точка O с координатами $(0,0)$ соответствует нахождению второго катера в момент 0 в пункте A, точка B^* с ординатой s соответствует прибытию катера в пункт B.

Закон движения первого катера – это ломаная $OD^*C^*B^*$ (см. Рисунок 4, где эта ломаная изображена синей).

Первая часть этой ломаной, отрезок OD^*, соответствует движению первого катера до точки D, в которой Василий развернул свой катер по направлению к пункту C (чтобы довести туда Григория). На Рисунке 4 момент разворота обозначен t_1; мы ввели это обозначение для бóльшей ясности решения, хотя формально эта величина нам и не нужна. Эти же слова относятся как к моменту t_2 встречи катеров в точке E, так и к моменту t_3 прибытия первого катера в пункт C (чтобы высадить там Георгия). Угловой коэффициент прямой OD^* равен v_1. Так как скорость первого катера больше скорости второго, эта прямая идёт круче прямой OB^*.

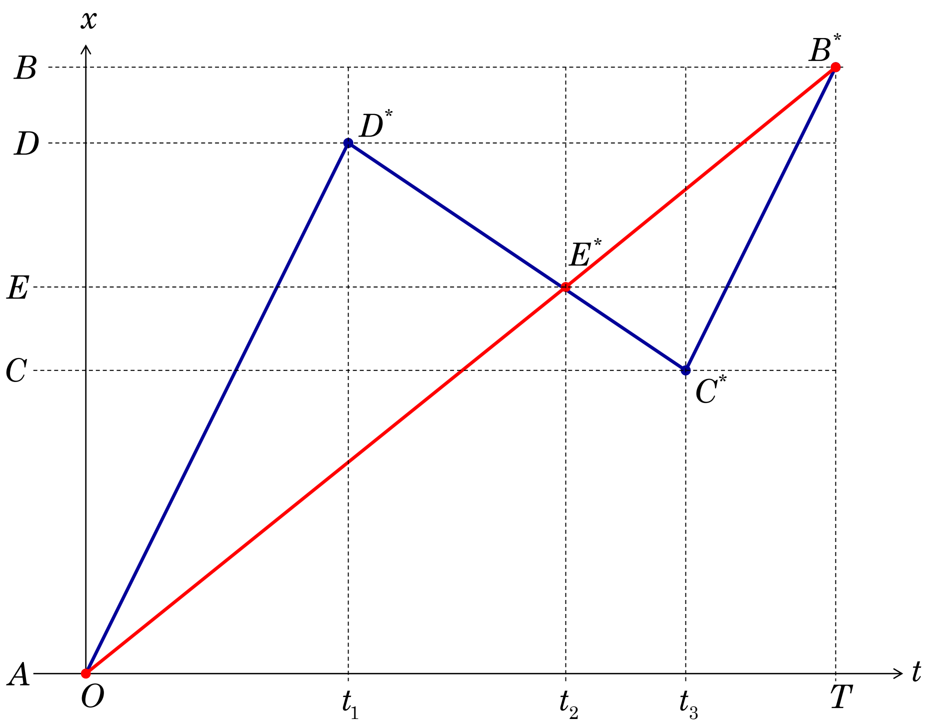

Рисунок 4

Вторая часть ломаной $OD^*C^*B^*$, отрезок D^*C^*, соответствует движению первого катера от точки разворота D до пункта C. Так как на этом участке пути первый катер плывёт в обратном направлении, угловой коэффициент прямой D^*C^* отрицателен. По абсолютной величине он равен v_1'.

И наконец, третья часть ломаной $OD^*C^*B^*$, отрезок C^*B^*, соответствует движению первого катера от пункта C до пункта назначения B. На этом участке пути первый катер опять плывёт по течению и потому угловой коэффициент прямой C^*B^* равен v_1, т.е. совпадает с угловым коэффициентом прямой OD^*. Поэтому эти прямые параллельны – этот факт играет центральную роль в нашем решении.

Факт встречи катеров в какой-то момент времени означает равенство их координат в этот момент. Поэтому встрече катеров в пункте $E(2s/3)$ в момент t_2 соответствует пересечение отрезков OB^* и D^*C^* в точке E^* с координатами $(t_2, 2s/3)$.

Рассмотрим треугольники AD^*E^* и $B^*C^*E^*$. Углы AE^*D^* и $B^*E^*C^*$ равны как вертикальные, углы AD^*E^* и $B^*C^*E^*$ равны как внутренние накрест лежащие при параллельных OD^* и C^*B^*, пересечённых прямой D^*C^*, по аналогичной причине равны и углы D^*AE^* и $E^*B^*C^*$. Поэтому эти треугольники подобны.

Пусть k – коэффициент подобия при переходе от треугольника AD^*E^* к треугольнику $B^*C^*E^*$. Ясно, что при гомотетии с центром в точке E^* и коэффициентом $-k$ треугольник AD^*E^* отобразится на треугольник $B^*C^*E^*$. Поскольку точка O отобразится в точку D^*, а при гомотетии любая прямая переходит в параллельную ей прямую, можно утверждать, что луч Ot (положительная полуось абсцисс) отобразится на луч B^*B, перпендикуляр E^*t_2, опущенный из точки E^* на луч Ot, отобразится на перпендикуляр, опущенный из точки E^* на луч B^*B (эти утверждения являются частным случаем общего утверждения о том, что точки и прямые, которые одинаково расположены относительно гомотетичных треугольников, соответствуют друг другу). Длина первого перпендикуляра равна расстоянию $AE = \dfrac{2s}{3}$, а длина второго – расстоянию $EB = \dfrac{s}{3}$. С другой стороны, $EB = k \cdot AE$. Отсюда следует, что $k = \dfrac{EB}{AE} = \dfrac{1}{2}$. Аналогично, перпендикуляр D^*t_1, опущенный из точки D^* на луч Ot, отобразится на перпендикуляр, опущенный из точки C^* на луч B^*B. Длина первого перпендикуляра равна 8, а длина второго – это искомое расстояние пунктами B и C. Поэтому $BC = 8k = 4$.

Ответ: 4 км.

Задача 7. Из вершины D на плоскость основания ABC пирамиды $ABCD$ опущена высота DH. Найдите объём этой пирамиды, если известно, что площади треугольников HBC, HAC, HAB равны соответственно $\frac{2}{9}, \frac{1}{3}, \frac{4}{9}$, и что все три плоских угла при вершине D прямые.

Решение. Если пирамиду расположить так, как сказано в условии задачи (треугольник ABC – основание, DH – высота; см. Рисунок 5), то треугольники HBC, HAC, HAB можно рассматривать как ортогональные проекции боковых граней DBC, DAC, DAB на плоскость основания.

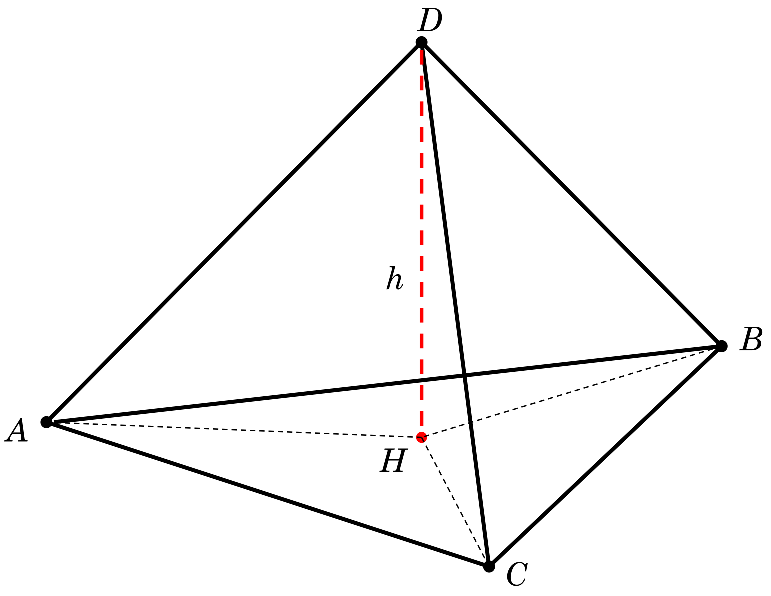

Рисунок 5

Известно, что ортогональная проекция любой плоской фигуры Φ на плоскость, образующую угол $\varphi < 90^\circ$ с плоскостью этой фигуры, даёт плоскую фигуру Φ′, площадь $S_{\Phi'}$ которой связана с площадью S_Φ исходной фигуры Φ соотношением: $S_{\Phi'} = S_\Phi \cdot \cos\varphi$.

Значит, если угол между боковой гранью DBC и плоскостью основания обозначить α, угол между боковой гранью DAC и плоскостью основания – β, угол между боковой гранью DBC и плоскостью основания – γ, то

$$S_{DBC} = \frac{S_{HBC}}{\cos\alpha} = \frac{2}{9\cos\alpha}, \quad S_{DAC} = \frac{S_{HAC}}{\cos\beta} = \frac{1}{3\cos\beta}, \quad S_{DAB} = \frac{S_{HAB}}{\cos\gamma} = \frac{4}{9\cos\gamma}. \qquad (4)$$

С другой стороны, поскольку все три плоских угла при вершине D прямые, удобно в качестве основания взять какую-то из граней DBC, DAC, DAB. Например, на Рисунке 6 мы в качестве основания взяли грань DBC (на этом рисунке a, b, c – длины рёбер DA, DB, DC соответственно). При таком взгляде на исходную пространственную конфигурацию основанием пирамиды будет прямоугольный треугольник DBC, а высотой – ребро $DA = a$.

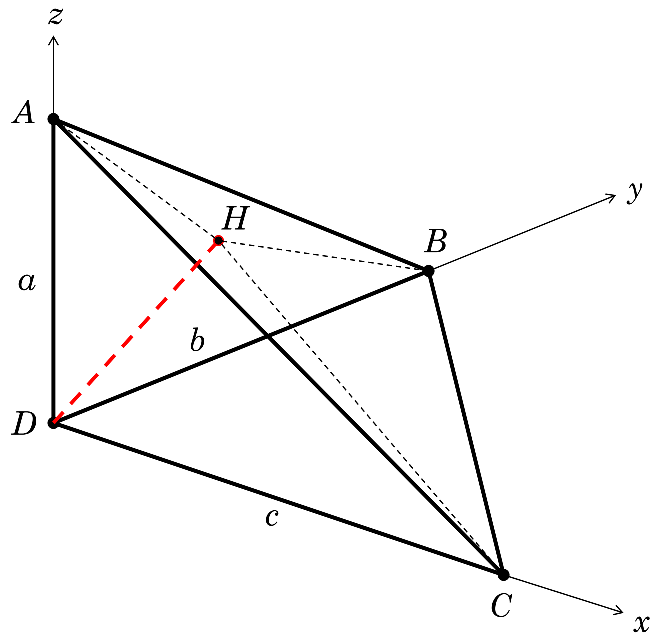

Рисунок 6

В этой ситуации треугольник DBC можно рассматривать как ортогональную проекцию треугольника ABC. Поэтому его площадь равна произведению площади треугольника ABC на косинус угла между плоскостями DBC и ABC. Но:

- треугольник ABC составлен из треугольников HBC, HAC, HAB, так что $S_{ABC} = S_{HBC} + S_{HAC} + S_{HAB} = \frac{2}{9} + \frac{1}{3} + \frac{4}{9} = 1$;
- угол между плоскостями DBC и ABC – это угол α.

Следовательно, $S_{DBC} = 1 \cdot \cos\alpha = \cos\alpha$. Аналогичные рассуждения показывают, что $S_{DAC} = \cos\beta$, $S_{DAB} = \cos\gamma$.

Сопоставляя эти равенства и (4), мы получим:

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{2}{9\cos\alpha} \\ \cos\beta = \dfrac{1}{3\cos\beta} \\ \cos\gamma = \dfrac{4}{9\cos\gamma} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2\alpha = \dfrac{2}{9} \\ \cos^2\beta = \dfrac{1}{3} \\ \cos^2\gamma = \dfrac{4}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{3} \\ \cos\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ \cos\gamma = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Таким образом, $S_{DBC} = \frac{\sqrt{2}}{3}$, $S_{DAC} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $S_{DAB} = \frac{2}{3}$. С другой стороны, площади прямоугольных треугольников DBC, DAC, DAB даются формулами: $S_{DBC} = \frac{bc}{2}$,

$S_{DAC}=\dfrac{ac}{2}$, $S_{DAB}=\dfrac{ab}{2}$. Следовательно, $\dfrac{bc}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$, $\dfrac{ac}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $\dfrac{ab}{2}=\dfrac{2}{3}$. Перемножая эти равенства, мы получим: $a^2b^2c^2=\dfrac{16\sqrt{6}}{27}$, откуда $abc=\dfrac{4\sqrt[4]{54}}{9}$.

Теперь мы можем вычислить объём пирамиды $ABCD$. Будем исходить из Рисунка 6, на котором основанием пирамиды является прямоугольный треугольник DBC с катетами $DB=b$ и $DC=c$ (его площадь равна $bc/2$), а высотой – ребро $DA=a$. Поэтому $V_{ABCD}=\dfrac{abc}{6}=\dfrac{2\sqrt[4]{54}}{27}$.

Ответ: $\dfrac{2\sqrt[4]{54}}{27}$.

Задача 8. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x}{\cos\left(x^2-y^2\right)}-y\cdot\operatorname{tg}\left(x^2-y^2\right)=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}} \\ \dfrac{y}{\cos\left(x^2-y^2\right)}-x\cdot\operatorname{tg}\left(x^2-y^2\right)=\sqrt{\dfrac{\pi}{3}} \end{cases}$$

Решение. Сложим и вычтем уравнения системы. В результате мы получим следующую систему, равносильную исходной:

$$\begin{cases} (x+y)\left(\dfrac{1}{\cos\left(x^2-y^2\right)}-\operatorname{tg}\left(x^2-y^2\right)\right)=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}+\sqrt{\dfrac{\pi}{3}} \\ (x-y)\left(\dfrac{1}{\cos\left(x^2-y^2\right)}+\operatorname{tg}\left(x^2-y^2\right)\right)=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}-\sqrt{\dfrac{\pi}{3}} \end{cases}$$

Перемножим уравнения этой системы. Используя тождества $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ и $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}=1+\operatorname{tg}^2\alpha$, мы получим: $x^2-y^2=\dfrac{\pi}{6}$. Для равносильности преобразоаания достаточно сохранить любое уравнение, например, первое:

$$\begin{cases} (x+y)\left(\dfrac{1}{\cos\left(x^2-y^2\right)}-\operatorname{tg}\left(x^2-y^2\right)\right)=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}+\sqrt{\dfrac{\pi}{3}} \\ x^2-y^2=\dfrac{\pi}{6} \end{cases}$$

Используя соотношение $x^2-y^2=\frac{\pi}{6}$, мы можем знаменить $\frac{1}{\cos\left(x^2-y^2\right)}$ и $\operatorname{tg}\left(x^2-y^2\right)$ на $\frac{1}{\cos\frac{\pi}{6}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$ и $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ соответственно и привести последнюю систему к виду:

$$\begin{cases} x+y=\sqrt{3}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}+\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right) \\ x^2-y^2=\frac{\pi}{6} \end{cases}$$

Эту систему можно решить стандартным методом искючения неизвестной, но проще проделать следующие преобразования.

1. Разделим второе уравнение на первое, сохранив для равносильности первое уравнение:

$$\begin{cases} x+y=\sqrt{3}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}+\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right) \\ x-y=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}-\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right) \end{cases}$$

Здесь мы учитываем то, что $\frac{\pi}{6}=\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}+\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right)\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}-\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right)$.

2. В получившейся системе сложим и вычтем уравнения:

$$\begin{cases} 2x=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{4}{\sqrt{3}}+\sqrt{\frac{\pi}{3}}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}} \\ 2y=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}+\sqrt{\frac{\pi}{3}}\cdot\frac{4}{\sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1+\sqrt{6}}{3}\sqrt{\pi} \\ y=\frac{4+\sqrt{6}}{6}\sqrt{\pi} \end{cases}$$

Ответ: $x=\frac{1+\sqrt{6}}{3}\sqrt{\pi};\ y=\frac{4+\sqrt{6}}{6}\sqrt{\pi}.$

ДВИ-2018, вариант 181

Задача 1. Какое из чисел $\frac{49}{18}$ и $\frac{79}{24}$ ближе к 3?

Решение. Расстояние между числами на числовой прямой равно модулю из разности. Поэтому число $\frac{49}{18}=2\frac{13}{18}$ находится от числа 3 на расстоянии

$$\left|2\frac{13}{18}-3\right|=\left|-\frac{5}{18}\right|=\frac{5}{18},$$

а число $\frac{79}{24}=3\frac{7}{24}$ – на расстоянии

$$\left|3\frac{7}{24}-3\right|=\left|\frac{7}{24}\right|=\frac{7}{24}.$$

Чтобы сравнить дроби $\frac{5}{18}$ и $\frac{7}{24}$, приведём их к общему знаменателю: $\frac{5}{18}=\frac{20}{72}$, $\frac{7}{24}=\frac{21}{72}$. Значит, $\frac{5}{18}<\frac{7}{24}$, т.е. число $\frac{49}{18}$ ближе к 3, чем число $\frac{79}{24}$.

Ответ: первое.

Задача 2. Найдите все значения параметра a, при которых разность между корнями уравнения $x^2+3ax+a^4=0$ максимальна.

Решение. По смыслу задачи уравнение $x^2+3ax+a^4=0$ имеет два корня. Поэтому его дискриминант $D=9a^2-4a^4$ положителен, т.е.

$$-4a^2\left(a^2-\frac{9}{4}\right)>0 \Leftrightarrow 0<a^2<\frac{9}{4}.$$

Разность между корнями $x_{1,2}=\frac{-3a\pm\sqrt{D}}{2}$, в зависимости от их порядка, равна $\sqrt{D}$ или $-\sqrt{D}$. Поэтому максимальное значение этой разности – это наибольшее значение выражения $\sqrt{D}=\sqrt{9a^2-4a^4}$.

Выражение $\sqrt{9a^2-4a^4}$ имеет вид $\sqrt{f(t)}$, где $t=a^2$ – вспомогательная неотрицательная переменная, лежащая на интервале $0<t<\frac{9}{4}$, а $f(t)=9t-4t^2$. Оно принимает наибольшее значение тогда и только тогда, когда подкоренное выражение $f(t)$ принимает наибольшее значение на множестве $0<t<\frac{9}{4}$. Функция $f(t)=9t-4t^2$ является квадратичной с отрицательным старшим коэффициентом. Её график – парабола, ветви которой направлены вниз и которая пересекает ось t в точках $t_1=0$ и $t_2=\frac{9}{4}$. Из этого графика ясно, что наибольшее значение $f(t)=9t-4t^2$ на множестве $0<t<\frac{9}{4}$ достигается в точке $t_0=\frac{t_1+t_2}{2}=\frac{9}{8}$ и равно $f\left(\frac{9}{8}\right)=\frac{81}{64}$. Соответственно, наибольшее значение выражения $\sqrt{D}$ равно $\frac{9}{8}$, причём достигается оно при $a^2=\frac{9}{8}$, т.е. при $a=\pm\frac{3}{2\sqrt{2}}$.

Найти наибольшее значение выражения $\sqrt{D}=\sqrt{9a^2-4a^4}$ можно и другими способами.

Например, выделяя полный квадрат, мы имеем:

$$\sqrt{D}=\sqrt{9a^2-4a^4}=\sqrt{\frac{81}{64}-\left(2a^2-\frac{9}{4}\right)^2}.$$

Поэтому $\sqrt{D}$ не превосходит $\sqrt{\frac{81}{64}}=\frac{9}{8}$, причём это значение достигается тогда и только тогда, когда $\left(2a^2-\frac{9}{4}\right)^2=0$, т.е. $a^2=\frac{9}{8}$. Отметим, что хотя этот способ существенно короче первого, он может быть применён только для анализа квадратичных выражений или сводящихся к ним.

Ещё один интересный способ основан на классическом неравенстве для среднего арифметического и среднего геометрического двух неотрицательных чисел: *если* $x,y\geq 0$*, то* $\sqrt{xy}\leq\frac{x+y}{2}$*, причём знак равенства достигается тогда и только тогда, когда* $x=y$*.*

Чтобы применить его для решения нашей задачи, отметим, что на множестве $0\leq a^2\leq\frac{9}{4}$ числа a^2 и $\frac{9}{4}-a^2$ неотрицательны. Поэтому выражение $\sqrt{a^2\left(\frac{9}{4}-a^2\right)}$ можно рассматривать как их среднее геометрическое. Оно не превосходит среднего арифметического этих чисел, которое равно $\frac{a^2+\frac{9}{4}-a^2}{2}=\frac{9}{8}$, причём это значение достигается тогда и только тогда, когда $a^2=\frac{9}{4}-a^2$, т.е. $a^2=\frac{9}{8}$. Поскольку $a^2=\frac{9}{8}$

лежит в промежутке $0 \le a^2 \le \frac{9}{4}$, наибольшее значение выражения $\sqrt{D}$ равно $\frac{9}{8}$, причём достигается оно при $a^2 = \frac{9}{8}$, т.е. при $a = \pm\frac{3}{2\sqrt{2}}$.

Ответ: $\pm\frac{3}{2\sqrt{2}}$.

Задача 3. Решите уравнение $\sin 4x \cdot \cos 10x = \sin x \cdot \cos 7x$.

Решение. Превратим произведения тригонометрических функций в левой и правой частях уравнения в суммы. Для этого применим тождество $2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$, что приведёт уравнение к виду: $\sin 14x - \sin 6x = \sin 8x - \sin 6x$. Теперь перенесём все члены в левую часть, приведём подобные и опять превратим разность $\sin 14x - \sin 8x$ в произведение с помощью тождества $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$:

$$2\cos 11x \sin 3x = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\cos 11x = 0 \ \text{ или } \ \sin 3x = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$11x = \frac{\pi}{2} + \pi m,\ m \in \mathbb{Z},\ \text{ или } \ 3x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$$

$$\Updownarrow$$

$$x = \frac{\pi(2m+1)}{22},\ m \in \mathbb{Z},\ \text{ или } \ x = \frac{\pi n}{3},\ n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $\frac{\pi(2m+1)}{22}, \frac{\pi n}{3}$, где $m,n \in \mathbb{Z}$.

Задача 4. Решите неравенство $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{\log_{\sqrt{3}-\sqrt{2}} x} \ge \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{\log_x\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}$.

Решение. Поскольку

$$\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right) = \left(\sqrt{3}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2 = 1,$$

числа $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ взаимно обратны, т.е.

$$\sqrt{3}-\sqrt{2} = \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{-1},\ \sqrt{3}+\sqrt{2} = \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{-1}.$$

Используя этот факт, мы можем в левой части неравенства перейти к основанию $\sqrt{3}-\sqrt{2}$:

$$\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{-\log_{\sqrt{3}-\sqrt{2}} x} \geq \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{\log_x\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}.$$

Далее, так как $\sqrt{3}-\sqrt{2}<1$, а показательная функция a^t с основанием $a \in (0,1)$ определена и монотонно убывает на всей числовой прямой, последнее неравенство равносильно неравенству

$$-\log_{\sqrt{3}-\sqrt{2}} x \leq \log_x\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right).$$

После перехода в логарифмах к общему основанию $a=\sqrt{3}+\sqrt{2}$ (в качестве общего основания можно брать любое положительное число или выражение, отличное от 1), мы получим:

$$-\frac{\log_{\sqrt{3}+\sqrt{2}} x}{\log_{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)} \leq \frac{1}{\log_{\sqrt{3}+\sqrt{2}} x} \Leftrightarrow \log_{\sqrt{3}+\sqrt{2}} x \leq \frac{1}{\log_{\sqrt{3}+\sqrt{2}} x}.$$

Последнее неравенство легко решается с помощью новой неизвестной $y=\log_{\sqrt{3}+\sqrt{2}} x$:

$$y \leq \frac{1}{y} \Leftrightarrow \frac{(y-1)(y+1)}{y} \leq 0 \Leftrightarrow y \leq -1 \quad \text{или} \quad 0<y \leq 1.$$

Возвращаясь к основной неизвестной x, мы получим совокупность двух неравенств: $\log_{\sqrt{3}+\sqrt{2}} x \leq -1$ и $0<\log_{\sqrt{3}+\sqrt{2}} x \leq 1$, которые легко решаются:

$$\log_{\sqrt{3}+\sqrt{2}} x \leq -1 \Leftrightarrow \log_{\sqrt{3}+\sqrt{2}} x \leq \log_{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right) \Leftrightarrow 0<x<\sqrt{3}-\sqrt{2},$$

$$0<\log_{\sqrt{3}+\sqrt{2}} x \leq 1 \Leftrightarrow \log_{\sqrt{3}+\sqrt{2}} 1<\log_{\sqrt{3}+\sqrt{2}} x \leq \log_{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right) \Leftrightarrow 1<x<\sqrt{3}+\sqrt{2}.$$

Ответ: $\left(0;\sqrt{3}-\sqrt{2}\right]\cup\left(1;\sqrt{3}+\sqrt{2}\right]$.

Задача 5. Дана трапеция *ABCD* с основаниями *AD* и *BC*. Пусть *M* – середина отрезка *AD*, а *N* – произвольная точка отрезка *BC*. Пусть *K* – пересечение отрезков *CM* и *DN*, а *L* – пересечение отрезков *MN* и *AC*. Найдите все возможные значения площади треугольника *DMK*, если известно, что $AD:BC=3:2$, а площадь треугольника *ABL* равна 4.

Решение. Конфигурация, описанная в задаче, изображена на Рисунке 1. Для решения удобно $1/6$ длины нижнего основания AD обозначить какой-нибудь буквой, скажем, a. Тогда $AM=MD=3a$, $BC=4a$. Положение точки N на верхнем основании определяется длиной x отрезка NC.

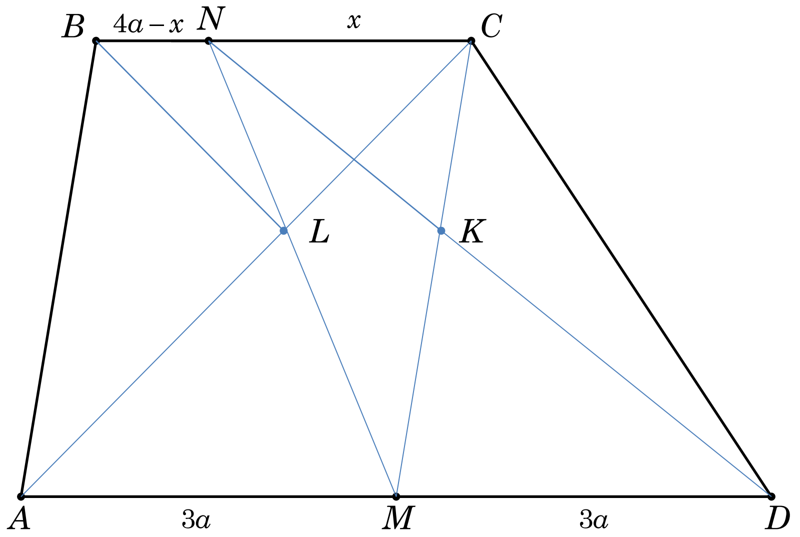

Рисунок 1

Рассмотрим теперь только часть этой конфигурации, изображённую на Рисунке 2. На этом рисунке мы убрали все элементы, которые не нужны на первом этапе решения, но провели высоты в треугольниках MKD и CNK и высоту трапеции. Их длины мы обозначили h_1, h_2 и h соответственно. Во введённых обозначениях интересующая нас площадь S треугольника DMK даётся формулой: $S = \dfrac{3ah_1}{2}$.

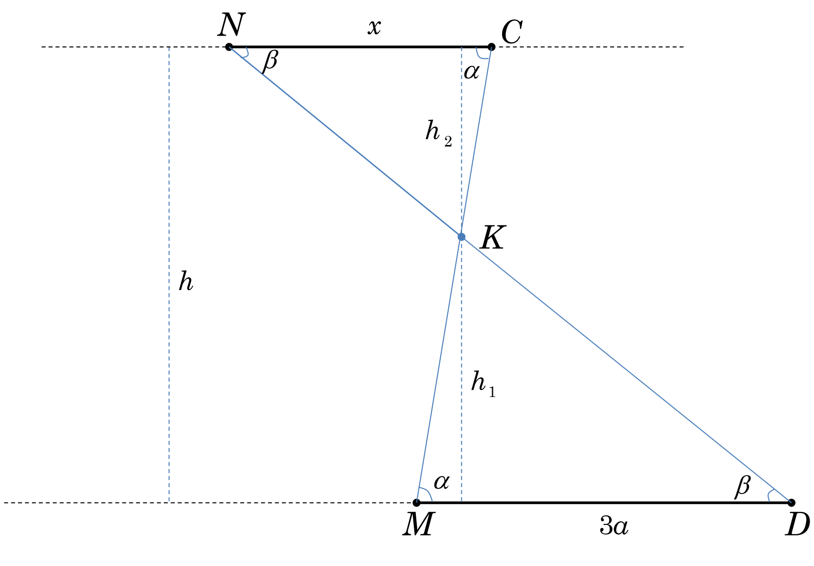

Рисунок 2

Поскольку прямые MD и NC параллельны, в треугольниках MKD и CNK равны углы при основаниях. Значит, эти треугольники подобны. Коэффициент подобия при переходе от ΔMKD к ΔCNK можно найти как отношение длин оснований этих треугольников: $k = \dfrac{x}{3a}$. В подобных треугольниках пропорциональны и высоты, так что $h_2 = kh_1$. С другой стороны, $h_1 + h_2 = h$. Поэтому $h_1 = \dfrac{h}{1+k}$, $h_2 = \dfrac{kh}{1+k}$. Таким образом, расстояния от точки K до оснований трапеции однозначно определяются параметрами a, x и h: $h_1 = \dfrac{h}{1+k} = \dfrac{3ah}{3a+x}$, $h_2 = \dfrac{kh}{1+k} = \dfrac{xh}{3a+x}$.

Теперь посмотрим на треугольники ALM и CLN (см. Рисунок 3).

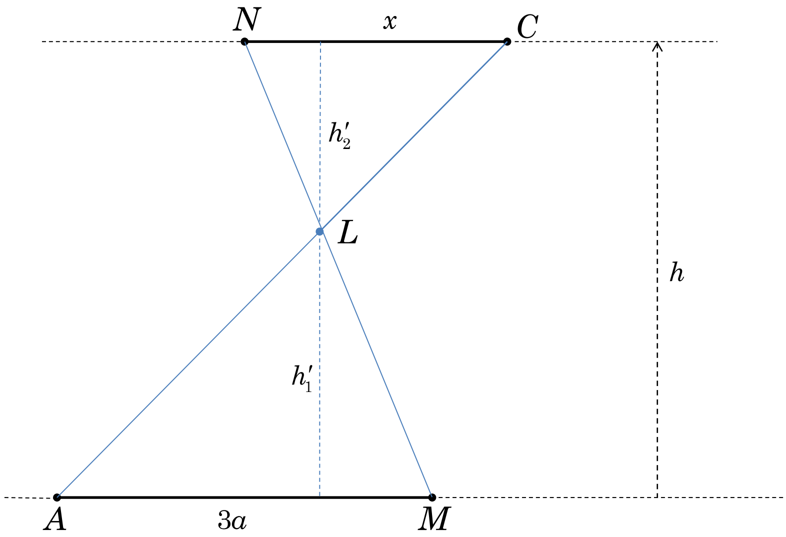

Рисунок 3

Конфигурации, изображённые на Рисунках 2 и 3, практически идентичны. Дословное повторение рассуждений, проведённых при анализе Рисунка 2, позволяет утверждать, что треугольники ALM и CLN подобны с тем же коэффициентом подобия $k = \dfrac{x}{3a}$, что и треугольники MKD и CNK. Это, в свою очередь, приводит к следующему важному выводу: расстояния h_1' и h_2' от точки L до нижнего и верхнего оснований такие же, как и расстояния h_1, h_2 до этих оснований от точки K.

Чтобы завершить решение, рассмотрим Рисунок 4, на котором изображена часть Рисунка 2.

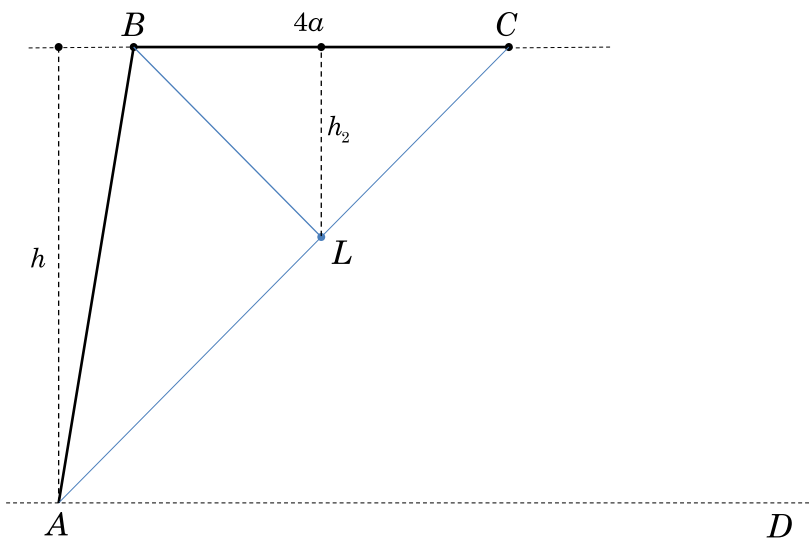

Рисунок 4

Из Рисунка 4 ясно, что данную нам площадь треугольника ABL естественно рассматривать как разность площадей треугольников ABC и BLC, которые равны $\frac{4ah}{2} = 2ah$ и $\frac{4ah_2}{2} = 2ah_2$ соответственно:

$$S_{ABL} = S_{ABC} - S_{BLC} \Leftrightarrow 4 - 2ah - 2ah_2 \Leftrightarrow 4 = 2a(h - h_2) \Leftrightarrow 4 = 2ah_1 \Leftrightarrow ah_1 = 2.$$

Поскольку, как мы установили в начале решения, интересующая нас площадь S треугольника DMK даётся формулой $S = \frac{3ah_1}{2}$, отсюда немедленно следует ответ: $S = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3$.

Ответ: 3.

Задача 6. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} ax^2 + 4ax - 8y + 6a + 28 \quad \le 0 \\ ay^2 - 6ay - 8x + 11a - 12 \quad \le 0 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

Решение. Обратим внимание на выражения ax^2+4ax и ay^2-6ay в первом и втором неравенствах соответственно. Их вид наводит на мысль о выделении полных квадратов:

$$ax^2+4ax=a\left(x^2+4x\right)=a\left(x^2+4x+4-4\right)=a\left(x+2\right)^2-4a,$$
$$ay^2-6ay=a\left(y^2-6y\right)=a\left(y^2-6y+9-9\right)=a\left(y-3\right)^2-9a.$$

Если мы выполним это преобразование, то исходная система неравенств примет вид:

$$\begin{cases} a\left(x+2\right)^2-8y+2a+28 & \le 0 \\ a\left(y-3\right)^2-8x+2a-12 & \le 0 \end{cases}$$

Имея в виду появившиеся выражения $x+2$ и $y-3$, выделим их в линейных частях неравенств:

$$\begin{cases} a\left(x+2\right)^2-8\left(y-3\right)-24+2a+28 & \le 0 \\ a\left(y-3\right)^2-8\left(x+2\right)+16+2a-12 & \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\left(x+2\right)^2-8\left(y-3\right)+2a+4 & \le 0 \\ a\left(y-3\right)^2-8\left(x+2\right)+2a+4 & \le 0 \end{cases}$$

Теперь, конечно, следует ввести новые неизвестные:

$$\begin{cases} u=x+2 \\ v=y-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=u-2 \\ y=v+3 \end{cases},$$

что приведёт исходную систему к виду:

$$\begin{cases} au^2-8v+2a+4 & \le 0 \\ av^2-8u+2a+4 & \le 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Поскольку между парами $\left(x,y\right)$ и $\left(u,v\right)$ имеется взаимнооднозначное соответствие, наша задача может быть переформулирована следующим образом:

Найдите все значения параметра a, при которых система (1) *имеет ровно одно решение.*

Система (1) обладает замечательным свойством: она не меняется при замене пары $\left(u,v\right)$ на пару $\left(v,u\right)$ (меняется порядок членов и неравенств, но после надлежащей перестановки мы опять получим систему (1)). Поэтому, если пара чисел $\left(u_0,v_0\right)$ является решением системы (1), то и пара $\left(v_0,u_0\right)$ будет решением. Следовательно, если система (1) имеет одно решение, то $u=v$, т.е. эта система равносильна системе

$$\begin{cases} au^2 - 8u + 2a + 4 \le 0 \\ v = u \end{cases} \qquad (2)$$

Система (2) имеет одно решение (u,v) тогда и только тогда, когда одно решение имеет первое неравенство этой системы.

Если $a = 0$, то неравенство $au^2 - 8u + 2a + 4 \le 0$ сводится к линейному неравенству $-8u + 4 \le 0$, множество решений которого, $u \ge \frac{1}{2}$, бесконечно. Поэтому $a = 0$ не удовлетворяет условию задачи.

Если $a \ne 0$, то неравенство $au^2 - 8u + 2a + 4 \le 0$ является квадратичным. Если $a < 0$, то ветви параболы $f(u) = au^2 - 8u + 2a + 4$ направлены вниз и, вне зависимости от знака дискриминанта, неравенство $au^2 - 8u + 2a + 4 \le 0$ имеет бесконечно много решений. Если же $a > 0$, то ветви параболы $f(u) = au^2 - 8u + 2a + 4$ направлены вверх и потому неравенство $au^2 - 8u + 2a + 4 \le 0$ имеет единственное решене тогда и только тогда, когда эта парабола касается оси u, т.е. дискриминант равен нулю:

$$64 - 4a(2a + 4) = 0 \Leftrightarrow a^2 + 2a - 8 = 0 \Leftrightarrow a = -1 \pm 3 = -4; 2$$

Поскольку мы рассматриваем случай $a > 0$, в ответ идёт только значение $a = 2$.

Ответ: $a = 2$.

Задача 7. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$ с боковыми рёбрами AA', BB', CC', DD'. На рёбрах AB, BC, CD, DA нижнего основания отмечены соответственно точки K, L, M, N, таким образом, что $AK : KB = 4 : 5$, $BL : LC = 3 : 1$, $CM : MD = 7 : 2$, $DN : NA = 3 : 1$. Пусть P, Q, R – центры сфер, описанных около тетраэдров $AKNA'$, $BLKB'$, $CMLC'$ соответственно. Найдите PQ, если известно, что $QR = 1$ и $AB : BC = 3 : 2$.

Решение. Пусть длина ребра AB равна $18a$. Поскольку $AB : BC = 3 : 2$, длина ребра BC равна $12a$.

Далее, равенство $AK + KB = AB$ и условие $AK : KB = 4 : 5$ влекут, что $AK = 8a$, $KB = 10a$.

Аналогично, $AN = 3a$, $ND = 9a$, $BL = 9a$, $LC = 3a$, $CM = 14a$, $MD = 4a$. Таким образом, a является наибольшей общей мерой всех упомянутых выше отрезков. Именно по этой причине мы обозначили a не длину ребра AB, а $1/18$ этой длины. Обозначим также общую длину боковых рёбер h.

Теперь введём в пространстве декартову систему координат как показано на Рисунке 5.

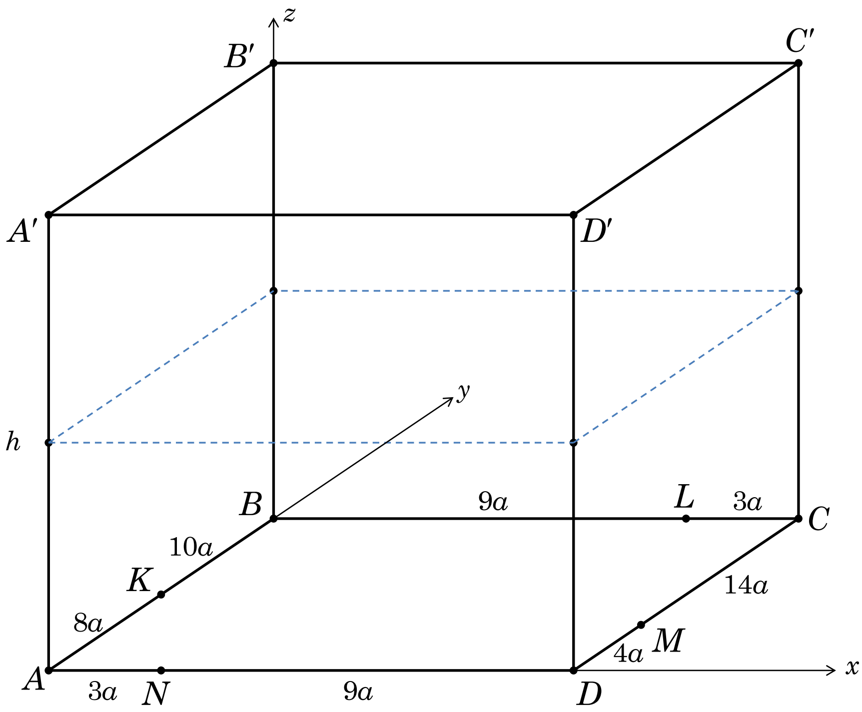

Рисунок 5

Координаты всех отмеченных точек легко выразить через параметры a и h:

$$\begin{array}{llll} A(0{,}0{,}0), & B(0{,}18a{,}0), & C(12a{,}18a{,}0), & D(12a{,}0{,}0); \\ A'(0{,}0{,}h), & B'(0{,}18a{,}h), & C'(12a{,}18a{,}h), & D'(12a{,}0{,}h); \\ K(0{,}8a{,}0), & L(9a{,}18a{,}0), & M(12a{,}4a{,}0), & N(3a{,}0{,}0). \end{array}$$

Теперь мы можем найти координаты точек P,Q,R.

Если r_1 – радиус сферы, описанной около тетраэдра $AKNA'$, то расстояния AP, KP, NP и $A'P$ равны r_1. Используя формулу для расстояния между двумя точками с заданными координатами, для неизвестных координат (x,y,z) (и радиуса сферы) мы получим систему из четырёх уравнений:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 & = & r_1^2 \\ x^2+(y-8a)^2+z^2 & = & r_1^2 \\ (x-3a)^2+y^2+z^2 & = & r_1^2 \\ x^2+y^2+(z-h)^2 & = & r_1^2 \end{cases}$$

Раскроем скобки во втором, третьем и четвёртом уравнениях, после чего заменим выражения $x^2+y^2+z^2$ на r_1^2:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 & = & r_1^2 \\ -16ay+64a^2 & = & 0 \\ -6ax+9a^2 & = & 0 \\ -2hz+h^2 & = & 0 \end{cases}$$

Из второго, третьего, четвёртого уравнений мы найдём координаты центра P: $x=\dfrac{3a}{2}$, $y=4a$, $z=\dfrac{h}{2}$, после чего из первого уравнения найдём радиус сферы, описанной около тетраэдра $AKNA'$ (хотя это и не требуется для решения задачи): $r_1=\dfrac{\sqrt{73a^2+h^2}}{2}$.

Практически дословное повторение проведённых рассуждений позволяет найти координаты центров и радиусы двух других сфер.

Для координат (x,y,z) точки Q и радиуса r_2 сферы, описанной около тетраэдра $BLKB'$ мы имеем:

$$\begin{cases} x^2+(y-18a)^2+z^2 & = & r_2^2 \\ (x-9a)^2+(y-18a)^2+z^2 & = & r_2^2 \\ x^2+(y-8a)^2+z^2 & = & r_2^2 \\ x^2+(y-18a)^2+(z-h)^2 & = & r_2^2 \end{cases}$$

Раскрывая скобки и вычитая первое уравнение из остальных, мы получим:

$$\begin{cases} x^2+(y-18a)^2+z^2 & = & r_2^2 \\ -18ax+81a^2 & = & 0 \\ 20ay-260a^2 & = & 0 \\ -2hz+h^2 & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r_2=\dfrac{\sqrt{181a^2+h^2}}{2} \\ x=\dfrac{9a}{2} \\ y=13a \\ z=\dfrac{h}{2} \end{cases}$$

Для координат (x,y,z) точки R и радиуса r_3 сферы, описанной около тетраэдра $CMLC'$ мы имеем:

$$\begin{cases} (x-12a)^2+(y-18a)^2+z^2 & = & r_3^2 \\ (x-12a)^2+(y-4a)^2+z^2 & = & r_3^2 \\ (x-9a)^2+(y-18a)^2+z^2 & = & r_3^2 \\ (x-12a)^2+(y-18a)^2+(z-h)^2 & = & r_3^2 \end{cases}$$

Раскрывая скобки и вычитая первое уравнение из остальных, мы получим:

$$\begin{cases} (x-12a)^2+(y-18a)^2+z^2 & = & r_3^2 \\ 28ay-308a^2 & = & 0 \\ 6ax-63a^2 & = & 0 \\ -2hz+h^2 & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r_3 = \dfrac{\sqrt{205a^2+h^2}}{2} \\ x = \dfrac{21a}{2} \\ y = 11a \\ z = \dfrac{h}{2} \end{cases}$$

Третья координата точек P и Q, как и для точки P, равна $\frac{h}{2}$. Таким образом центры всех трёх сфер лежат в плоскости, которая параллельна основаниям $ABCD$ и $A'B'C'D'$ параллелепипеда и проходит через середины боковых ребёр (см. Рисунок 5).

Данное нам по условию расстояние QR может быть выражено через параметры a и h:

$$QR = \sqrt{\left(\frac{9a}{2}-\frac{21a}{2}\right)^2+(13a-11a)^2+\left(\frac{h}{2}-\frac{h}{2}\right)^2} = \sqrt{40}a.$$

Условие $QR=1$ означает, что $a=\frac{1}{\sqrt{40}}$.

Теперь мы можем найти искомое расстояние PQ. Используя формулу для расстояния между двумя точками с заданными координатами, мы имеем:

$$PQ = \sqrt{\left(\frac{9a}{2}-\frac{3a}{2}\right)^2+(13a-4a)^2+\left(\frac{h}{2}-\frac{h}{2}\right)^2} = \sqrt{90}a = \frac{\sqrt{90}}{\sqrt{40}} = \frac{3}{2}.$$

Ответ: $PQ=\frac{3}{2}$.

Замечание. Конечно, решить задачу можно и без метода координат, чисто «геометрическими» рассуждениями.

Для этого прежде всего отметим, что рассматриваемая сфера проходит через точки A и A'. Поэтому её центр P равноудалён от этих точек. Из курса стереометрии известно, что геометрическое место точек, равноудалённых от двух данных – это плоскость, которая перпендикулярна прямой AA' и проходит через середину отрезка AA' (см. Рисунок 5). Во введённой системе координат для точек этой плоскости и только для них верно равенство $z=h/2$, так что третья координата точки P может быть найдена и без решения системы уравнений.

Аналогичные аргументы показывают, что в этой плоскости лежат и центры двух других сфер (так что и у них третьи координаты равны $h/2$). Поэтому расстояния между точками P, Q, R такие же, как и расстояния между их проекциями P^*, Q^*, R^* на плоскость нижнего основания.

Чтобы определить, где на плоскости нижнего основания расположена точка P^*, отметим следующее. Из равенства длин наклонных AP, KP, NP (это радиусы сферы, проходящей через эти точки) вытекает равенство их проекций: $AP^* = KP^* = NP^*$. Это означает, что точка P^* равноудалена от точек A, K, N, т.е. является центром окружности, описанной вокруг треугольника AKN (см. Рисунок 6). Этот треугольник прямоугольный. Следовательно, точка P^* является серединой гипотенузы KN.

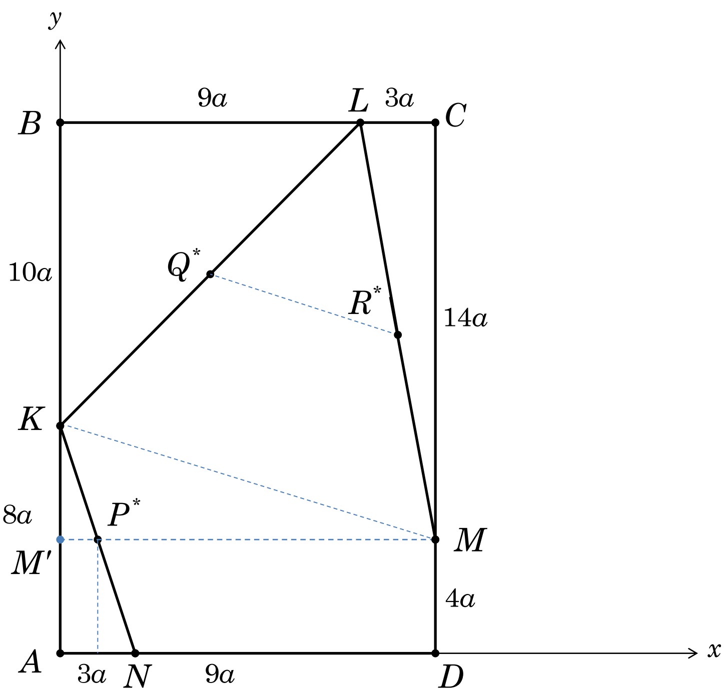

Рисунок 6

Во введённой системе координат первая и вторая координаты точки P совпадают с соответствующими координатами её проекции P^* на нижнее основание. Так как P^* – середина гипотенузы KN, проекции отрезка AP^* на оси x и y (т.е. соответствующие координаты точек P^* и P) равны половине длин соответствующих катетов, т.е. $\frac{3a}{2}$ и $4a$ соответственно. Кроме того, сам радиус окружности, описанной вокруг треугольника AKN равен половине гипотенузы, т.е. $\frac{1}{2}\sqrt{(3a)^2 + (8a)^2} = \frac{\sqrt{73}}{2}a$. Поскольку мы знаем длину проекции наклонной, можно найти и длину самой наклонной, т.е. радиус первой сферы (хотя это и не требуется для решения задачи):

$$r_1 = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{73}}{2}a\right)^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{73a^2 + h^2}}{2}.$$

Аналогичные рассуждения позволяют определить положение точек Q^* и R^* – они являются серединами гипотенуз KL и LM прямоугольных треугольников KBL и MCL соответственно.

Отрезок Q^*R^* – это средняя линия треугольника KLM. Поэтому его длина равна половине длины отрезка KM. Чтобы найти KM, опустим перпендикуляр MM' из точки M на AB (см. Рисунок 6; исходные данные задачи таковы, что MM' проходит через P^*, но вообще говоря, это не верно). В получившемся прямоугольном треугольнике KMM' отрезок KM будет гипотенузой, а катеты KM' и MM' равны $8a-4a=4a$ и $12a$ соответственно. Значит, $KM=\sqrt{(4a)^2+(12a)^2}=2\sqrt{40}a$, а $Q^*R^*=\sqrt{40}a$. С другой стороны, $Q^*R^*=QR=1$. Отсюда, как и в первом способе решения, мы найдём параметр a; он равен $1/\sqrt{40}$.

Отрезок P^*Q^*, длина которого равна искомому расстоянию PQ, является средней линией треугольника NKL. Его длина равна половине длины отрезка NL. Чтобы найти NL, опустим перпендикуляр LL' из точки L на AD. В получившемся прямоугольном треугольнике NLL' отрезок NL будет гипотенузой, а катеты NL' и LL' равны $9a-3a=6a$ и $18a$ соответственно. Значит, $NL=\sqrt{(6a)^2+(18a)^2}=3\sqrt{40}a$, $P^*Q^*=\dfrac{3\sqrt{40}a}{2}=\dfrac{3}{2}$.

Задача 8. Найдите все пары чисел x,y из промежутка $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$, при которых достигается минимум выражения

$$\left(\frac{\sqrt{3}\sin y}{\sqrt{2}\sin(x+y)}+1\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}\sin x}{3\sin y}+1\right)^2\cdot\left(\frac{\sin(x+y)}{7\sqrt{3}\sin x}+1\right)^4.$$

Решение. В задаче речь идёт о нахождении наименьшего значения функции

$$F(x,y)=\left(\frac{\sqrt{3}\sin y}{\sqrt{2}\sin(x+y)}+1\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}\sin x}{3\sin y}+1\right)^2\cdot\left(\frac{\sin(x+y)}{7\sqrt{3}\sin x}+1\right)^4$$

от двух независимых переменных $x,y\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

В высшей математике имеется стандартный общий метод решения подобных задач, но на вступительном экзамене речь может идти только о методе, основанном на специфическом виде функции $F(x,y)$. Обычно подобные задачи решаются следующим образом. Анализируемая функция приводится к виду, который позволяет использовать какое-то классическое неравенство: неравенство, связывающее среднее арифметическое и среднее геометрическое, неравенство Коши-Буняковского, неравенство треугольника, неравенство Бернулли и т.д. С помощью этого неравенства находится верхняя или нижняя (в зависимости от вопроса задачи) оценка для анализируемой функции, после чего доказывается, что эта граница действительно достигается при допустимых значениях аргументов. Следует отметить, что на самом деле вопрос задачи (найти наибольшее или наименьшее значение) определяется составителем задачи не произвольно, а тем, какую оценку, верхнюю или нижнюю, даёт применяемое классическое неравенство.

Для решения нашей задачи ключевым является следующее наблюдение: произведение выражений

$$a = \frac{\sqrt{3}\sin y}{\sqrt{2}\sin(x+y)} > 0, \quad b = \frac{\sqrt{2}\sin x}{\sin y} > 0, \quad c = \frac{\sin(x+y)}{\sqrt{3}\sin x} > 0 \qquad (3)$$

тождественно равно 1. Это естественно приводит к следующей идее:

1. ввести новые переменные a,b,c по формуле (3) и тем самым представить исходное выражение в виде

$$F = (a+1)\cdot\left(\frac{b}{3}+1\right)^2\cdot\left(\frac{c}{7}+1\right)^4 = \frac{1}{3^2 7^4}(a+1)\cdot(b+3)^2\cdot(c+7)^4; \qquad (4)$$

2. оценить выражение (4) снизу с помощью неравенства для среднего арифметического и среднего геометрического.

Сомножители в правой части выражения (4), $a+1$, $(b+3)^2$, $(c+7)^4$ устроены однотипно; они имеют вид $(t+n-1)^{n/2}$, где $t>0$, а $n=2,4,8$. В выражении $(t+n-1)^{n/2}$ член $n-1$ в основании степени можно представить в виде суммы $n-1$ единиц: $t+n-1 = t+\underbrace{1+\ldots+1}_{n-1}$. Теперь это основание является суммой n положительных слагаемых и его можно оценить снизу с помощью неравенства для среднего арифметического и среднего геометрического n неотрицательных чисел $a_1,\ldots,a_n$:

$$\frac{a_1+\ldots+a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1\ldots a_n}.$$

При $a_1 = t, a_2 = 1, \ldots, a_n = 1$ из этого классического неравенства мы получим:

$$\frac{t+\underbrace{1+\ldots+1}_{n-1}}{n} \ge \sqrt[n]{t} \Leftrightarrow t+n-1 \ge n\sqrt[n]{t}, \qquad (5)$$

так что

$$(t+n-1)^{n/2} \ge n^{n/2}\sqrt{t}, \qquad (6)$$

причём знак равенства в (6) достигается тогда и только тогда, когда $t=1$.

В частности, при $n=2, t=a$, $n=4, t=b$, $n=8, t=c$ неравенство (6) даёт:

$$\left(a+1\right)\ge 2\sqrt{a},$$
$$(b+3)^2 \ge 2^4\sqrt{b},$$
$$\left(c+7\right)^4 \ge 2^{12}\sqrt{c},$$

причём знак равенства достигается тогда и только тогда, когда, соответственно, $a=1$, $b=1$, $c=1$. Перемножая эти неравенства, мы имеем:

$$F \ge \frac{2^{17}}{3^2 7^4}\sqrt{abc},$$

причём знак равенства достигается тогда и только тогда, когда $a=b=c=1$.

Если $abc=1$, то выражение (4) на самом деле является функцией не трёх, а только двух положительных переменных, скажем a и b (если исключать переменную c по формуле $c=\dfrac{1}{ab}$). В этом случае можно утверждать, что $F\ge\dfrac{2^{17}}{3^2 7^4}$, причём знак равенства в этом нестрогом неравенстве достигается тогда и только тогда, когда знак равенства достигается в использованных неравенствах для среднего арифметического и среднего геометрического, т.е. при $a=1, b=1, \dfrac{1}{ab}=1 \Leftrightarrow a=1, b=1$.

Однако отсюда, вообще говоря, не следует, что $\dfrac{2^{17}}{3^2 7^4}$ является наименьшим значением функции $F\left(x,y\right)$. Мы можем утверждать это только, если существуют x, y из промежутка $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$, для которых верны равенства

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{3}\sin y}{\sqrt{2}\sin(x+y)} = 1 \\ \dfrac{\sqrt{2}\sin x}{\sin y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3}\sin y = \sqrt{2}\sin(x+y) \\ \sqrt{2}\sin x = \sin y \end{cases},$$

т.е. последняя тригонометрическая система имеет решение $x, y \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Чтобы решить эту систему, запишем первое уравнение в виде

$$\sqrt{3}\sin y = \sqrt{2}\left(\sin x\cos y + \cos x\sin y\right)$$

и исключим, используя положительность $\cos y$, переменную y с помощью второго уравнения и основного тригонометрического тождества: $\sin y = \sqrt{2}\sin x$,

$\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-2\sin^2 x} = \sqrt{2\cos^2 x - 1}$. В результате первое уравнение примет вид:

$$\sqrt{3}\sqrt{2}\sin x = \sqrt{2}\left(\sin x\sqrt{2\cos^2 x - 1} + \sqrt{2}\cos x \sin x\right).$$

Поскольку $\sin x > 0$, это уравнение равносильно уравнению

$$\sqrt{3} = \sqrt{2\cos^2 x - 1} + \sqrt{2}\cos x,$$

которое легко решается введением новой неизвестной $z = \cos x$:

$$\sqrt{3} = \sqrt{2z^2 - 1} + \sqrt{2}z \Leftrightarrow \sqrt{3} - \sqrt{2}z = \sqrt{2z^2 - 1} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 2\sqrt{6}z + 2z^2 = 2z^2 - 1 \\ \sqrt{3} - \sqrt{2}z \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow z = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Таким образом, $\cos x = \frac{\sqrt{6}}{3}$. Значит, $\cos y = \sqrt{2\cdot\frac{6}{9} - 1} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ и, соответственно, $x = \arccos\frac{\sqrt{6}}{3}$, $y = \arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $x = \arccos\frac{\sqrt{6}}{3}$; $y = \arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Замечание. Неравенство (5) можно доказать и графически, используя выпуклость вверх функции $f(t) = \sqrt[n]{t}$ (см. Рисунок 7).

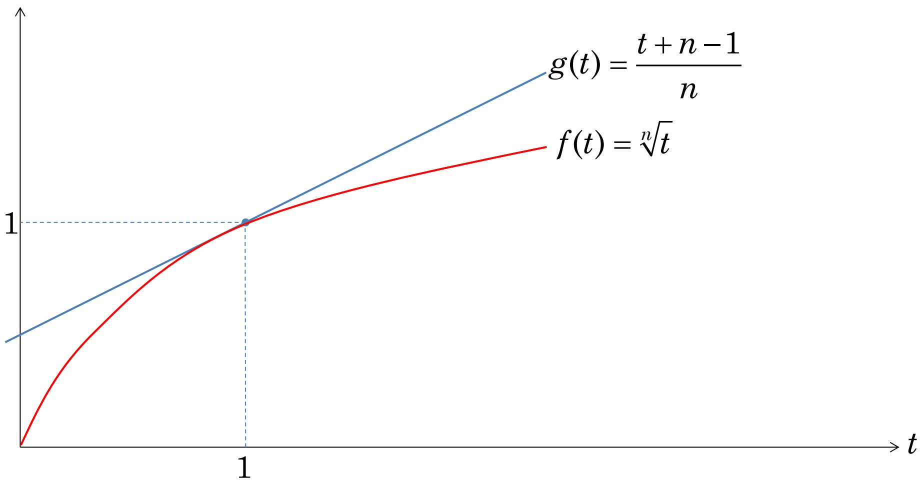

Рисунок 7

Поскольку $f'(t)=\frac{1}{n}t^{1/n-1}$, касательной к графику функции $f(t)=\sqrt[n]{t}$ в точке с абсциссой $t_0=1$ будет функция $\frac{1}{n}(t-1)+1=\frac{t+n-1}{n}\equiv g(t)$. Выпуклость вверх функции $f(t)=\sqrt[n]{t}$ означает, что её график лежит ниже любой касательной и совпадает с касательной только в точке касания.

ДВИ-2019, вариант 192

Задача 1. Найдите наибольшее целое число, не превосходящее $\sqrt{2019\cdot 2031-2017\cdot 2033}$.

Решение. Прежде всего, конечно, нужно вычислить значение числового выражения под знаком радикала.

Самый простой способ сделать это (и, вне всякого сомнения, самый предпочтительный в условиях экзамена) заключается в прямом проведении всех вычислений:

$$2019\cdot 2031=4100589,\ 2017\cdot 2033=4100561,\ 4100589-4100561=28.$$

Эти выкладки можно немного упростить, если представить числа 2019, 2031, 2017, 2033 в виде $a+d$, где $a=2000$, а d — разница между рассматриваемым числом и числом 2000 (в данном случае d — это двузначное число, образованное двумя последними цифрами рассматриваемых чисел). Тогда выражение под знаком радикала примет вид $(a+19)(a+31)-(a+17)(a+33)$, так что после раскрытия скобок мы получим:

$$\left(a^2+50a+19\cdot 31\right)-\left(a^2+50a+17\cdot 33\right)=19\cdot 31-17\cdot 33=581-561=28.$$

Предложенный метод можно модифицировать и ещё больше упростить выкладки. Именно, запишем числа 2019 и 2017 в виде: $2019=x+1$, $2017=x-1$, где $x=2018$, а числа 2031 и 2033 — в виде: $2031=y-1$, $2033=y+1$, где $a=2032$. Тогда выражение под знаком радикала примет вид $(x+1)(y-1)-(x-1)(y+1)$, так что после раскрытия скобок мы получим:

$$(xy-x+y-1)-(xy+x-y-1)=2(y-x)=2\cdot(2032-2018)=2\cdot 14=28.$$

Дальнейшего упрощения можно добиться, если отметить, что $19+31=17+33=50$. Это означает, что среднее арифметическое чисел 2019 и 2031 так же как и чисел 2017 и 2033 равно 2025. Значит, и среднее арифметическое набора 2019, 2031, 2017, 2033 равно 2025. Если центрировать этот набор, т.е. в качестве a взять среднее арифметическое этих чисел, то выражение под знаком радикала примет вид $(a-6)(a+6)-(a-8)(a+8)$ и после раскрытия скобок мы получим:

$$\left(a^2-6^2\right)-\left(a^2-8^2\right)=8^2-6^2=(8-6)\cdot(8+6)=2\cdot 14=28.$$

При всём относительном «изяществе» этих методов следует отметить, что на экзамене вряд ли разумно тратить время на поиски подобных «рациональных» решений. Это замечание в равной степени относится ко всем задачам; лучший способ — это способ, естественно вытекающий из условия задачи, для которого вы ясно видите дальнейший план решения и не сомневаетесь, что сможете реализовать этот план и получить ответ за разумное время.

Наибольшее целое число, не превосходящее данное действительное число x, называется целой частью этого числа и обозначается $[x]$. Если число x неотрицательно и записано в виде десятичной дроби (неважно, конечной или бесконечной), то $[x]$ — это целое число, стоящее перед десятичной запятой (десятичной точкой). Например, целая часть числа $x = 20.23$ равна 20. Если число x отрицательно и записано в виде десятичной дроби (неважно, конечной или бесконечной), то $[x]$ на 1 меньше отрицательного целого числа, стоящее перед десятичной запятой (десятичной точкой). Например, целая часть числа $x = -20.23$ равна -21. В общем случае целая часть числа x однозначно определяется как такой целое число n, что $n \le x < n+1$. Иначе говоря, чтобы найти целую часть числа, его нужно «зажать» между двумя последовательными целыми числами.

Используя эту терминологию, мы можем сказать, что задача сводится к определению целой части $\left[\sqrt{28}\right]$ числа $\sqrt{28}$. Чтобы $\sqrt{28}$ «зажать» между двумя последовательными целыми числами, нужно число 28 (которое стоит под знаком радикала) «зажать» между двумя последовательными квадратными числами (числами, которые являются квадратами неотрицательных целых чисел), т.е. между числами из списка 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, … . Ближайшие к 28 квадратные числа – это 25 и 36: $25 < 28 < 36$. Следовательно, $5 < \sqrt{28} < 6$, так что $\left[\sqrt{28}\right] = 5$.

Ответ: 5.

Задача 2. Найдите $a+b+c$, если известно, что $a+3b=2$, $b+3c=4$, $c+3a=6$.

Решение. По смыслу задачи, видимо, предполагается (хотя определённо судить об этом нельзя), что числа a,b,c, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} a+3b=2, \\ b+3c=4, \\ c+3a=6, \end{cases} \tag{1}$$

существуют. Сложив почленно все три уравнения, мы получим:

$$(a+b+c)+3(b+c+a)=12 \quad \Leftrightarrow \quad 4(a+b+c)=12,$$

так что искомая сумма $a+b+c$ равна 3.

Ещё раз подчеркнём, что этот результат получен в *предположении*, что числа a,b,c, о которых идёт речь в задаче, существуют.

Если явно не оговорено противное, при решении задач, подобных нашей, общепринятые стандарты математических рассуждений требуют предварительного ответа на вопрос, *существуют ли такие числа*, а в случае необходимости и ещё на один вопрос: *если существуют, то сколько таких троек* (a,b,c). Имея в виду это замечание, предпочтительнее просто решить систему (1).

Это легко сделать методом исключения. Из первого уравнения мы имеем: $a=2-3b$. Это равенство означает, что мы легко найдём неизвестную a, если сможем найти неизвестную b — в этом смысле неизвестная a исключена и находить нужно только неизвестные b и c. Для этого воспользуемся вторым и третьим уравнениями системы (1), в которых заменим неизвестную a выражением $2-3b$. В результате мы получим систему двух уравнений с двумя неизвестными b и c:

$$\begin{cases} b+3c=4, \\ -9b+c=0. \end{cases}$$

Проделанные преобразования превратили систему из трёх уравнений с тремя неизвестными в систему из двух уравнений с двумя неизвестными. Таким образом, мы «исключили» из задачи одну неизвестную и одно уравнение. В этом понижении «размера» задачи заключается суть метода исключения. В некоторых учебниках считают, что суть метода заключается в *подстановке* вместо одной из неизвестных формулы, которая выражает эту неизвестную через остальные. Соответственно, сам метод называет не методом исключения, а методом подстановки.

Чтобы решить полученную систему относительно b и c, ещё раз уменьшим «размер» задачи. Для этого из первого уравнения исключим неизвестную b: $b=4-3c$, после чего подставим во второе уравнение вместо неизвестной b выражение $4-3c$. В результате второе уравнение превратится в уравнение с одной неизвестной c:

$$-9(4-3c)+c=0 \quad \Leftrightarrow \quad 28c=36,$$

которое имеет единственный корень: $c=\dfrac{9}{7}$.

Теперь мы можем последовательно найти ранее исключённые неизвестные:

$$b=4-3c\equiv 4-3\cdot\frac{9}{7}=\frac{1}{7}, \quad a=2-3b\equiv 2-3\cdot\frac{1}{7}=\frac{11}{7}.$$

Итак, тройка чисел, удовлетворяющих условию задачи, существует и притом только одна. Для этой тройки мы имеем:

$$a+b+c=\frac{11}{7}+\frac{1}{7}+\frac{9}{7}=\frac{11+1+9}{7}=\frac{21}{7}=3.$$

Ответ: 3.

Задача 3. Решите уравнение $5\sin x + 3\cos 2x = 4$.

Решение. С помощью формулы $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ сделаем так, чтобы в уравнении стояли тригонометрические функции одного аргумента x:

$$5\sin x + 3(\cos^2 x - \sin^2 x) = 4.$$

Теперь сделаем так, чтобы в уравнении стояла одна и та же тригонометрическая функция. Поскольку $\sin x$ стоит в первой степени, его нельзя выразить через $\cos x$ с помощью «простой» формулы — основное тригонометрическое тождество даёт только равенство $|\sin x| = \sqrt{1-\cos^2 x}$, т.е. равенство для модуля $\sin x$, а не для $\sin x$ (любимое многими школьниками равенство $\sin x = \pm\sqrt{1-\cos^2 x}$ само по себе не имеет точного смысла и является жаргонной записью более сложного утверждения). С другой стороны, $\cos x$ стоит во второй степени. Поэтому с помощью основного тригонометрического тождества его можно выразить через $\sin x$, что приведёт исходное уравнение к виду:

$$5\sin x + 3\cdot(1-2\sin^2 x) = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 6\sin^2 x - 5\sin x + 1 = 0.$$

Теперь нашу задачу можно решить с помощью новой неизвестной $t = \sin x$:

$$6t^2 - 5t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{12} = \frac{5 \pm 1}{12} = \frac{1}{2}; \frac{1}{3}.$$

Возвращаясь к основной неизвестной x, мы получим, что исходное уравнение равносильно совокупности двух простейших тригонометрических уравнений: $\sin x = \frac{1}{2}$ и $\sin x = \frac{1}{3}$, для которых мы немедленно можем выписать ответы: $x = (-1)^m \frac{\pi}{6} + \pi m, m \in Z$ (для первого уравнения), $x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{3} + \pi n, n \in Z$ (для второго).

Ответ: $(-1)^m \frac{\pi}{6} + \pi m,\ (-1)^n \arcsin\frac{1}{3} + \pi n,\ m, n \in \mathbb{Z}$.

Задача 4. Решите неравенство $3^{\log_3^2 x} + 5x^{\log_3 x} < 18$.

Решение. Первое слагаемое в левой части упростим с помощью тождества $a^{\log_a b} = b$ (которое справедливо на множестве $a > 0,\ b > 0,\ a \neq 1$):

$$3^{\log_3^2 x} = 3^{\log_3 x \cdot \log_3 x} = \left(3^{\log_3 x}\right)^{\log_3 x} = x^{\log_3 x}.$$

Теперь неравенство примет вид:

$$x^{\log_3 x}+5x^{\log_3 x}<18 \quad\Leftrightarrow\quad 6x^{\log_3 x}<18 \quad\Leftrightarrow\quad x^{\log_3 x}<3.$$

Чтобы решить последнее неравенство, прологарифмируем его почленно по основанию 3. Это преобразование законно, т.к. обе части этого неравенства положительны, и, очевидно, равносильно:

$$x^{\log_3 x}<3 \quad\Leftrightarrow\quad \log_3\left(x^{\log_3 x}\right)<\log_3 3.$$

Применяя тождество $\log_a\left(x^k\right)=k\log_a x$ и учитывая, что $\log_3 3=1$, мы получим:

$$\log_3^2 x<1 \Leftrightarrow \left|\log_3 x\right|<1 \Leftrightarrow -1<\log_3 x<1 \Leftrightarrow \log_3\frac{1}{3}<\log_3 x<\log_3 3 \Leftrightarrow \frac{1}{3}<x<3.$$

Ответ: $\left(\frac{1}{3},3\right)$.

Задача 5. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC отмечены точки D и E таким образом, что $AD:DB=BE:EA=1:5$. Найдите AB, если известно, что площадь треугольника ABC равна 30, а тангенс угла $\angle DCE$ равен 2.

Решение. Конфигурация, о которой идёт речь в задаче, изображена на Рисунке 1. Чтобы отметить точки D и E, удобно разбить гипотенузу на 6 равных частей. Тогда точка D отделяет первый, считая от точки A, отрезок, а точка E — последний. Длину $1/6$ части гипотенузы мы обозначим c, так что искомая величина равна $6c$.

Далее, естественно провести через точки, которые делят гипотенузу на 6 равных частей, прямые, параллельные катетам. В силу теоремы Фалеса они разделят каждый катет на 6 равных отрезков. Длину $1/6$ части катета CB мы обозначим a, а длину $1/6$ части катета CA — b. Кроме того, для сокращения записей обозначим φ величину угла $\angle DCE$.

Условие, что площадь треугольника ABC равна 30, даёт первое соотношение между величинами a и b:

$$\frac{6a\cdot 6b}{2}=30 \Leftrightarrow ab=\frac{5}{3}.$$

Второе уравнение получится из условия $\operatorname{tg}\varphi=2$. Поскольку мы имеем дело с «прямой» конфигурацией, естественно превращать это условие в уравнение методом координат. Основой, конечно, должно служить скалярное произведение векторов $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{CE}$, в одну из формул для которого входит $\cos\varphi$. Последняя величина легко находится из известного тождества $1+\operatorname{tg}^2\varphi=\frac{1}{\cos^2\varphi}$: $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

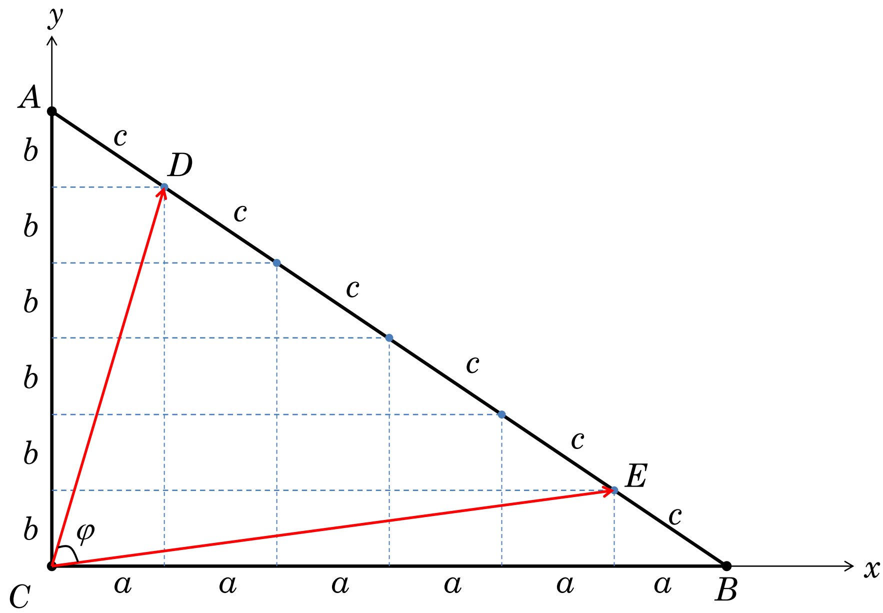

Рисунок 1

Чтобы реализовать этот план, введём декартову систему координат как показано на Рисунке 1. Проделанные ранее дополнительные построения позволяют без труда найти координаты всех точек, отмеченных на этом рисунке: $A(0,6b)$, $B(6a,0)$, $C(0,0)$, $D(a,5b)$, $E(5a,b)$ и, следовательно, координаты векторов $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{CE}$: $\overrightarrow{CD}=(a,5b)$, $\overrightarrow{CE}=(5a,b)$. Поэтому $\left|\overrightarrow{CD}\right|=\sqrt{a^2+25b^2}$, $\left|\overrightarrow{CE}\right|=\sqrt{25a^2+b}$, $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CE}=(a,5b)\cdot(5a,b)=5a^2+5b^2$. Теперь формула $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CE}=\left|\overrightarrow{CD}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CE}\right|\cdot\cos\varphi$ даёт:

$$5a^2+5b^2=\sqrt{a^2+25b^2}\cdot\sqrt{25a^2+b^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\Leftrightarrow 5\left(a^2+b^2\right)=\sqrt{\frac{25\left(a^4+b^4\right)+626a^2b^2}{5}}. \qquad (2)$$

В силу теоремы Пифагора $a^2+b^2=c^2$. К неизвестной c можно свести дело и в выражении a^4+b^4. Выделяя полный квадрат, мы имеем:

$$a^4+b^4=\left(a^2+b^2\right)^2-2a^2b^2=c^4-2a^2b^2.$$

Поскольку $ab=5/3$, уравнение (2) превращается в уравнение относительно c:

$$5c^2=\sqrt{\frac{25c^4+25\cdot 64}{5}}\Leftrightarrow 5c^2=\sqrt{5c^4+320}\Leftrightarrow 25c^4=5c^4+320\Leftrightarrow c^4=16\Leftrightarrow c=2.$$

Поэтому $AB=12$.

Ответ: $AB=12$.

Замечание. Вместо решения, основанного на методе координат, можно предложить и много других, «геометрических», решений, например, такие.

Способ 1. Для получения второго уравнения вместо скалярного произведения векторов $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{CE}$ будем использовать теорему косинусов для треугольника CDE: $DE^2 = CD^2 + CE^2 - 2 \cdot CD \cdot CE \cdot \cos\varphi$ (которая, в сущности, равносильна использованной ранее формуле для скалярного произведения векторов). Так как $DE = 4c$, $CD = \sqrt{a^2 + 25b^2}$, $CE = \sqrt{25a^2 + b^2}$, $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}$, последнее равенство примет вид:

$$16c^2 = \left(a^2 + 25b^2\right) + \left(25a^2 + b^2\right) - \frac{2}{\sqrt{5}}\sqrt{a^2 + 25b^2}\sqrt{25a^2 + b^2}$$

$$\Updownarrow$$

$$16c^2 = 26a^2 + 26b^2 - \frac{2}{\sqrt{5}}\sqrt{a^2 + 25b^2}\sqrt{25a^2 + b^2}$$

Поскольку $a^2 + b^2 = c^2$, последнее равенство превращается в (2), из которого, как мы уже показали, после несложных преобразований получается ответ.

Способ 2. Из Рисунка 1 ясно, что угол DCE равен разности углов DCB и ECB, тангенсы которых равны $\frac{5b}{a} = 5t$ и $\frac{b}{5a} = \frac{t}{5}$, где $t = \frac{b}{a} = \frac{6b}{6a} = \operatorname{tg} B$ (величина t является «коэффициентом деформации» клеток на Рисунке 1). Поэтому

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\left(\angle DCB - \angle ECB\right) = \frac{\operatorname{tg}\angle DCB - \operatorname{tg}\angle ECB}{1 + \operatorname{tg}\angle DCB \cdot \operatorname{tg}\angle ECB} = \frac{\frac{5b}{a} - \frac{b}{5a}}{1 + \frac{5b}{a} \cdot \frac{b}{5a}} = \frac{24ab}{5\left(a^2 + b^2\right)}.$$

Произведение ab, как мы показали, в силу условия $S_{\Delta ABC} = 30$ равно $\frac{5}{3}$, а $a^2 + b^2 = c^2$. Поэтому $\operatorname{tg}\varphi == \frac{24 \cdot \frac{5}{3}}{5c^2} = \frac{8}{c^2}$. Теперь условие $\operatorname{tg}\varphi = 2$ даёт: $c^2 = 4$, так что $c = 2$, а $AB = 6c = 12$.

Задача 6. Найдите все пары вещественных чисел (a,b), при которых неравенство

$$3a(x+3)^4 + 8b(x-3)^4 \geq x^4 + 54x^2 + 81$$

справедливо для всех вещественных x.

Решение. Раскроем скобки в выражениях $(x+3)^4$ и $(x-3)^4$:

$$(x+3)^4=\left((x+3)^2\right)^2=\left(x^2+6x+9\right)^2=x^4+36x^2+81+2\cdot\left(6x^3+9x^2+54x\right)$$
$$=x^4+12x^3+54x^2+108x+81,$$
$$(x-3)^4=\left((x-3)^2\right)^2=\left(x^2-6x+9\right)^2=x^4+36x^2+81+2\cdot\left(-6x^3+9x^2-54x\right)$$
$$=x^4-12x^3+54x^2-108x+81.$$

Обе формулы содержат одно и то же выражение x^4+54x^2+81 (которое к тому же стоит в правой части исходного неравенства). Отличаются они только членами, содержащими x в нечётной степени: в первой формуле стоит $12x^3+108x$, а во второй — противоположное выражение: $-12x^3-108x$. Поэтому

$$x^4+54x^2+81=\frac{(x+3)^4+(x-3)^4}{2}.$$

Это наблюдение позволяет переписать исходное неравенство в виде:

$$3a(x+3)^4+8b(x-3)^4\geq\frac{(x+3)^4+(x-3)^4}{2}$$

или, что равносильно, в виде:

$$\left(3a-\frac{1}{2}\right)(x+3)^4+\left(8b-\frac{1}{2}\right)(x-3)^4\geq 0. \qquad (3)$$

После этого преобразования обратимся к вопросу задачи: *при каких a и b наше неравенство выполнено при всех x ?*

Если неравенство (3) выполнено при всех x, то, в частности, оно выполнено при $x=-3$ и при $x=3$. Подставляя в (3) эти значения x, мы получим, что необходимым условием справедливости неравенства (3) при всех x является неотрицательность коэффициентов $3a-\frac{1}{2}$ и $8b-\frac{1}{2}$. С другой стороны, если эти коэффициенты неотрицательны, то левая часть (3), очевидно, тоже неотрицательна. Итак, условие задачи выполнено тогда и только тогда, когда одновременно справедливы два неравенства: $3a-\frac{1}{2}\geq 0$ и $8b-\frac{1}{2}\geq 0$.

Ответ: $\left\{(a,b)\,\middle|\,a\geq\frac{1}{6},b\geq\frac{1}{16}\right\}.$

Задача 7. Плоскость π проходит через три вершины прямоугольного параллелепипеда, отсекая от него тетраэдр. Два шара максимально возможных радиусов находятся внутри сферы, описанной около этого параллелепипеда, по разные стороны от плоскости π. Найдите отношение радиусов этих шаров, если известно, что рёбра параллелепипеда равны 1, 2, 4.

Решение. Обозначим вершины данного параллелепипеда как показано на Рисунке 2 и введём декартову систему координат в пространстве как показано на том же рисунке.

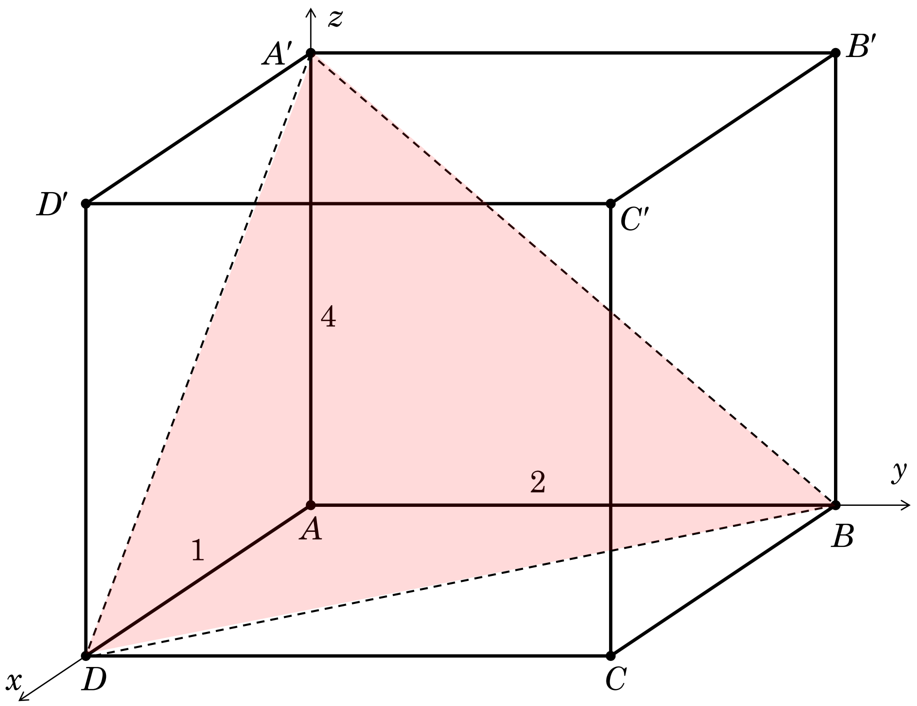

Рисунок 2

Координаты вершин параллелограмма, очевидно, есть: $A(0,0,0)$, $B(0,2,0)$, $C(1,2,0)$, $D(1,0,0)$, $A'(0,0,4)$, $B'(0,2,4)$, $C'(1,2,4)$, $D'(1,0,4)$.

Теперь разберёмся, через какие три вершины параллелепипеда должна проходить плоскость π, чтобы отсечь от него тетраэдр.

Случай 1 *– эти три вершины лежат в одной грани* Γ*.* Одна из аксиом стереометрии постулирует, что через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость и притом только одну. Поэтому вся грань Γ лежит в плоскости π. В этом случае π отсекает от параллелепипеда эту грань, а не тетраэдр.

Случай 2 *– две вершины из этих трёх лежат в одной грани* Γ*, скажем в грани* $ABCD$*, причём на одном ребре, скажем на ребре* AB *(так что эти вершины – это* A *и* B*), а третья вершина не лежит в этой грани (ясно, что указание на определённые грань и ребро не нарушает общности).* Тогда третьей вершиной не может быть ни одна из точек D, C, A', B' (тогда все три очки оказываются в одной грани). Остаётся две возможности: третья точка или D', или C'. В каждом случае плоскость π делит параллелепипед на две призмы, а не отсекает тетраэдр.

Случай 3 *– две вершины из этих трёх лежат в одной грани* Γ*, скажем в грани* $ABCD$*, причём на разных рёбрах, т.е. на какой-то диагонали прямоугольника* $ABCD$ *(скажем, на диагонали* BD*, так что эти вершины – это* B *и* D*), а третья вершина не лежит в этой грани (ясно, что указание на определённые грань и две точки на этой грани не нарушает общности).* Тогда третьей вершиной не может быть ни точка D', ни точка B' (тогда две точки оказываются на одном ребре). Остаётся две возможности: третья точка или A', или C'. В каждом случае плоскость π отсекает от параллелепипеда тетраэдр.

В силу симметрии, не нарушая общности можно считать, что плоскость π проходит через вершины B, D и A'.

Зная координаты точек B, D, A', через которые проходит плоскость π, мы без труда найдём уравнение этой плоскости. Поскольку эти точки являются точками пересечения плоскости с координатными осями, причём длины отрезков, отсекаемых плоскостью π на осях x, y, z, равны 1, 2, 4 соответственно, общее уравнение плоскости в отрезках немедленно даёт уравнение плоскости π: $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{4}=1 \Leftrightarrow 4x+2y+z-4=0.$

Это уравнение можно получить и более простыми, но немного более длинными рассуждениями. Известно, что в самом общем виде уравнение плоскости имеет вид $ax+by+cz+d=0$. Подставляя вместо x,y,z координаты точек B, D, A', мы получим следующую систему уравнений для коэффициентов a,b,c,d:

$$\begin{cases} 2b+d=0, \\ a+d=0, \\ 4c+d=0. \end{cases}$$

Поскольку уравнение плоскости определяется только с точностью до ненулевой мультипликативной константы, один параметр, например d, можно выбрать произвольно (но не равным 0). Удобно взять $d=-4$. Тогда $a=4$, $b=2$, $c=1$, что даёт следующее уравнение плоскости π: $4x+2y+z-4=0$.

Для дальнейшего отметим, что вектор $\vec{n}=(4,2,1)$, координаты которого являются коэффициентами при x,y,z в уравнении плоскости π, перпендикулярен этой плоскости. Длина $|\vec{n}|$ этого вектора равна $\sqrt{4^2+2^2+1^2}=\sqrt{21}.$

Теперь займёмся сферой σ, описанной вокруг нашего параллелепипеда.

Сначала найдём координаты её центра O Поскольку точка O равноудалена от точек A и D, она лежит в плоскости, которая перпендикулярна ребру AD и проходит через его середину. Точки этой плоскости и только они удовлетворяют уравнению $x=\frac{1}{2}$. Значит, первая координата точки O равна $\frac{1}{2}$: $O_x=\frac{1}{2}$. Подобным образом мы находим и остальные координаты: $O_y=1$, $O_z=2$.

Радиус R этой сферы можно найти как расстояние от её центра $O\left(\frac{1}{2},1,2\right)$ до любой из вершин параллелепипеда, например, до $A(0,0,0)$: $R=OA=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2+2^2}=\frac{\sqrt{21}}{2}$.

Поэтому уравнение сферы σ есть: $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=\frac{21}{4}$.

На Рисунке 3 мы изобразили только сферу σ, плоскость π и два шара максимально возможных радиусов, которые расположены внутри сферы σ по разные стороны от плоскости π. Центр бóльшего шара мы обозначили O_1, меньшего – O_2. Кроме того, на Рисунке 3: K – точка касания сферы σ и бóльшего шара, M – точка касания сферы σ и меньшего шара, L – точка касания шаров между собой (в этой же точки шары касаются плоскости π). Важно подчеркнуть, что точки O, O_1, O_2, K, L, M лежат на одной прямой, которая перпендикулярна плоскости π. Если r_1 – радиус бóльшего шара, r_2 – радиус меньшего шара, то $KL=2r_1$, $LM=2r_2$, $KM=2R$, так что $2r_1+2r_2=2R$.

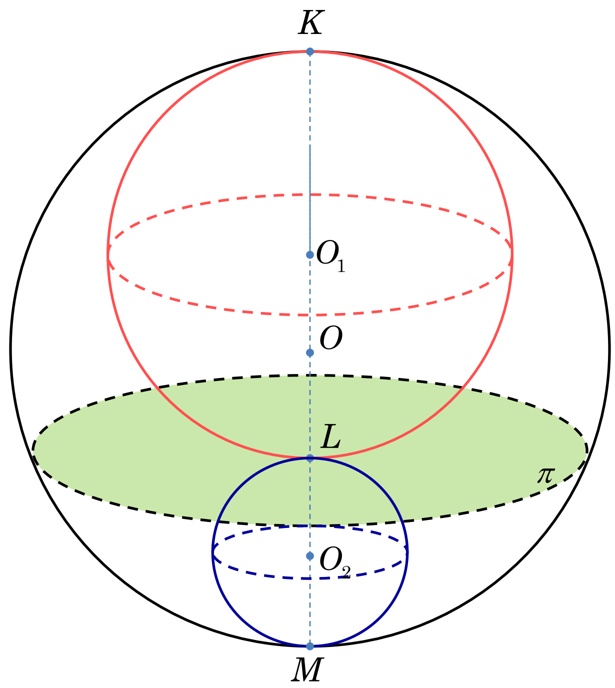

Рисунок 3

Пусть ρ – длина отрезка OL. Из Рисунка 3 ясно, что $2r_1 = KL = KO + OL = R + \rho$, $2r_1 = ML = MO - OL = R - \rho$. Поэтому искомое отношение $\frac{r_1}{r_2} = \frac{2r_1}{2r_2} = \frac{R+\rho}{R-\rho}$ и задача свелась к вычислению ρ.

Поскольку прямая KM перпендикулярна плоскости π, ρ является расстоянием от центра O сферы σ до плоскости π. Это расстояние можно найти по известной формуле для расстояния от точки с координатами (x_0, y_0, z_0) до плоскости, задаваемой уравнением $ax + by + cz + d = 0$:

$$\rho = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \qquad (4)$$

В нашем случае мы имеем:

$$\rho = \frac{\left|4 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 - 4\right|}{\sqrt{4^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{21}}.$$

Этот же результат можно получить и без применения общей формулы (4), проведя следующие простые рассуждения (фактически повторяющие вывод общей формулы (4) для нашей конкретной ситуации). Пусть (x, y, z) – координаты точки L. Вектор $\overrightarrow{OL} = \left(x - \frac{1}{2}, y - 1, z - 2\right)$ перпендикулярен плоскости π и, значит, коллинеарен нормальному вектору $\vec{n} = (4, 2, 1)$. Это означает, что $\overrightarrow{OL} = t\vec{n}$ для некоторого действительного t. Если это векторное равенство записать в координатной форме, то мы получим равенства:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + 4t, \\ y = 1 + 2t, \\ z = 2 + t. \end{cases}$$

С другой стороны, точка L лежит в плоскости π. Значит, её координаты удовлетворяют уравнению этой плоскости:

$$4 \cdot \left(\frac{1}{2} + 4t\right) + 2 \cdot (1 + 2t) + 1 \cdot (2 + t) - 4 = 0 \Leftrightarrow 21t = -2 \Leftrightarrow t = -\frac{2}{21}.$$

Поэтому $OL = \left|\overrightarrow{OL}\right| = |t| \cdot |\vec{n}| = \frac{2}{21} \cdot \sqrt{21} = \frac{2}{\sqrt{21}}$.

Теперь мы можем выписать ответ:

$$\frac{r_1}{r_2}=\frac{\dfrac{\sqrt{21}}{2}+\dfrac{2}{\sqrt{21}}}{\dfrac{\sqrt{21}}{2}-\dfrac{2}{\sqrt{21}}}=\frac{25}{17}.$$

Ответ: отношение радиуса бóльшего шара к радиусу меньшего шара равно $\frac{25}{17}$.

Задача 8. Найдите все x, y из интервала $(-\pi,\pi]$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} 28\sqrt{3}\cos x+7\cos y+4\sqrt{6}\cos\dfrac{x+y}{2}=12\sqrt{3}, \\ 7\cos x\cos y+4\sqrt{6}\cos x\cos\dfrac{x+y}{2}+\sqrt{2}\cos y\cos\dfrac{x+y}{2}=\dfrac{12\sqrt{3}}{7}. \end{cases}$$

Решение. Чтобы разобраться со структурой системы, естественно обозначить выражения $\cos x$, $\cos y$, $\cos\frac{x+y}{2}$, повторяющиеся по три раза, какими-то буквами. Но при этом останутся неизменными «некрасивые» и относительно «большие» числовые коэффициенты. С другой стороны, если умножить второе уравнение на 7, то будет хорошо видно, что $\cos x$ и $\cos y$ появляются только с коэффициентами 7, а $\cos\frac{x+y}{2}$ – с коэффициентом $\sqrt{2}$. Поэтому для сокращения записей введём следующие обозначения: $a=7\cos x$, $b=7\cos y$, $c=\sqrt{2}\cos\frac{x+y}{2}$. Теперь наша система примет вид:

$$\begin{cases} 4\sqrt{3}a+b+4\sqrt{3}c=12\sqrt{3}, \\ ab+4\sqrt{3}ac+bc=12\sqrt{3}. \end{cases} \tag{5}$$

С помощью первого уравнения исключим b: $b=12\sqrt{3}-4\sqrt{3}a-4\sqrt{3}c$. После несложных преобразований второе уравнение превратится в следующее уравнение относительно a и c:

$$a^2+ac+c^2-3a-3c+3=0.$$

Рассмотрим это уравнение как квадратное относительно a:

$$a^2+(c-3)a+(c^2-3c+3)=0. \tag{6}$$

Его дискриминант D равен:

$$D=(c-3)^2-4\left(c^2-3c+3\right)=-3\left(c^2-2c+1\right)=-3(c-1)^2.$$

Поэтому уравнение (6) имеет решение тогда и только тогда, когда $c=1$, причём в этом случае $a=-\dfrac{c-3}{2}=1$. Восстанавливая исключённую ранее переменную b, мы получим: $b=12\sqrt{3}-4\sqrt{3}\cdot 1-4\sqrt{3}\cdot 1=4\sqrt{3}.$

Возвращаясь к основным неизвестным x и y, мы получим, что исходная система равносильна следующей системе:

$$\begin{cases}\cos x=\dfrac{1}{7},\\ \cos y=\dfrac{4\sqrt{3}}{7},\\ \cos\dfrac{x+y}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}.\end{cases}$$

Третье уравнение системы равносильно бесконечной совокупности уравнений, которые можно записать формулой: $\dfrac{x+y}{2}=\pm\dfrac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$. Однако, поскольку x и y лежат на промежутке $(-\pi,\pi]$, на этом же промежутке лежит и среднее арифметическое $\dfrac{x+y}{2}$. Поэтому эта бесконечная совокупность сводится только к двум уравнениям: $\dfrac{x+y}{2}=\pm\dfrac{\pi}{4}\Leftrightarrow x+y=\dfrac{\pi}{2}$ или $x+y=-\dfrac{\pi}{2}$. Соответственно, наша система распадётся на две системы:

$$\begin{cases}\cos x=\dfrac{1}{7},\\ \cos y=\dfrac{4\sqrt{3}}{7},\\ x+y=\dfrac{\pi}{2},\end{cases}\qquad\qquad \begin{cases}\cos x=\dfrac{1}{7},\\ \cos y=\dfrac{4\sqrt{3}}{7},\\ x+y=-\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Эти системы решаются однотипно. С помощью третьего уравнения нужно исключить y: $y=\dfrac{\pi}{2}-x$ для первой системы и $y=-\dfrac{\pi}{2}-x$ для второй. Это позволит переписать вторые уравнения систем как $\sin x=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$ и $\sin x=-\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$ соответственно. В результате мы получим системы

$$\begin{cases} \cos x = \dfrac{1}{7}, \\ \sin x = \dfrac{4\sqrt{3}}{7}, \\ y = \dfrac{\pi}{2} - x, \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos x = \dfrac{1}{7}, \\ \sin x = -\dfrac{4\sqrt{3}}{7}, \\ y = -\dfrac{\pi}{2} - x. \end{cases}$$

Два первых уравнения в этих системах образуют систему относительно одной неизвестной x. Их проще всего решать, интерпретируя $\cos x$ и $\sin x$ как абсциссу и ординату точки P_x на единичной окружности, в которую переходит начальная точка $P_0(1,0)$ после поворота на угол x. Поскольку точки $\left(\dfrac{1}{7}, \dfrac{4\sqrt{3}}{7}\right)$ и $\left(\dfrac{1}{7}, -\dfrac{4\sqrt{3}}{7}\right)$, очевидно, лежат на единичной окружности, а $x \in (-\pi, \pi]$, каждая система (из двух первых уравнений) даёт только одно значение x: $x = \arccos\dfrac{1}{7}$ для первой системы и $x = -\arccos\dfrac{1}{7}$ для второй системы. Соответствующие значения y равны: $\dfrac{\pi}{2} - \arccos\dfrac{1}{7}$ для первой системы и $-\dfrac{\pi}{2} + \arccos\dfrac{1}{7}$ для второй системы – оба числа, очевидно удовлетворяют условию $-\pi < y \le \pi$. С помощью тождества $\arcsin a + \arccos a = \dfrac{\pi}{2}$ найденные значения y можно записать проще; они равны $\arcsin\dfrac{1}{7}$ для первой системы и $-\arcsin\dfrac{1}{7}$ для второй.

Ответ: две пары: $x = \arccos\dfrac{1}{7}$, $y = \arcsin\dfrac{1}{7}$ и $x = -\arccos\dfrac{1}{7}$, $y = -\arcsin\dfrac{1}{7}$.

Замечание. Если уравнения системы (5) разделить почленно на $4\sqrt{3}$, то мы получим систему

$$\begin{cases} a + \dfrac{b}{4\sqrt{3}} + c = 3 \\ a\dfrac{b}{4\sqrt{3}} + ac + \dfrac{b}{4\sqrt{3}}c = 3 \end{cases}$$

Отсюда ясно, что лучше было бы под b понимать выражение $\dfrac{7\cos y}{4\sqrt{3}}$. Тогда мы бы получили совсем простую систему:

$$\begin{cases} a+b+c=3, \\ ab+ac+bc=3. \end{cases}$$

Однако додуматься до такой замены в условиях экзамена совсем непросто, да и не нужно, т.к. ничего принципиально нового по сравнению с очевидной заменой $a=\cos x$, $b=\cos y$, $c=\cos\frac{x+y}{2}$ эта замена не даёт, только совсем «маленькие» и «красивые» коэффициенты. Мы получили практически такой же результат гораздо более очевидными заменами $a=7\cos x$, $b=7\cos y$, $c=\sqrt{2}\cos\frac{x+y}{2}$. Впрочем, ещё раз подчеркнём, что можно было бы использовать очевидную замену $a=\cos x$, $b=\cos y$, $c=\cos\frac{x+y}{2}$; просто в этом случае вычисления с коэффициентами были бы лишь немного сложнее.

ДВИ-2020, вариант 202

Задача 1. Известно, что $f(x)=\sqrt{\frac{1}{x+4}+\frac{1}{x-3}}+\frac{19}{x}$. Найдите $f(12)$.

Решение. Подставляя в формулу, которая задаёт функцию $f(x)$, вместо переменной x число 12, мы получим:

$$f(12)=\sqrt{\frac{1}{12+4}+\frac{1}{12-3}}+\frac{19}{12}=\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{9}}+\frac{19}{12}=\sqrt{\frac{16+9}{16\cdot 9}}+\frac{19}{12}=\sqrt{\frac{25}{16\cdot 9}}+\frac{19}{12}$$

$$=\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{16}\cdot\sqrt{9}}+\frac{19}{12}=\frac{5}{4\cdot 3}+\frac{19}{12}=\frac{5}{12}+\frac{19}{12}=\frac{5+19}{12}=\frac{24}{12}=2.$$

Ответ: $f(12)=2$.

Задача 2. Дана возрастающая геометрическая прогрессия $b_1,b_2,b_3,\ldots$, состоящая из положительных чисел. Известно, что сумма первого и третьего членов этой прогрессии равна второму члену, умноженному на $10/3$. Найдите отношение $b_6+b_7+b_8+b_9+b_{10}$ к $b_1+b_2+b_3+b_4+b_5$.

Решение. Пусть q – знаменатель прогрессии. С помощью формулы общего члена мы можем переписать условие $b_1+b_3=\frac{10}{3}b_2$ в виде: $b_1+b_1q^2=\frac{10}{3}b_1q$.

Все члены геометрической прогрессии по определению отличны от 0 (можно сослаться и на то, что все члены нашей прогрессии положительны). Поэтому последнее равенство можно разделить на b_1, что даст квадратное уравнение относительно q:

$$1+q^2=\frac{10}{3}q \quad\Leftrightarrow\quad 3q^2-10q+3=0,$$

которое имеет два корня: $q=3$ и $q=\frac{1}{3}$.

Поскольку $b_1>0$, значению $q=3$ соответствует возрастающая прогрессия, а значению $q=\frac{1}{3}$ — убывающая (если бы первый член был отрицателен, то наоборот, значению $q=3$ соответствовала бы убывающая прогрессия, а значению $q=\frac{1}{3}$ —

возрастающая). По условию задачи наша прогрессия возрастающая, так что можно однозначно утверждать, что $q = 3$.

Далее, опять используя формулу общего члена, для искомого отношения

$$R \equiv \frac{b_6 + b_7 + b_8 + b_9 + b_{10}}{b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5}$$

мы имеем:

$$R = \frac{b_1 q^5 + b_1 q^6 + b_1 q^7 + b_1 q^8 + b_1 q^9}{b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + b_1 q^3 + b_1 q^4} = \frac{q^5 \left(b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + b_1 q^3 + b_1 q^4\right)}{b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + b_1 q^3 + b_1 q^4} = q^5 = 3^5 = 343.$$

Ответ: 243.

Задача 3. Решите уравнение $\sin x + \cos x = 2\sqrt{2} \sin x \cos x$.

Решение. Преобразуем выражение в левой части уравнения с помощью введения дополнительного аргумента:

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x\right)$$
$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} \sin x + \sin\frac{\pi}{4} \cos x\right) = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right),$$

а выражение в правой части — с помощью формулы $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$. В результате уравнение примет вид:

$$\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \sin 2x \quad \Leftrightarrow \quad \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin 2x = 0.$$

Теперь применим формулу $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha - \beta}{2}\cos\frac{\alpha + \beta}{2}$, что даст уравнение

$$\sin\frac{x - \pi/4}{2} \cos\frac{3x + \pi/4}{2} = 0,$$

которое распадается на два уравнения:

$$\sin\frac{x - \pi/4}{2} = 0 \quad \text{и} \quad \cos\frac{3x + \pi/4}{2} = 0.$$

Множество решений первого даётся формулой

$$\frac{x - \pi/4}{2} = \pi n, n \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z},$$

а второго — формулой

$$\frac{3x+\pi/4}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi k,\, k\in\mathbb{Z} \quad\Leftrightarrow\quad x=\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi k}{3},\, k\in\mathbb{Z}.$$

Отметим, что при $k=3n$ формула $x=\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi k}{3}$ превратится в формулу $x=\frac{\pi}{4}+2\pi n$. Иначе говоря, корень с номером n из первой серии совпадает с корнем из второй серии, номер k которого (во второй серии) равен $3n$. Поэтому в ответ можно записывать только вторую серию.

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi k}{3}, \quad k\in\mathbb{Z}.$

Замечание. Уравнение удалось привести к виду $\sin\alpha=\sin\beta$ только потому, что в правой части коэффициент при выражении $\sin x\cos x$ равен $2\sqrt{2}$. Если бы вместо $2\sqrt{2}$ стояло какое-нибудь другое число, например, 2 или $3\sqrt{2}$, то приведённое выше решение не прошло бы.

В этих случаях полезным оказывается следующее наблюдение: в наше уравнение неизвестная x входит только в составе двух блоков: $u=\sin x+\cos x$ и $v=\sin x\cos x$. Иначе говоря, (после переноса всех членов в левую часть) уравнение имеет вид: $f(\sin x+\cos x,\sin x\cos x)=0$, где $f(u,v)$ – некоторая функция двух вспомогательных переменных u и v. Любое уравнение такого вида можно решить введением новой неизвестной $u=\sin x+\cos x$, если учесть, что

$$u^2\equiv(\sin x+\cos x)^2=\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x=1+2\sin x\cos x\equiv 1+2v,$$

т.е.

$$v\equiv\sin x\cos x=\frac{(\sin x+\cos x)^2-1}{2}\equiv\frac{u^2-1}{2}.$$

Этот общий приём применительно к нашему уравнению приводит к следующему решению.

Заменим выражение $2\sin x\cos x$ в правой части уравнения на $(\sin x+\cos x)^2-1$:

$$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\left((\sin x+\cos x)^2-1\right)$$

и введём новую неизвестную $t=\sin x+\cos x$. Для неё наше уравнение примет вид:

$$t=\sqrt{2}\left(t^2-1\right) \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{2}t^2-t-\sqrt{2}=0.$$

Дискриминант квадратного уравнения $\sqrt{2}t^2 - t - \sqrt{2} = 0$ р

$t_1 = \dfrac{1+3}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, $t_2 = \dfrac{1-3}{2\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.авен $1 - 4\cdot\sqrt{2}\cdot\left(-\sqrt{2}\right) = 9$ и потому это уравнение имеет два корня:

Соответственно, исходное уравнение распадается на два уравнения:

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \qquad \text{и} \qquad \sin x + \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Для их решения преобразуем выражение $\sin x + \cos x$ с помощью дополнительного аргумента:

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right) = \sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}\sin x + \cos\frac{\pi}{4}\cos x\right) = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Поэтому уравнение $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$ равносильно уравнению $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 1$, множество решений которого можно задать условной формулой

$$x - \frac{\pi}{4} = 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z},$$

а уравнение $\sin x + \cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ – уравнению $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{1}{2}$, множество решений которого можно задать условной формулой

$$x - \frac{\pi}{4} = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{4} \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Последнее соотношение удобнее записать в виде двух формул:

$$\begin{array}{cc} x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z} & x = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z} \\ \Updownarrow & \Updownarrow \\ x = \dfrac{11\pi}{12} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z} & x = -\dfrac{5\pi}{12} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z} \end{array}$$

Таким образом, множество решений исходного уравнения является объединением трёх серий чисел:

$$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z};\ \ x = \frac{11\pi}{12} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z};\ x = -\frac{5\pi}{12} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Хотя по внешней форме этот ответ отличается от отв $\log_{\left|2x-\frac{1}{2}\right|}\left(x+1+\frac{1}{x}\right) \ge \log_{\left|2x-\frac{1}{2}\right|}\left(x^2+1+\frac{1}{x^2}\right)$. ета, полученного первым способом, оба ответа задают одно и то же множество чисел: формула $x=\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi k}{3}$ при $k=3n$, $k=3n+1$, $k=3n-1$ превращается в три формулы, которыми мы описали ответ при втором способе решения.

Задача 4. Решите неравенство

Решение. **1 способ (метод расщепления)**. Чтобы избавиться от логарифмов, нужно знать, основание $\left|2x-\frac{1}{2}\right|$ больше 1 или меньше 1. Поэтому мы рассмотрим два случая, $\left|2x-\frac{1}{2}\right|>1$ и $0<\left|2x-\frac{1}{2}\right|<1$. В первом случае можно просто «закрыть» логарифмы в обеих частях, а во втором – дополнительно нужно изменить знак неравенства на противоположный. Это означает, что исходное неравенство распадается на две системы (во второй системе обратим внимание на неравенство $0<x+1+\frac{1}{x}$, которое гарантирует равносильность преобразования):

$$\begin{cases} \left|2x-\frac{1}{2}\right|>1, \\ x+1+\frac{1}{x} \ge x^2+1+\frac{1}{x^2}; \end{cases} \qquad \begin{cases} 0<\left|2x-\frac{1}{2}\right|<1, \\ 0<x+1+\frac{1}{x} \le x^2+1+\frac{1}{x^2}. \end{cases} \tag{1}$$

Теперь решим эти системы по отдельности.

Первая система из совокупности (1). Как обычно, чтобы решить систему, решим составляющие её неравенства, а затем образуем пересечение множеств их решений.

Первое неравенство первой системы распадается на два неравенства: $2x-\frac{1}{2}>1$ и $2x-\frac{1}{2}<-1$, решая которые мы получаем объединение двух интервалов: $x>\frac{3}{4}$ и $x<-\frac{1}{4}$.

Для решения второго неравенства введём новую неизвестную $t=x+\frac{1}{x}$. Поскольку $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$, это неравенство превратится в простое квадратичное неравенство: $t^2-t-2\le 0$. Его дискриминант равен $(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-2)=9$, так что соответствующее квадратное уравнение имеет два корня: $t_{1;2}=\frac{1\pm 3}{2}=2;-1$. Поэтому множество решений неравенства $t^2-t-2\le 0$ — это отрезок $-1\le t\le 2$. Возвращаясь к основной неизвестной, мы получим, что второе неравенство первой системы равносильно двойному неравенству $-1\le x+\frac{1}{x}\le 2$. Для решения его удобно записать в виде системы из двух обычных неравенств:

$$\begin{cases}\dfrac{x^2+x+1}{x}\ge 0,\\ \dfrac{x^2-2x+1}{x}\le 0.\end{cases} \qquad (2)$$

Квадратный трёхчлен x^2+x+1, который стоит в числителе дроби из левой части первого неравенства системы (2), положителен при всех значениях переменной x. Поэтому неравенство $\frac{x^2+x+1}{x}>0$ равносильно неравенству $x>0$. Используя этот факт, мы можем во втором неравенстве системы (2) избавиться от знаменателя и заменить это неравенство квадратичным неравенством $x^2-2x+1\le 0$. Выделяя полный квадрат, мы получим неравенство $(x-1)^2\le 0$, множество решений которого состоит из одной точки $x=1$.

Итак, система (2) сводится к системе

$$\begin{cases}x>0,\\ x=1,\end{cases}$$

множество решений которой также состоит из одной точки $x=1$.

Вторая система из совокупности (1). Первое неравенство второй системы равносильно тому, что одновременно $-1<2x-\frac{1}{2}<1$ и $2x-\frac{1}{2}\ne 0$, что даёт объединение двух интервалов: $-\frac{1}{4}<x<\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{4}<x<\frac{3}{4}$.

Для решения второго неравенства (двойного) введём новую неизвестную $t=x+\frac{1}{x}$. В результате это неравенство примет вид: $0<t+1\le t^2-1$, что равносильно системе

$$\begin{cases}t+1>0,\\ t+1\le t^2-1,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t+1>0,\\ t^2-t-2\ge 0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t+1>0,\\ (t+1)(t-2)\ge 0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t+1>0,\\ t-2\ge 0,\end{cases}\Leftrightarrow t\ge 2.$$

Возвращаясь к основной неизвестной, мы получим:

$$x+\frac{1}{x}\geq 2 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x^2-2x+1}{x}\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad x>0.\frac{1}{4}<x<\frac{3}{4}$$

Пересекая множества решений первого и второго неравенств второй системы, мы получим, что множество её решений является объединением двух интервалов: $0<x<\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{4}<x<\frac{3}{4}$.

Теперь мы можем получить ответ нашей задачи. Для этого нужно объединить множества решений первой и второй систем из совокупности (1). Сам ответ можно записать следующим образом: $x=1,\ \ 0<x<\frac{1}{4}$, или (немного формальнее) как объединение двух интервалов и одного одноэлементного множества: $\left(0;\frac{1}{4}\right)\cup\left(\frac{1}{4};\frac{3}{4}\right)\cup\{1\}$.

2 способ (метод интервалов). Этот способ базируется на следующем простом утверждении:

если основание $a>1$, то выражение $\log_a f(x)-\log_a g(x)$ положительно, равно 0 или отрицательно тогда и только тогда, когда выражение $f(x)-g(x)$ положительно, равно 0 или отрицательно и одновременно $f(x)>0$, $g(x)>0$ (так что логарифмы $\log_a f(x)$ и $\log_a g(x)$ существуют).

Иначе говоря,

если $a>1$, то на множестве $f(x)>0$, $g(x)>0$ знаки выражений $\log_a f(x)-\log_a g(x)$ и $f(x)-g(x)$ совпадают.

Чтобы применить это утверждение, перейдём в логарифмах к одному основанию, скажем, 10:

$$\frac{\lg\left(x+1+\frac{1}{x}\right)}{\lg\left|2x-\frac{1}{2}\right|}\geq\frac{\lg\left(x^2+1+\frac{1}{x^2}\right)}{\lg\left|2x-\frac{1}{2}\right|}\Leftrightarrow\frac{\lg\left(x+1+\frac{1}{x}\right)-\lg\left(x^2+1+\frac{1}{x^2}\right)}{\lg\left|2x-\frac{1}{2}\right|-\lg 1}\geq 0.$$

Поскольку для решения последнего неравенства важны знаки числителя и знаменателя, а не их точные значения, множество его решений не изменится, если числитель заменить на $\left(x+1+\frac{1}{x}\right)-\left(x^2+1+\frac{1}{x^2}\right)=\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)$, а знаменатель — на $\left|2x-\frac{1}{2}\right|-1$, и, кроме того, учесть условия существования логарифмов: $x+1+\frac{1}{x}>0$, $x^2+1+\frac{1}{x^2}>0$, $\left|2x-\frac{1}{2}\right|>0$. Поскольку последние три неравенства равносильны тому, что $x>0$ и $x\neq\frac{1}{4}$, можно решать систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{\left(x+1+\frac{1}{x}\right)-\left(x^2+1+\frac{1}{x^2}\right)}{\left|2x-\frac{1}{2}\right|-1}\geq 0, \\ x>0, \quad x\neq\frac{1}{4}. \end{cases}$$

Чтобы избавиться от модуля в знаменателе, применим следующее утверждение:

выражение $\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}$ положительно, равно 0 или отрицательно тогда и только тогда, когда выражение $f(x)-g(x)$ положительно, равно 0 или отрицательно и одновременно $f(x)\geq 0$, $g(x)\geq 0$ (так что существуют арифметические корни $\sqrt{f(x)}$ и $\sqrt{g(x)}$).

Поскольку $|a|=\sqrt{a^2}$, это утверждение влечёт, что

выражение $|f(x)|-|g(x)|$ положительно, равно 0 или отрицательно тогда и только тогда, когда выражение $f^2(x)-g^2(x)$ положительно, равно 0 или отрицательно.

Иначе говоря,

на множестве $f(x)\geq 0$, $g(x)\geq 0$ знаки выражений $|f(x)|-|g(x)|$ и $f^2(x)-g^2(x)$ совпадают.

Поэтому исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \dfrac{\left(x+1+\frac{1}{x}\right)-\left(x^2+1+\frac{1}{x^2}\right)}{\left(2x-\frac{1}{2}\right)^2-1}\geq 0, \\ x>0, \quad x\neq\frac{1}{4}. \end{cases}$$

Числитель первого неравенства системы можно разложить на множители с помощью новой переменной $t = x + \frac{1}{x}$, что приведёт эту систему к виду:

$$\begin{cases} \dfrac{-\left(x+\frac{1}{x}-2\right)\left(x+\frac{1}{x}+1\right)}{4x^2-2x-\frac{3}{4}} \ge 0, \\ x>0, \quad x \ne \frac{1}{4}; \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{(x-1)^2\left(x^2+x+1\right)}{4\left(x-\frac{3}{4}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)x^2} \le 0, \\ x>0, \quad x \ne \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Первое неравенство последней системы мгновенно решается стандартным методом интервалов: $-\frac{1}{2} < x < 0$, $0 < x < \frac{3}{4}$, $x = 1$. Учитывая условия $x > 0, x \ne \frac{1}{4}$, мы получим тот же ответ, что и при первом методе решения.

Ответ: $\left(0;\frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4};\frac{3}{4}\right) \cup \{1\}.$

Задача 5. На высоте AH остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность. Эта окружность пересекает стороны AB и AC в точках D и E соответственно. Найдите отношение $BH : HC$, если $BD : DA = 2:1$ и $AE : EC = 3:1$.

Решение. Конфигурация, о которой идёт речь в задаче, изображена на Рисунке 1.

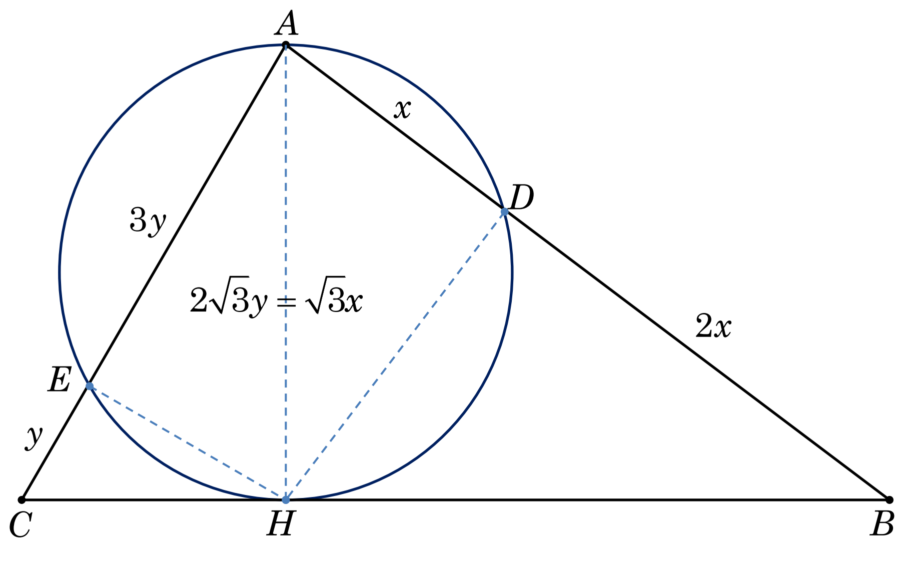

Рисунок 1

Пропорция $BD:DA=2:1$ означает, что $BD=2x$, $DA=x$ для некоторого x. Аналогично, пропорция $AE:EC=3:1$ означает, что $AE=3y$, $EC=y$ для некоторого y.

Угол AEH вписан в окружность и опирается на диаметр. Значит, он прямой, так что HE – высота прямоугольного треугольника ACH, опущенная на гипотенузу AC. По известной теореме о пропорциональных линиях в прямоугольном треугольнике, катеты AH и CH прямоугольного треугольника ACH являются средними геометрическими гипотенузы $AC=4y$ и прилежащих к этим катетам отрезков $AE=3y$ и $CE=y$ гипотенузы:

$$AH=\sqrt{AC\cdot AE}=\sqrt{4y\cdot 3y}=2\sqrt{3}y,$$
$$CH=\sqrt{AC\cdot CE}=\sqrt{4y\cdot y}=2y.$$

Угол ADH также вписан в окружность и опирается на диаметр. Значит, он прямой, так что HD – высота прямоугольного треугольника ABH, опущенная на гипотенузу AB. По теореме о пропорциональных линиях в прямоугольном треугольнике, катеты AH и BH прямоугольного треугольника ABH является средними геометрическим гипотенузы $AB=3x$ и прилежащих к этим катетам отрезков $AD=x$ и $BD=2x$ гипотенузы:

$$AH=\sqrt{AB\cdot AD}=\sqrt{3x\cdot x}=\sqrt{3}x,$$
$$BH=\sqrt{AB\cdot BD}=\sqrt{3x\cdot 2x}=\sqrt{6}x.$$

Приравнивая полученные два выражения для AH, мы имеем:

$$2\sqrt{3}y=\sqrt{3}x \quad \Leftrightarrow \quad x=2y.$$

Теперь для искомого отношения $BH:HC$ мы имеем:

$$\frac{BH}{HC}=\frac{\sqrt{6}x}{2y}=\frac{\sqrt{6}\cdot 2y}{2y}=\sqrt{6}.$$

Ответ: $\sqrt{6}$.

Задача 6. Дан тетраэдр $ABCD$. Известно, что $AB=BC=CD=5$ и $CA=AD=DB=6$. Найдите косинус угла между рёбрами BC и AD.

Решение. Конфигурация, о которой идёт речь в задаче, изображена на Рисунке 2. На этом рисунке мы дополнительно отметили середину O ребра AC, так что $AO=OC=3$.

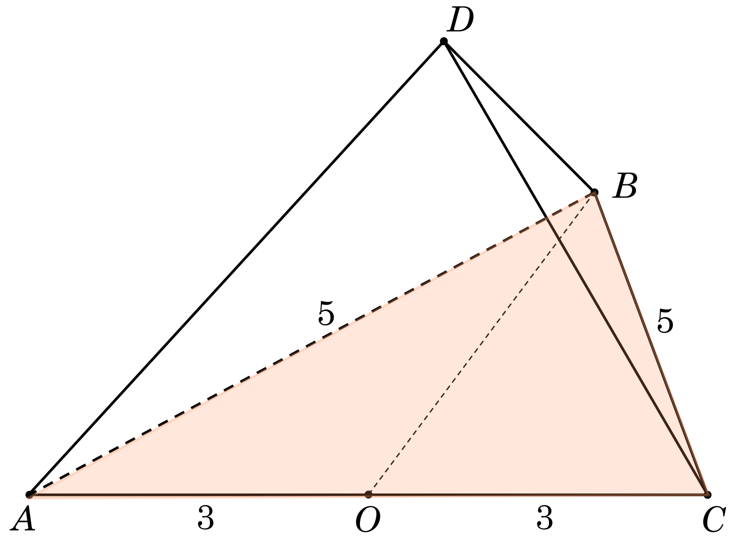

Рисунок 2

Рассмотрим плоскость ABC (см. Рисунок 3). По условию $AB = BC = 5$, так что треугольник ABC – равнобедренный. Поэтому медиана BO является и высотой, т.е. треугольник ABO – прямоугольный. Тогда по теореме Пифагора катет BO равен $\sqrt{AB^2 - AO^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4$.

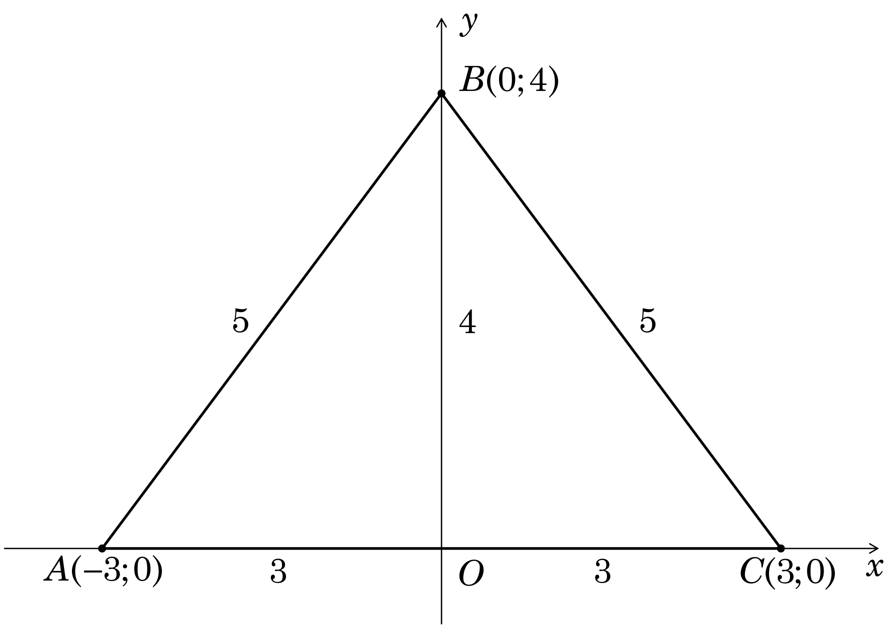

Рисунок 1

Введём на плоскости ABC декартову систему координат как показано на Рисунке 3 и дополним её до декартовой системы координат в пространстве (ось Oz

проходит через точку O перпендикулярно к плоскости ABC; направление этой оси не играет никакой роли).

В этой пространственной системе координат вершины тетраэдра $ABCD$ имеют следующие координаты: $A(-3;0;0)$, $B(0;4;0)$, $C(3;0;0)$, $D(x;y;z)$ – последнее означает, что координаты точки D нам пока неизвестны.

Известная формула для расстояния между двумя точками в пространстве позволяет записать соотношения $AD=6$, $BD=6$, $CD=5$ в виде

$$\begin{aligned}(x+3)^2+y^2+z^2&=36,\\ x^2+(y-4)^2+z^2&=36,\\ (x-3)^2+y^2+z^2&=25\end{aligned} \tag{3}$$

соответственно.

Эти соотношения можно рассматривать как систему трёх уравнений с тремя неизвестными. Решить её совсем легко, но мы займёмся этим немного позже, а сейчас, предполагая x, y, z известными, найдём косинус угла между рёбрами BC и AD. С этой целью рассмотрим векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$. Поскольку координаты концов этих векторов известны, мы можем найти координаты самих векторов (вычитая из координат конца координаты начала): $\overrightarrow{BC}=(3;-4;0)$, $\overrightarrow{AD}=(x+3,y,z)$. Зная координаты, мы можем вычислить скалярное произведение $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}$; оно равно $3\cdot(x+3)+(-4)\cdot y+0\cdot z=3x-4y+9$. Длины этих векторов мы знаем: $\left|\overrightarrow{BC}\right|=BC=5$, $\left|\overrightarrow{AD}\right|=AD=6$. Имея скалярное произведение векторов и их длины, мы можем вычислить косинус угла φ между ними:

$$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}}{\left|\overrightarrow{BC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AD}\right|}=\frac{3x-4y+9}{30}.$$

Это равенство показывает, что нам вовсе не обязательно полностью решать систему (3) — достаточно найти значение выражения $3x-4y$. Это число мгновенно получается, если из второго уравнения системы (3) вычесть третье:

$$\left(x^2+(y-4)^2+z^2\right)-\left((x-3)^2+y^2+z^2\right)=36-25$$

$$\Updownarrow$$

$$3x-4y=2$$

Поэтому $\cos\varphi=\dfrac{11}{30}$.

Так как $\cos\varphi$ положителен, угол φ – острый. Значит, он будет и углом между прямыми BC и AD.

Заметим, что, если бы $\cos\varphi$ был отрицателен, то угол φ был бы тупым, а тогда углом между прямыми BC и AD был бы угол $180^\circ-\varphi$, косинус которого равен $-\cos\varphi$. Вообще косинус угла ψ между прямыми равен модулю косинуса угла φ между направляющими векторами этих прямых. Если угол φ острый (нестрого), так что его косинус неотрицателен, то $\psi=\varphi$ и, значит, $\cos\psi=\cos\varphi$. Если же угол φ тупой или развёрнутый, так что его косинус отрицателен, то $\psi=180^\circ-\varphi$ и, значит, $\cos\psi=-\cos\varphi$.

Ответ: $\frac{11}{30}$.

Задача 7. Найдите все пары положительных чисел $(x;y)$, удовлетворяющих уравнению $\log_{2x^2y+1}\left(x^4+y^2+1\right)=\log_{y^4+x^2+1}\left(2xy^2+1\right)$.

Решение. Наше решение будет базироваться на классическом неравенстве для среднего арифметического $\frac{a+b}{2}$ и среднего геометрического $\sqrt{ab}$ двух неотрицательных чисел a и b: $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$, причём знак равенства достигается тогда и только тогда, когда $a=b$.

Если $a=x^4$, $b=y^2$, то это неравенство примет вид:

$$\frac{x^4+y^2}{2}\geq x^2y\Leftrightarrow x^4+y^2+1\geq 2x^2y+1,$$

причём знак равенства достигается тогда и только тогда, когда $x^4=y^2$, что с учётом положительности чисел x и y равносильно равенству: $y=x^2$.

Поэтому логарифм в левой части исходного уравнения имеет вид: $\log_A B$, где $B\equiv x^4+y^2+1\geq A\equiv 2x^2y+1$. Отметим, кроме того, что основание $A=2x^2y+1$ больше 1 (т.к. числа x и y положительны). Поэтому $\log_A B\geq\log_A A=1$, причём знак равенства достигается тогда и только тогда, когда $B=A$, что равносильно равенству $y=x^2$.

Иначе говоря, логарифм в левой части исходного уравнение больше или равен 1, причём знак равенства достигается тогда и только тогда, когда $y=x^2$.

Если же в неравенстве, связывающем среднее арифметическое и среднее геометрическое чисел, положить $a=y^4$, $b=x^2$, то мы получим:

$$\frac{y^4+x^2}{2}\geq y^2x\Leftrightarrow y^4+x^2+1\geq 2xy^2+1,$$

причём знак равенства достигается тогда и только тогда, когда $y^4=x^2$, что с учётом положительности чисел x и y равносильно равенству: $x=y^2$.

Поэтому логарифм в правой части исходного уравнения имеет вид: $\log_C D$, где $D \equiv 2xy^2 + 1 \le C \equiv y^4 + x^2 + 1$. Отметим, кроме того, что основание $C = y^4 + x^2 + 1$ больше 1. Поэтому $\log_C D \le \log_C C = 1$, причём знак равенства достигается тогда и только тогда, когда $D = C$, что равносильно равенству $x = y^2$.

Иначе говоря, логарифм в правой части исходного уравнение меньше или равен 1, причём знак равенства достигается тогда и только тогда, когда $x = y^2$.

Из этих оценок следует, что в исходном уравнение равенство левой и правой частей возможно тогда и только тогда, когда они одновременно равны 1, что, как мы отмечали, равносильно одновременному выполнению условий $y = x^2$ и $x = y^2$. Система из этих двух уравнений мгновенно решается методом исключения. Исключая, например, y, мы получим: $x = x^4$. Это уравнение имеет два корня: $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$. Им соответствуют значения $y_1 = 0$ и $y_2 = 1$ соответственно. Условию положительности x и y удовлетворяет только пара $(1;1)$.

Ответ: $(1;1)$.

ДВИ-2021, вариант 216

Задача 1. Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением $\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\sin\frac{\pi}{4}-\sqrt{2}\right)^4-\frac{1}{4}$.

Решение. Начнём решение с того, что избавимся от иррациональности в знаменателе дроби $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$. Для этого умножим числитель и знаменатель на выражение $\sqrt{3}+1$, которое является сопряжённым к знаменателю:

$$\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}=\frac{\left(\sqrt{3}\right)^2+2\sqrt{3}+1}{\left(\sqrt{3}\right)^2-1^2}=\frac{3+2\sqrt{3}+1}{3-1}=\frac{4+2\sqrt{3}}{2}=2+\sqrt{3}.$$

Далее, поскольку $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, основание степени в данном нам выражении равно $\left(2+\sqrt{3}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}=\sqrt{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}-\sqrt{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$. Следовательно, само выражение равно

$$\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^4-\frac{1}{4}=\frac{\left(\sqrt{6}\right)^4}{2^4}-\frac{1}{4}=\frac{36}{16}-\frac{1}{4}=\frac{9}{4}-\frac{1}{4}=\frac{8}{4}=2.$$

Ответ: 2.

Задача 2. Футболист Федот сыграл в трёх матчах на чемпионате. Премиальная выплата Федота за второй матч в связи с отличной игрой была на n процентов больше, чем за первый. В третьем же матче Федот не сумел показать хорошую игру и его премия за этот матч оказалась на n процентов меньше, чем за второй матч. Найдите n, если известно, что премия за третий матч составила 64% от премии за первый матч.

Решение. Ситуации, когда некоторая величина увеличивается или уменьшается на определённое число процентов, часто встречаются в текстовых задачах на проценты. Их анализ можно упростить, если использовать следующие простые общие факты:

1. Если величина x увеличивается на $n\%$, то её новое значение равно $x+\frac{n}{100}\cdot x=\left(1+\frac{n}{100}\right)\cdot x$. Иначе говоря, увеличение величины x на $n\%$ означает умножение абсолютного значения величины на коэффициент $k_+=1+\frac{n}{100}$.

2. Если величина x уменьшается на $n\%$, то её новое значение равно $x - \frac{n}{100} \cdot x = \left(1 - \frac{n}{100}\right) \cdot x$. Иначе говоря, уменьшение величины x на $n\%$ означает умножение абсолютного значения величины на коэффициент $k_{-} = 1 - \frac{n}{100}$.

После этого замечания приступим к решению нашей задачи.

Пусть p – премия Федота за первый матч. Тогда за второй матч он получил сумму $p\left(1 + \frac{n}{100}\right)$, а за третий — сумму

$$p\left(1 + \frac{n}{100}\right)\left(1 - \frac{n}{100}\right) = p\left(1 - \left(\frac{n}{100}\right)^2\right).$$

С другой стороны, по условию третья премия равна $0.64p$. Это даёт уравнение

$$p\left(1 - \left(\frac{n}{100}\right)^2\right) = 0.64p.$$

После сокращения на p мы получим уравнение

$$1 - \left(\frac{n}{100}\right)^2 = 0.64,$$

которое вообще не содержит букву p. Это означает, что:

1. условие задачи не позволяет найти размер премии Федота за первый матч;
2. размер этой премии не играет никакой роли для вычисления интересующей нас величины n — можно было вообще принять размер первоначальной премии в качестве единицы измерения денежных сумм, т.е. считать, что $p = 1$.

Последнее уравнение равносильно уравнению

$$\left(\frac{n}{100}\right)^2 = 0.36.$$

Так как по смыслу задачи величина n положительна, отсюда мы имеем: $\frac{n}{100} = 0.6$, так что $n = 60$.

Ответ: $n = 60$.

Задача 3. Решите уравнение $\operatorname{ctg} x - 2\operatorname{ctg} 2x = \frac{2}{3}\cos x$.

Решение. Упростим выражение в левой части уравнения:

$$\operatorname{ctg} x - 2\operatorname{ctg} 2x = \frac{\cos x}{\sin x} - 2\cdot\frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{\cos x}{\sin x} - 2\cdot\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{2\sin x\cos x}$$

$$= \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x\cos x} = \frac{\cos^2 x}{\sin x\cos x} - \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x\cos x}$$

$$= \frac{\cos^2 x - \cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x\cos x} = \frac{\sin^2 x}{\sin x\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} \quad (\text{при } \sin x \neq 0).$$

По поводу последнего из проделанных преобразований, сокращения дроби $\frac{\sin^2 x}{\sin x\cos x}$ на $\sin x$, необходимо отметить следующее:

1. Собственно сокращение, т.е. замена дроби $\frac{\sin^2 x}{\sin x\cos x}$ на дробь $\frac{\sin x}{\cos x}$, является законной математической операцией.
2. Но сделать обратный переход, умножить числитель и знаменатель дроби $\frac{\sin x}{\cos x}$ на $\sin x$, мы можем только, если уверены, что $\sin x \neq 0$. Для обоснования этого условия мы можем использовать лишь информацию, заключающуюся в выражении $\frac{\sin x}{\cos x}$, которое является исходной точкой обратного преобразования. Хотя это выражение влечёт, что $\cos x \neq 0$, заключить, что $\sin x \neq 0$, мы не можем.

Это означает, что равенство

$$\frac{\sin^2 x}{\sin x\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x}$$

истинно не при всех значениях x, а лишь для тех из них, для которых $\sin x \neq 0$ (для краткости говорят, что это равенство истинно на множестве $\sin x \neq 0$).

Таким образом, исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{2}{3}\cos x, \\ \sin x \neq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{2}{3}\cos^2 x, \\ \sin x \neq 0, \\ \cos x \neq 0. \end{cases}$$

Эту систему можно упростить, если заметить следующее: для любого числа x, удовлетворяющего уравнению системы, с необходимостью и $\sin x$, и $\cos x$ отличны от нуля. Действительно, если допустить, что $\sin x = 0$ (или что $\cos x = 0$), то это уравнение влечёт, что $\cos x = 0$ (соответственно, $\sin x = 0$). Но $\sin x$ и $\cos x$ не могут одновременно равняться 0, т.к. ни одна точка единичной окружности не имеет координаты $(0;0)$ (с равным успехом можно сослаться на основное тригонометрическое тождество). Таким образом, в последней системе можно отбросить условия $\sin x \neq 0$, $\cos x \neq 0$ и решать только уравнение.

С этой целью заменим $\cos^2 x$ на $1-\sin^2 x$ и введём новую неизвестную $t = \sin x$. В результате мы получим квадратное уравнение $2t^2 + 3t - 2 = 0$, которое имеет два корня: $t_{1;2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{25}}{4} = \dfrac{-3 \pm 5}{4} = \dfrac{1}{2}; -2.$ Соответственно исходное уравнение распадается на два уравнения: $\sin x = \dfrac{1}{2}$ и $\sin x = -2$. Второе уравнение не имеет корней, а множество корней первого даётся формулой: $x = (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Задача 4. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x-1}} \dfrac{x^2 - 7x + 12}{x-5} \leq 2$.

Решение. Начнём с того, что найдём область допустимых значений неизвестной. В данной задаче это позволит дать достаточно короткое решение, но, как мы уже отмечали, вообще говоря, понятие ОДЗ не играет большой роли при решении уравнений и неравенств, а иногда даже вредно, т.к. бездумное его применение может привести к ошибкам (ключевым является не понятие ОДЗ, а понятие равносильности).

Данное нам неравенство, очевидно, определено тогда и только тогда, когда x удовлетворяет одновременно трём условиям:

$$\frac{x^2 - 7x + 12}{x-5} > 0, \quad \sqrt{x-1} > 0, \quad \sqrt{x-1} \neq 1.$$

Неравенство $\dfrac{x^2 - 7x + 12}{x-5} > 0$ легко решается методом интервалов:

$$\frac{x^2 - 7x + 12}{x-5} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x-3)(x-4)}{x-5} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3 < x < 4 \text{ или } x > 5.$$

Если величина x удовлетворяет неравенству $3 < x < 4$ или неравенству $x > 5$, то, очевидно, выполнены условия $\sqrt{x-1} > 0$, $\sqrt{x-1} \neq 1$. Поэтому ОДЗ задаётся совокупностью двух неравенств: $3 < x < 4$, $x > 5$.

Ясно, что на ОДЗ выражение $\sqrt{x-1}$ больше 1. Поэтому на ОДЗ исходное неравенство равносильно неравенству

$$\frac{x^2-7x+12}{x-5} \leq x-1.$$

Иными словами, исходное неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2-7x+12}{x-5} \leq x-1, \\ 3 < x < 4 \text{ или } x > 5. \end{cases}$$

Эту систему удобно разбить на две системы:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2-7x+12}{x-5} \leq x-1, \\ 3 < x < 4; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x^2-7x+12}{x-5} \leq x-1, \\ x > 5. \end{cases}$$

В первой системе знаменатель дроби $\dfrac{x^2-7x+12}{x-5}$ отрицателен, а во второй — положителен. Это позволяет избавиться от знаменателя в неравенстве $\dfrac{x^2-7x+12}{x-5} \leq x-1$ простым умножением обеих частей на $x-5$. В результате мы получим совокупность двух простых систем:

$$\begin{cases} x^2-7x+12 \geq (x-1)(x-5), \\ 3 < x < 4; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2-7x+12 \leq (x-1)(x-5), \\ x > 5; \end{cases}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$\begin{cases} x \leq 7, \\ 3 < x < 4; \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq 7, \\ x > 5; \end{cases}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$3 < x < 4; \qquad\qquad x \geq 7.$$

Ответ: $3 < x < 4$ или $x \geq 7$.

Задача 5. Окружность Ω_1 с центром O_1 пересекает окружность Ω_2 с центром O_2 в точках A и B. При этом точки O_1 и O_2 лежат вне Ω_2 и Ω_1 соответственно. Касательная к окружности Ω_2 в точке A пересекает Ω_1 в точках A и C. Касательная к окружности Ω_1 в точке A пересекает Ω_2 в точках A и D.

Найдите угол между прямыми O_1C и O_2D, если известно, что $\angle AO_1B = 36^\circ$ и $\angle AO_2B = 64^\circ$.

Решение. Конфигурация, описанная в задаче, изображена на Рисунке 1.

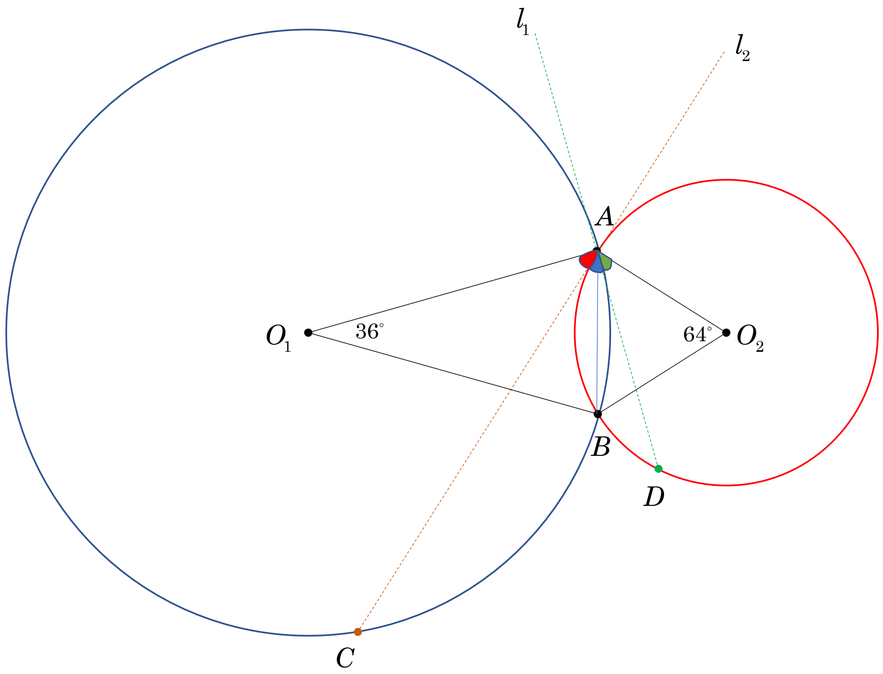

Рисунок 1

На этом рисунке прямая l_1 – это касательная к окружности Ω_1 в точке A, прямая l_2 — касательная к окружности Ω_2 в той же точке, O_1A и O_2A — радиусы этих окружностей, проведённые в точку касания, так что углы O_1AD и O_2AC прямые.

Обозначим K точку пересечения прямых O_1C и O_2D и рассмотрим четырёхугольник O_1AO_2K (см. Рисунок 2).

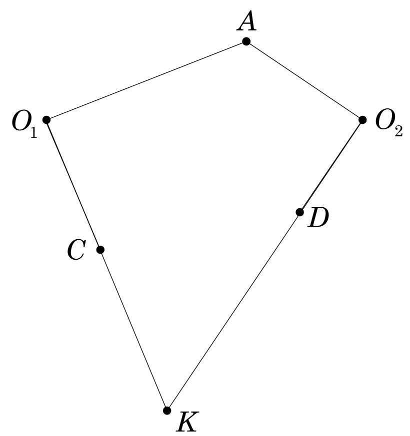

Рисунок 2

Искомый угол между прямыми O_1C и O_2D – это угол O_1KO_2, если последний угол острый или прямой; если же $\angle O_1KO_2$ – тупой, то угол между прямыми O_1C и O_2D равен $180^\circ - \angle O_1KO_2$.

Чтобы найти $\angle O_1KO_2$, мы найдём три других угла четырёхугольника O_1AO_2K.

(1) Начнём с угла O_1AO_2.

1 способ. Рассмотрим четырёхугольник O_1AO_2B (см. Рисунок 3). В этом четырёхугольнике смежные стороны O_1A и O_1B равны друг другу (они являются радиусами окружности Ω_1). По аналогичной причине равны друг другу и две другие смежные стороны O_2A и O_2B. В геометрии такой четырёхугольник называется дельтоид.

Любой дельтоид обладает рядом легко доказываемых свойств, например,

1. в дельтоид можно вписать окружность;
2. диагональ, которая соединяет вершины углов, образованных равными смежными сторонами, делит эти углы пополам;
3. диагонали дельтоида перпендикулярны;
4. углы, образованные неравными сторонами, равны.

Последнее свойство в нашем случае означает, что $\angle O_1BO_2 = \angle O_1AO_2$. Из условия мы знаем два других противоположных угла нашего дельтоида: $\angle AO_1B = 36^\circ$, $\angle AO_2B = 64^\circ$, а поскольку сумма всех его углов, как и сумма углов всякого четырёхугольника, равна 360°, мы имеем: $\angle O_1AO_2 = \dfrac{360^\circ - 36^\circ - 64^\circ}{2} = 130^\circ$.

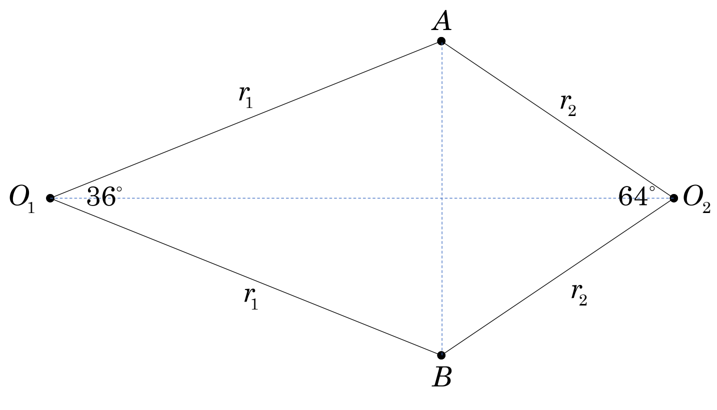

Рисунок 3

2 способ. Угол O_1AO_2 можно найти и без использования понятия дельтоида, фактически повторив доказательство отмеченных выше общих свойств дельтоида. Именно, разобьём угол O_1AO_2 прямой AB на два угла: $\angle O_1AB$ и $\angle BAO_2$. Из равнобедренного треугольника AO_1B мы имеем:

$\angle O_1AB = \dfrac{180^\circ - \angle AO_1B}{2} = \dfrac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ$. Аналогично, из равнобедренного треугольника AO_2B мы имеем: $\angle BAO_2 = \dfrac{180^\circ - \angle AO_2B}{2} = \dfrac{180^\circ - 64^\circ}{2} = 58^\circ$. Таким образом, $\angle O_1AO_2 = 72^\circ + 58^\circ = 130^\circ$.

(2) Далее, угол KO_1A является центральным углом в окружности Ω_1. Поэтому он измеряется дугой CBA этой окружности. Дуга CBA состоит из двух частей – дуги CB и дуги BA. Последняя дуга равна 36^0, так как такова градусная мера опирающегося на неё центрального угла AO_1B. Градусная мера дуги CB в два раза больше градусной меры угла CAB, который является вписанным углом (для окружности Ω_1) и опирается именно на эту дугу. С другой стороны, $\angle CAB$ можно рассматривать со стороны окружности Ω_2 как угол между хордой AB и касательной $l_2 \equiv CA$. Такой угол измеряется половиной дуги AB окружности (Ω_2), стягиваемой этой хордой. В окружности Ω_2 дуга AB равна 64°, так как именно такова мера центрального угла AO_2B, опирающегося на эту дугу. Таким образом, $\angle CAB = 32^\circ$, дуга CB равна 64°, дуга CBA равна $64^\circ + 36^\circ = 100^\circ$ и, значит, $\angle KO_1A = 100^\circ$.

(3) Аналогично, угол KO_2A является центральным углом в окружности Ω_2. Поэтому он измеряется дугой DBA этой окружности. Дуга DBA состоит из двух частей – дуги DB и дуги BA. Последняя дуга равна 64^0, так как такова градусная мера опирающегося на неё центрального угла AO_2B. Градусная мера дуги DB в два раза больше градусной меры угла DAB, который является вписанным углом (для окружности Ω_2) и опирается именно на эту дугу. С другой стороны, $\angle DAB$ можно рассматривать со стороны окружности Ω_1 как угол между хордой AB и касательной $l_1 \equiv DA$. Такой угол измеряется половиной дуги AB окружности (Ω_1), стягиваемой этой хордой. В окружности Ω_1 дуга AB равна 36°, так как именно такова мера центрального угла AO_1B, опирающегося на эту дугу. Таким образом, $\angle DAB = 18^\circ$, дуга DB равна 36°, дуга DBA равна $36^\circ + 64^\circ = 100^\circ$ и, значит, $\angle KO_2A = 100^\circ$.

Итак, теперь мы знаем все углы четырёхугольника KO_1AO_2, кроме угла O_1KO_2. Поэтому $\angle O_1KO_2 = 360^\circ - 100^\circ - 100^\circ - 130^\circ = 30^\circ$. Так как угол O_1KO_2 – острый, он и является углом между прямыми O_1C и O_2D.

Ответ: 30°.

Задача 6. Найдите все пары действительных чисел (x, y), удовлетворяющих равенству $\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(1 + \log_2\left(x^2 + y^2\right)\right) = 1 + \log_2(xy)$.

Решение. Разнородные члены и две неизвестные приводят нас к мысли решать уравнение методом оценок. Дополнительным аргументом в пользу такого подхода является наличие выражений $x^2 + y^2$ и xy, которые связаны известным неравенством $x^2 + y^2 \geq 2xy$. Это неравенство справедливо для любых действительных чисел x и y, причём знак равенства в нём достигается тогда и только тогда, когда $x = y$ (для доказательства достаточно неравенство $x^2 + y^2 \geq 2xy$ заменить равносильным ему неравенством $(x - y)^2 \geq 0$).

Для удобства получения оценок преобразуем наше уравнение с помощью тождеств $\arcsin a + \arccos a = \pi/2$ и $1 + \log_2 a = \log_2(2a)$, что приведёт его к виду:

$$\arccos\left(1 + \log_2\left(x^2 + y^2\right)\right) = \log_2(2xy).$$

Левая часть последнего уравнения неотрицательна (как любой арккосинус), причём равна 0 тогда и только тогда, когда аргумент арккосинуса равен 1, т.е. когда

$$1 + \log_2\left(x^2 + y^2\right) = 1 \Leftrightarrow \log_2\left(x^2 + y^2\right) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1.$$

Правая часть (в силу неравенства $x^2 + y^2 \geq 2xy$) не превосходит $\log_2\left(x^2 + y^2\right)$, причём равна этому логарифму тогда и только тогда, когда $x = y$ (и, конечно, $xy > 0$, что гарантирует существование $\log_2(2xy)$). Выражение $\log_2\left(x^2 + y^2\right)$ в свою очередь может быть оценено с помощью замечания, что левая часть определена тогда и только тогда, когда

$$-1 \leq 1 + \log_2\left(x^2 + y^2\right) \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad -2 \leq \log_2\left(x^2 + y^2\right) \leq 0 .$$

Резюмируя, для правой части мы имеем: $\log_2(2xy) \leq \log_2\left(x^2 + y^2\right) \leq 0$.

Итак, левая часть уравнения больше (нестрого) нуля, а правая меньше (нестрого) нуля. Поэтому они могут быть равны тогда и только тогда, когда одновременно равны 0, что, в силу сказанного ранее, равносильно тому, что одновременно выполнены условия:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x = y, \\ xy > 0. \end{cases}$$

Эта система из двух уравнений и одного неравенства имеет два решения:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}; \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ y = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

Таким образом, равенству из условия задачи удовлетворяют две пары:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{и} \quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

и только они.

Второй способ решения. Логарифмические члены $\log_2\left(x^2+y^2\right)$ и $\log_2(xy)$ определены тогда и только тогда, когда неизвестные x и y либо обе положительны, либо обе отрицательны. Кроме того, ясно, что если пара (x, y) является решением уравнения, то и пара $(-x, -y)$ является решением. Поэтому можно считать, что $x > 0,\ y > 0,$ т.е. точка (x, y) лежит внутри первого квадранта.

Теперь перейдём от декартовых координат (x, y) к полярным координатам (r, φ). Иначе говоря, введём вместо основных неизвестных x и y новые неизвестные r и φ с помощью формул: $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi.$ Эти соотношения устанавливают взаимно однозначное соответствие между парами положительных чисел x и y и парами чисел r и φ такими, что $r > 0,\ 0 < \varphi < \dfrac{\pi}{2}.$

Переход к полярным координатам превратит уравнение

$$\arccos\left(1+\log_2\left(x^2+y^2\right)\right) = \log_2(2xy)$$

в уравнение

$$\arccos\left(1+\log_2 r^2\right) = \log_2\left(2r^2\sin\varphi\cos\varphi\right)$$
$$\Updownarrow$$
$$\arccos\left(1+2\log_2 r\right) = 2\log_2 r + \log_2 \sin 2\varphi$$

Дальнейшее упрощение может быть достигнуто с помощью новых неизвестных $u = 1 + 2\log_2 r,\ v = \log_2 \sin 2\varphi.$ Теперь наше уравнение примет вид:

$$\arccos u = u - 1 + v.$$

Рассмотрим последнее уравнение как уравнение относительно одной неизвестной u, считая v параметром, и будем решать его графически. Для этого в одной системе координат нарисуем графики функций $f(u) = \arccos u$ и

$g(u) = u - 1 + v$. При этом будем иметь в виду, что параметр $v \equiv \log_2 \sin 2\varphi$ отрицателен (нестрого), так что прямая $g(u)$ пересекает ось абсцисс в точке $u_0 = 1 - v$, которая лежит правее (нестрого) точки 1. Для $v < 0$ графики расположены так, как показано на Рисунке 4. При убывании v до $-\infty$ прямая линия движется вправо, оставаясь параллельной самой себе, а при росте v до 0 эта прямая движется влево, также оставаясь параллельной самой себе.

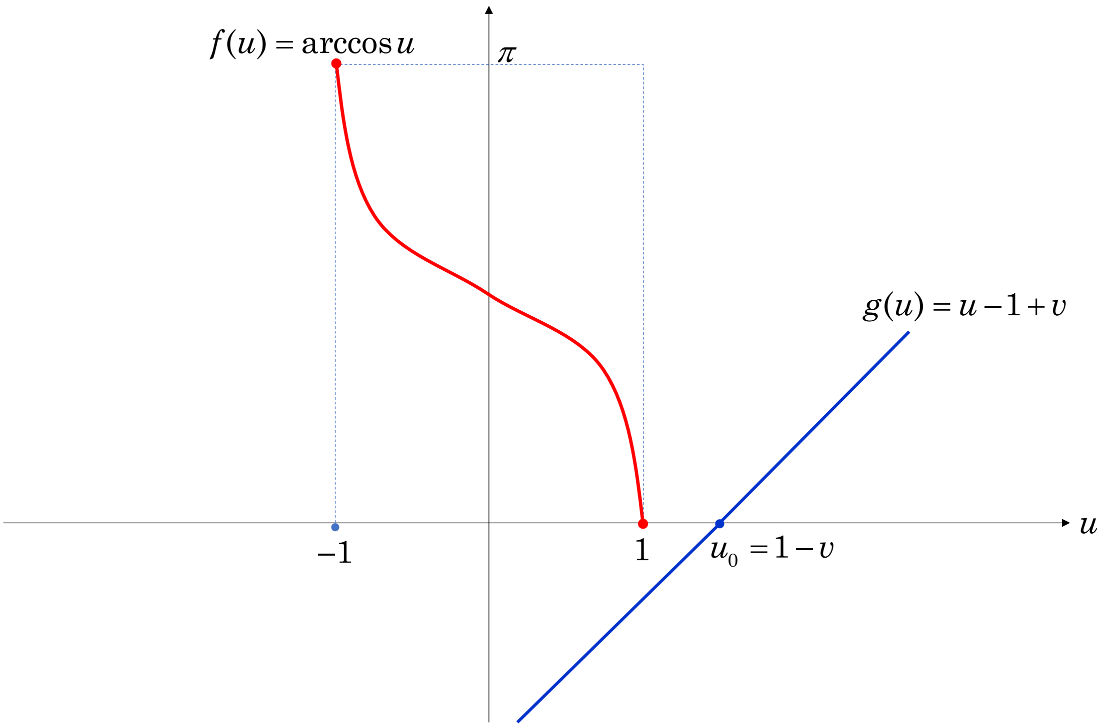

Рисунок 4

Из рисунка 4 ясно, что графики пересекаются тогда и только тогда, когда $v = 0$, причём в этом случае точка пересечения только одна и её абсцисса u равна 1. В терминах переменных r и φ этот вывод означает, что уравнение

$$\arccos\left(1 + 2\log_2 r\right) = 2\log_2 r + \log_2 \sin 2\varphi$$

на множестве $r > 0,\ 0 < \varphi < \pi/2$ равносильно системе:

$$\begin{cases} 1 + 2\log_2 r = 1 \\ \log_2 \sin 2\varphi = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 r = 0 \\ \sin 2\varphi = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \varphi = \pi/4 \end{cases}$$

Возвращаясь к основным неизвестным x и y с помощью формул $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, мы получим, что исходное уравнение имеет единственное решение в первом квадранте: $x=\sqrt{2}/2$, $y=\sqrt{2}/2$. К этому решению следует добавить симметричное решение: $x=-\sqrt{2}/2$, $y=-\sqrt{2}/2$.

Ответ: $\left(\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2\right),\left(-\sqrt{2}/2,-\sqrt{2}/2\right)$.

Задача 7. Дан параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$ с основаниями $ABCD$, $A'B'C'D'$ и боковыми рёбрами AA', BB', CC', DD'. Все рёбра параллелепипеда равны. Плоские углы при вершине B также равны. Известно, что центр сферы, описанной около тетраэдра $AB'CD'$, лежит в плоскости $AB'C$. Радиус этой сферы равен 2. Найдите длину ребра параллелепипеда.

Решение. Пусть a – общая длина рёбер параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$, φ – общая величина углов ABC, ABB', CBB' при вершине B (см. Рисунок 5).

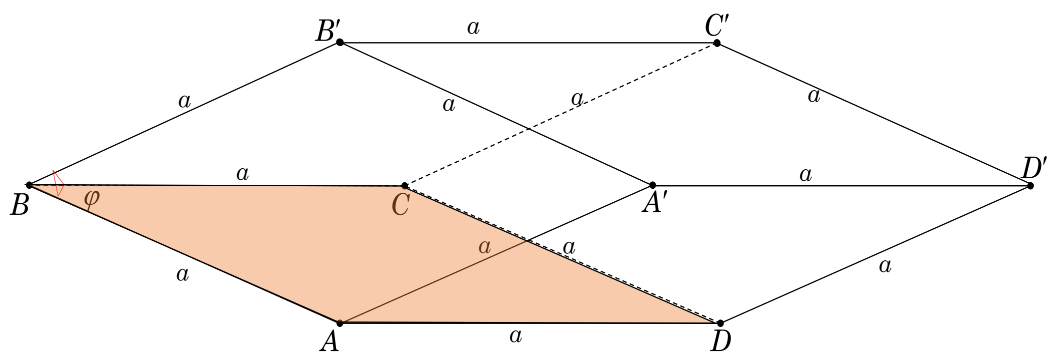

Рисунок 1

Поскольку противоположные грани любого параллелепипеда равны друг другу, ясно, что все грани параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$ являются равными ромбами. Пусть x — длина диагонали этого ромба, которая лежит против угла φ, y — длина диагонали, которая является биссектрисой этого угла (см. Рисунок 6, где изображено основание параллелепипеда; для определённости мы показали случай $\varphi < 90^{\circ}$).

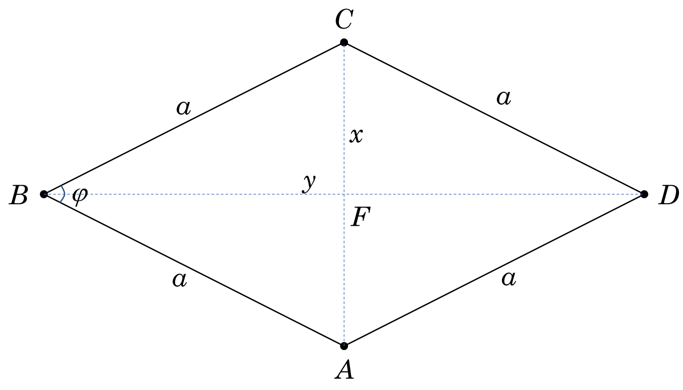

Рисунок 6

Теперь нарисуем тетраэдр $AB'CD'$ (см. Рисунок 7).

При этом удобно считать, что его основанием является треугольник $AB'C$. Стороны AB', AC, CB' являются диагоналями ромбов $ABB'C$, $ABCD$, $BB'C'C$, причём в этих ромбах они лежат против угла φ. Поэтому $AB' = AC = CB' = x$, т.е. треугольник $AB'C$ является равносторонним. Боковые рёбра этого тетраэдра, AD', $B'D'$ и CD', являются диагоналями ромбов $AA'D'D$,, $B'C'D'A'$ и $CC'D'D$ соответственно, причём в этих ромбах они делят угол φ пополам. Поэтому $AD' = B'D' = CD' = y$, так что вершина D' проецируется в центр O окружности, описанной вокруг треугольника $AB'C$.

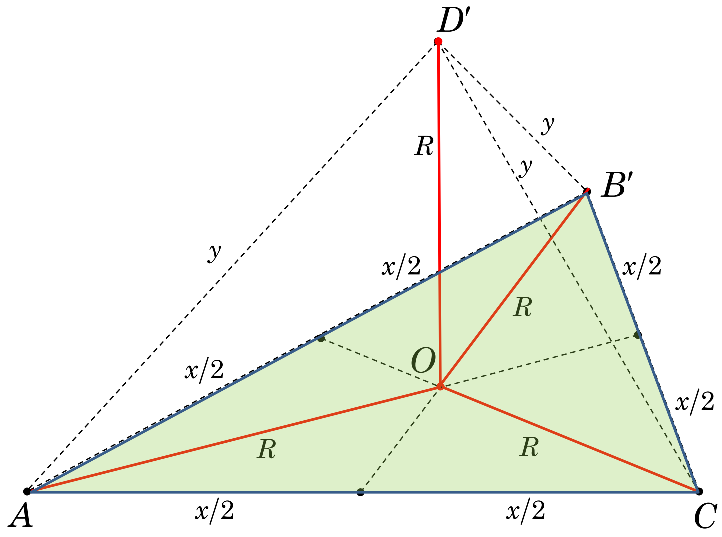

Рисунок 7

Центр O окружности, описанной вокруг треугольника $AB'C$, однозначно определяется равенствами $OA = OB' = OC$ и фактом принадлежности точки O плоскости $AB'C$, а центр O^* сферы, описанной около тетраэдра $AB'CD'$, однозначно определяется равенствами $O^*A = O^*B' = O^*C = O^*D'$. Поскольку точка O^* лежит в плоскости треугольника $AB'C$, последние равенства влекут, что $O = O^*$. Следовательно, радиус $R = 2$ сферы, описанной около тетраэдра $AB'CD'$, будет и радиусом окружности, описанной вокруг треугольника $AB'C$.

Так как треугольник $AB'C$ равносторонний, его сторона x даётся формулой: $x = 2R\sin 60^\circ = R\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$. Длина второй диагонали, y, может быть найдена из равнобедренного прямоугольного треугольника AOD': $y = R\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

Теперь по теореме Пифагора для прямоугольного треугольника BFC (см. Рисунок 6) мы имеем: $a^2 = (x/2)^2 + (y/2)^2 = 3 + 2 = 5$, так что $a = \sqrt{5}$.

Отметим, что с равным успехом можно было воспользоваться известным свойством диагоналей параллелограмма (сумма квадратов длин диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов длин его сторон), которое даёт: $4a^2 = x^2 + y^2 = 12 + 8 = 20$, так что опять $a^2 = 5$ и $a = \sqrt{5}$.

Ответ: $\sqrt{5}$.

ДВИ-2022, вариант 221

Задача 1. Найдите наименьшее целое число, бóльшее, чем $\dfrac{\sqrt{17}+3}{\sqrt{17}-3}$.

Решение. Начнём решение с того, что избавимся от иррациональности в знаменателе дроби $\dfrac{\sqrt{17}+3}{\sqrt{17}-3}$. Для этого умножим числитель и знаменатель на выражение $\sqrt{17}+3$, которое является сопряжённым к знаменателю:

$$\frac{\sqrt{17}+3}{\sqrt{17}-3}=\frac{\left(\sqrt{17}+3\right)^2}{\left(\sqrt{17}-3\right)\left(\sqrt{17}+3\right)}=\frac{17+6\sqrt{17}+9}{17-9}=\frac{26+6\sqrt{17}}{8}=\frac{13+3\sqrt{17}}{4}.$$

Теперь оценим иррациональное число $\sqrt{17}$ сверху и снизу рациональными числами. Для нашей задачи вполне достаточна очень грубая оценка: $4<\sqrt{17}<5$ (более точная оценка $4.1<\sqrt{17}<4.2$ лишь усложнит выкладки). Из этого двойного неравенства следует, что

$$\frac{13+3\cdot 4}{4}<\frac{13+3\sqrt{17}}{4}<\frac{13+3\cdot 5}{4}$$

$$\Updownarrow$$

$$6\frac{1}{4}<\frac{13+3\sqrt{17}}{4}<7$$

Поэтому больше данного нам числа следующие целые числа: 7, 8, 9, ... Наименьшее из них — это число 7.

Ответ: 7.

Задача 2. Сумма первых пятнадцати членов арифметической прогрессии в два раза больше суммы первых десяти членов. Найдите первый член этой прогрессии, если известно, что пятый её член равен 7.

Решение. Пусть $a_1, a_2, a_3, \ldots$ — данная арифметическая прогрессия. Как и всякая арифметическая прогрессия, она полностью определяется своим первым членом a_1 и разностью d. В любой задаче на арифметическую прогрессию эти величины являются основными неизвестными, т.к. с их помощью легко вычислить любую другую интересующую нас величину (любой член прогрессии, сумму любого числа её членов и т.д.). Чтобы найти эти неизвестные, нужно иметь (в идеале) систему из двух уравнений. Соответственно, в условии задачи должны содержаться два утверждения, которые и дадут нужные нам уравнения.

В нашей ситуации эта общая схема работает следующим образом.

Пусть a_n — n-й член рассматриваемой прогрессии, S_n — сумма n первых её членов. Тогда в краткой форме условие задачи можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} S_{15} = 2S_{10}, \\ a_5 = 7. \end{cases}$$

Используя формулы

$$a_n = a_1 + (n-1)d,$$
$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n,$$

мы можем переписать условие задачи в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{2a_1 + 14d}{2} \cdot 15 = 2\dfrac{2a_1 + 9d}{2} \cdot 10, \\ a_1 + 4d = 7. \end{cases}$$

Это и есть нужная нам система двух уравнений с двумя неизвестными, a_1 и d.

Решение этой системы, очевидно, нужно начать с упрощения уравнений, что даст:

$$\begin{cases} 15a_1 + 105d = 20a_1 + 90d, \\ a_1 + 4d = 7; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 3d, \\ a_1 + 4d = 7; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 3d, \\ 7d = 7, \end{cases}$$

так что $d = 1, a_1 = 3.$

Ответ: $a_1 = 3.$

Задача 3. Решите уравнение $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 2x + 3 = 0.$

Решение. Внешний вид данного нам уравнения приводит к мысли заменить $\operatorname{tg} 2x$ на $\dfrac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$, а затем ввести новую неизвестную $t = \operatorname{tg} x$. В результате мы получим уравнение

$$t \cdot \frac{2t}{1-t^2} + 3 = 0 \Leftrightarrow \frac{3-t^2}{1-t^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - t^2 = 0, \\ 1 - t^2 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow t^2 = 3 \Leftrightarrow t = \pm\sqrt{3}\,.$$

Возвращаясь к основной неизвестной x, мы получим простейшее тригонометрическое уравнение $\operatorname{tg} x = \pm\sqrt{3}$ (формально говоря, это совокупность из двух уравнений, $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ и $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$), множество решений которого имеет вид: $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$

Замечание. Тождество $\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$ справедливо на множестве тех значений переменной x, при которых существуют и левая, и правая части. Но левая часть, $\operatorname{tg} 2x$, существует тогда и только тогда, когда $\cos 2x \neq 0$, т.е. при

$$2x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z},$$

в то время как правая часть, дробь $\frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$, существует при x, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x \text{ существует}, \\ \operatorname{tg}^2 x \neq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in \mathbb{Z}, \\ x \neq \pm\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in \mathbb{Z}, \\ x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Таким образом, область определения правой части уже области определения левой части и потому тождество справедливо при x, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in \mathbb{Z}, \\ x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Это означает, что мы всегда можем заменить дробь $\frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$ на $\operatorname{tg} 2x$. Но $\operatorname{tg} 2x$ можно заменить дробью $\frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$ только в случае, если мы уверены, что $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in \mathbb{Z}$ (это равносильно существованию $\operatorname{tg} x$). На наше счастье в исходном уравнении стоит $\operatorname{tg} x$, что автоматически гарантирует его существование («всё что написано — существует»). Поэтому в нашем случае проблем нет.

Задача 4. Решите неравенство $\left(2\log_2^2 x - \log_2 x^2 + 1\right)^{x^2-2x} \leq 1.$

Решение. Данное нам неравенство имеет вид: $a(x)^{b(x)} \leq a(x)^{c(x)}$. В левой и правой частях его стоят степени, причём от неизвестной зависят как основания этих степеней, так и их показатели. Поэтому неравенство можно назвать «показательностепенным». По поводу таких неравенств важно отметить следующее: поскольку показатели степеней $a(x)^{b(x)}$ и $a(x)^{c(x)}$ по смыслу задачи являются действительными числами, основание $a(x)$ обязано быть положительным числом. Иначе говоря, написав неравенство $a(x)^{b(x)} \le a(x)^{c(x)}$, мы автоматически предполагаем, что $a(x) > 0$.

Дальнейшие преобразования можно проводить разными способами.

1 способ. Самым естественным является взгляд на наше неравенство как на стандартное показательное неравенство вида $a^{b(x)} \le a^{c(x)}$, что приводит к следующим рассуждениям (относительно примитивным, но, видимо, наиболее предпочтительным в условиях экзамена).

Монотонность показательной функции влечёт, что неравенство вида $a(x)^{b(x)} \le a(x)^{c(x)}$ равносильно совокупности трёх систем:

$$\begin{cases} a(x) > 1, \\ b(x) \le c(x); \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 < a(x) < 1, \\ b(x) \ge c(x); \end{cases} \qquad \begin{cases} a(x) = 1, \\ b(x) \text{ и } c(x) \text{ существуют.} \end{cases}$$

В неравенстве вида $a(x)^{b(x)} \le 1$ число 1 в правой части можно заменить выражением $a(x)^0$. Поэтому неравенство вида $a(x)^{b(x)} \le 1$ равносильно совокупности трёх систем:

$$\begin{cases} a(x) > 1, \\ b(x) \le 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 < a(x) < 1, \\ b(x) \ge 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} a(x) = 1, \\ b(x) \text{ существует.} \end{cases}$$

В нашем случае эти общие соображения означают, что исходное неравенство распадается на три задачи (две системы и одно уравнение):

$$\begin{cases} 2\log_2^2 x - \log_2 x^2 + 1 > 1, \\ x^2 - 2x \le 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 < 2\log_2^2 x - \log_2 x^2 + 1 < 1, \\ x^2 - 2x \ge 0; \end{cases} \qquad 2\log_2^2 x - \log_2 x^2 + 1 = 1.$$

Решим их по порядку.

1. Первое неравенство первой системы, неравенство $2\log_2^2 x - \log_2 x^2 + 1 > 1$, равносильно неравенству $\log_2^2 x - \log_2 x > 0$, которое с помощью новой неизвестной $t = \log_2 x$ сводится к квадратичному неравенству $t^2 - t > 0$. Это квадратичное неравенство легко решается: $t < 0$ или $t > 1$. Возвращаясь к основной неизвестной x, мы получим совокупность двух неравенств: $\log_2 x < 0$ и $\log_2 x > 1$. Первое из них равносильно тому, что $0 < x < 1$, а второе — тому, что $x > 2$.

Второе неравенство первой системы, неравенство $x^2 - 2x \le 0$, является простым квадратичным неравенством и множество его решений — отрезок $0 \le x \le 2$.

Пересекая множества решений первого и второго неравенств, мы получим множество решений первой системы: $0 < x < 1$.

2. Первое неравенство второй системы, двойное неравенство $0 < 2\log_2^2 x - \log_2 x^2 + 1 < 1$, равносильно системе из двух неравенств: $2\log_2^2 x - 2\log_2 x + 1 > 0$ и $\log_2^2 x - \log_2 x > 0$. С помощью новой неизвестной $t = \log_2 x$ мы сведём дело к системе из двух квадратичных неравенств: $2t^2 - 2t + 1 > 0$ и $t^2 - t < 0$. Первое из этих неравенств истинно при всех t (так как дискриминант квадратного трёхчлена $2t^2 - 2t + 1$ отрицателен) и потому дальше его можно не учитывать, а второе равносильно тому, что $0 < t < 1$. Возвращаясь к основной неизвестной x, мы получим двойное неравенство: $0 < \log_2 x < 1$, множество решений которого — интервал $1 < x < 2$.

Второе неравенство первой системы, неравенство $x^2 - 2x \geq 0$, является простым квадратичным неравенством и множество его решений — объединение двух лучей: $x \leq 0$ и $x \geq 2$.

Пересекая множества решений первого и второго неравенств, мы получим, что множество решений второй системы пусто.

3. Уравнение $2\log_2^2 x - \log_2 x^2 + 1 = 1$ очевидными преобразованиями приводится к виду $\log_2 x \cdot \left(\log_2 x - 1\right) = 0$ и потому распадается на два уравнения:

$$\log_2 x = 0 \qquad \text{и} \qquad \log_2 x = 1,$$

которые дают $x = 1$ и $x = 2$ соответственно.

Объединяя множества решений задач 1, 2 и 3, мы получаем ответ задачи: $0 < x \leq 1$ или $x = 2$. Этот задачи можно записать и на более формальном языке теории множеств как объединение промежутка $\left(0;1\right]$ и одноэлементного множества $\{2\}$, содержащего одно число 2: $\left(0;1\right] \cup \{2\}$.

2 способ базируется на следующем простом утверждении: если $a > 0$, то выражение $a^b - a^c$ положительно, равно 0 или отрицательно тогда и только тогда, когда выражение $(b-c)(a-1)$ положительно, равно 0 или отрицательно соответственно. Поэтому неравенство $a^b \leq a^c$ равносильно системе

$$\begin{cases} (b-c)(a-1) \leq 0, \\ a > 0, \end{cases}$$

а неравенство $a^b \leq 1$ — системе

$$\begin{cases} b(a-1) \leq 0, \\ a > 0. \end{cases}$$

В нашем случае это даст систему

$$\begin{cases} \left(x^2 - 2x\right)\left(\log_2^2 x - \log_2 x\right) \leq 0, \\ 2\log_2^2 x - 2\log_2 x + 1 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\left(x-2\right)\left(\log_2 x - \log_2 1\right)\left(\log_2 x - \log_2 2\right) \leq 0, \\ 2\log_2^2 x - 2\log_2 x + 1 > 0. \end{cases}$$

Знак выражения $\log_2 f - \log_2 g$ на множестве $f > 0, g > 0$ совпадает со знаком выражения $f - g$. Поэтому первое неравенство этой системы на множестве $x > 0$ равносильно неравенству

$$x(x-1)(x-2)^2 \le 0,$$

которое мгновенно решается методом интервалов: $0 \le x \le 1$ или $x = 2$. Учитывая условие $x > 0$, мы получим: $0 < x \le 1$ или $x = 2$.

Второе неравенство, $2\log_2^2 x - 2\log_2 x + 1 > 0$, как мы видели раньше, справедливо при всех (допустимых) значениях неизвестной, т.е. при всех $x > 0$, и потому его можно не учитывать (условие $x > 0$ уже отмечено), так что ответом задачи будет множество решений первого неравенства последней системы.

Ответ: $0 < x \le 1$ или $x = 2$.

Задача 5. Середины сторон выпуклого четырёхугольника $ABCD$ лежат на окружности. Известно, что $AB = 1$, $BC = 4$, $CD = 8$. Найдите AD.

Решение. Пусть K — середина стороны AB, L — середина стороны BC, M — середина стороны CD, N — середина стороны AD. Решение нашей задачи будет базироваться на следующем простом утверждении:

> **Теорема Вариньона.** *Каким бы ни был выпуклый четырёхугольник $ABCD$, четырёхугольник $KLMN$, вершины которого являются серединами сторон четырёхугольника $ABCD$, всегда будет параллелограммом.*

Действительно, KL можно рассматривать как среднюю линию треугольника ABC. Поэтому $KL \parallel AC$ и $KL = \frac{1}{2}AC$. Аналогично, MN можно рассматривать как среднюю линию треугольника ACD. Поэтому $MN \parallel AC$ и $MN = \frac{1}{2}AC$. Отсюда следует, что стороны KL и MN четырёхугольника $KLMN$ параллельны и равны. Значит, этот четырёхугольник — параллелограмм. Отметим, что с равным успехом на первом шаге этого рассуждения можно было бы рассматривать стороны NK и ML, которые также равны и параллельны, так как являются средними линиями треугольников ABD и BCD соответственно.

По условию середины сторон основного четырёхугольника $ABCD$ лежат на окружности. Иначе говоря, вокруг четырёхугольника $KLMN$ можно описать окружность. Мы уже знаем, что последний четырёхугольник — параллелограмм, а единственный вид параллелограммов, вокруг которых можно описать окружность — это прямоугольники. Итак, четырёхугольник $KLMN$ является прямоугольником (см. Рисунок 1).

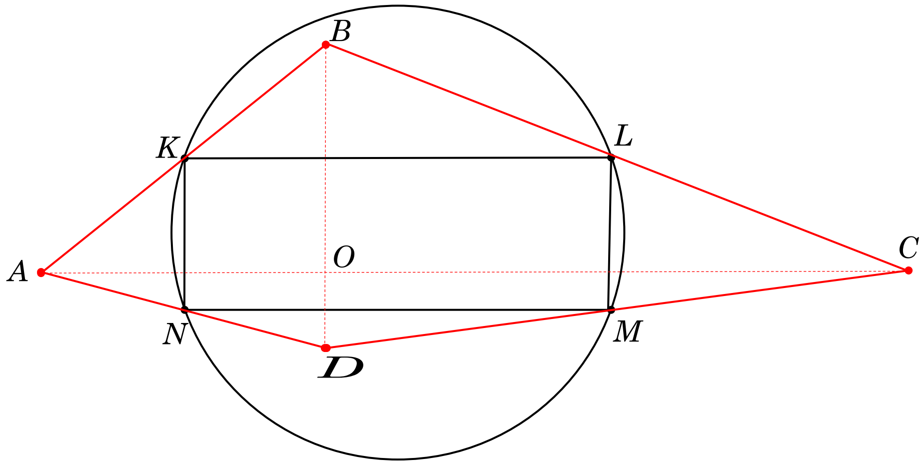

Рисунок 1

Далее, диагонали AC и BD основного четырёхугольника $ABCD$, как мы отмечали выше, параллельны сторонам KL и LM соответственно четырёхугольника $KLMN$. Поскольку угол KLM — прямой, можно утверждать, что $AC \perp BD$.

Следовательно, диагонали AC и BD основного четырёхугольника $ABCD$, пересекаясь в точке O, разбивают этот четырёхугольник на четыре прямоугольных треугольника: ΔAOB, ΔBOC, ΔCOD и ΔDOA. Пусть $AO = x$, $BO = y$, $CO = u$, $DO = v$. Теорема Пифагора применительно к перечисленным выше треугольникам даёт: $AB^2 = x^2 + y^2$, $BC^2 = y^2 + u^2$, $CD^2 = u^2 + v^2$, $AD^2 = x^2 + v^2$. Складывая первое и третье равенства, а затем второе и четвёртое, мы получим: $AB^2 + CD^2 = x^2 + y^2 + u^2 + v^2$, $BC^2 + AD^2 = y^2 + u^2 + x^2 + v^2$. Отсюда ясно, что

$$AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2.$$

В доказательстве этого равенства заключается суть нашей задачи. Теперь мы мгновенно получаем ответ: $AD = \sqrt{AB^2 + CD^2 - BC^2} = \sqrt{1 + 64 - 16} = 7$.

Ответ: 7.

Замечание. В ходе решения мы доказали следующее утверждение (именно оно позволило получить ключевое равенство $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$):

если выпуклый четырёхугольник $ABCD$ таков, что вокруг четырёхугольника $KLMN$, вершины которого являются серединами сторон четырёхугольника $ABCD$, можно описать окружность, то диагонали AC и BD основного четырёхугольника $ABCD$ перпендикулярны.

Верно и обратное утверждение:

если диагонали AC и BD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ перпендикулярны, то вокруг четырёхугольника $KLMN$, вершины которого являются серединами сторон четырёхугольника $ABCD$, можно описать окружность.

Действительно, практически дословное повторение проведённых выше рассуждений показывает, что четырёхугольник $KLMN$ является прямоугольником, а тогда вокруг него можно описать окружность.

Задача 6. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$x^2+\left(1-a+\sqrt[4]{|x|}\right)^2=\frac{a^2}{4}$$

имеет ровно три решения.

Решение. При любом фиксированном значении параметра a левая и правая части нашего уравнения, рассматриваемые как функции от x, являются чётными. Поэтому уравнение не изменится, если заменить x на $-x$. Действительно, если мы заменим x на $-x$, то получим уравнение:

$$(-x)^2+\left(1-a+\sqrt[4]{|-x|}\right)^2=\frac{a^2}{4}.$$

Поскольку $(-x)^2=x^2$, $|-x|=|x|$, последнее уравнение сводится к исходному.

Это свойство неизменности уравнения при преобразовании $x\mapsto -x$ (стрелка «$\mapsto$» означает «заменить на») влечёт следующий вывод о строении множества M_a корней исходного уравнения (индекс «a» указывает на зависимость этого множества от параметра): ***если число x_0 — корень исходного уравнения, то и число $-x_0$ — корень.*** Иначе говоря, ***множество M_a, если оно непусто, симметрично относительно точки*** 0. Поэтому множество M_a может быть только:

1. или пустым (т.е. исходное уравнение при рассматриваемом значении параметра не имеет корней);
2. или иметь вид $\{x_1,-x_1,x_2,-x_2,\ldots\}$, где $x_1,x_2,\ldots$ — различные положительные числа;
3. или иметь вид $\{0,x_1,-x_1,x_2,-x_2,\ldots\}$, где $x_1,x_2,\ldots$ — различные положительные числа.

В двух последних случаях мы не утверждаем, что, если множество M_a бесконечно, то его элементы можно перенумеровать (такое множество называется *счётным*; существуют примеры бесконечных множеств, которые не являются счётными, скажем, интервал $(0;1)$) — использованная запись лишь подчеркивает симметрию этого множества относительно $x_0=0$. Однако, если M_a — конечно, то во втором случае корней чётное количество, а в третьем — нечётное. Важно подчеркнуть, что мы получили сформулированный выше результат о том, каким может быть множество корней уравнения, *не решая* это уравнение.

Симметрия множества M_a относительно начала влечёт, что, ***если при некотором значении параметра a исходное уравнение имеет три корня, то при этом же значении a число $x_0 = 0$ является корнем уравнения.*** Этот результат означает, что следующая вспомогательная задача:

найдите все значения параметра a, при которых число 0 является корнем уравнения $x^2 + \left(1 - a + \sqrt[4]{|x|}\right)^2 = \dfrac{a^2}{4}$,

является задачей-следствием исходной задачи.

Поэтому множество значений параметра a, составляющих ответ исходной задачи, будет подмножеством множества значений параметра a, составляющих ответ вспомогательной задачи.

Ответ вспомогательной задачи найти очень легко: нужно в уравнение вместо x подставить число 0 (что даст $(1-a)^2 = a^2/4$) и решить получившееся уравнение относительно a:

$$(1-a)^2 = a^2/4 \quad \Leftrightarrow \quad 3a^2 - 8a + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 2 \text{ или } a = 2/3.$$

Теперь, как, например, при решении любого уравнения преобразованиями-следствиями, нужно проверить, какие из двух «подозрительных» значений параметра являются решениями исходной задачи. Иначе говоря, нужно в исходном уравнении взять $a = 2$ и $a = 2/3$, а затем в каждом из двух этих случаев выяснить, имеет ли получившееся уравнение с одной неизвестной x три корня или нет.

Случай 1. Для $a = 2$ исходное уравнение примет вид:

$$x^2 + \left(\sqrt[4]{|x|} - 1\right)^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + \sqrt{|x|} - 2\sqrt[4]{|x|} = 0.$$

Для новой неизвестной $t = \sqrt[4]{|x|}$ последнее уравнение примет вид: $t^8 + t^2 - 2t = 0$, причём для решения уравнения $x^2 + \sqrt{|x|} - 2\sqrt[4]{|x|} = 0$ нам интересны только его неотрицательные корни.

Уравнение $t^8 + t^2 - 2t = 0$, очевидно, имеет два целых корня: $t_1 = 0$ и $t_2 = 1$. Поэтому его левую часть можно разложить на множители, причём разложение имеет вид: $t(t-1)Q(t)$, где $Q(t)$ — многочлен шестой степени от t. Найти этот многочлен можно делением многочлена $t^8 + t^2 - 2t$ на двучлен $t^2 - t$ «в столбик» или разложением многочлена $t^8 + t^2 - 2t$ на множители методом группировки:

$$\begin{aligned} t^8 + t^2 - 2t &= \left(t^8 - t\right) + \left(t^2 - t\right) = t\left(t^7 - 1\right) + t\left(t - 1\right) \\ &= t(t-1)\left(t^6 + t^5 + t^4 + t^3 + t^2 + t + 2\right). \end{aligned}$$

Следовательно, уравнение $t^8+t^2-2t=0$ распадается на три уравнения:

$$t=0, \qquad t-1=0, \qquad t^6+t^5+t^4+t^3+t^2+t+2=0.$$

Два первых уравнения дают уже известные нам корни $t_1=0$ и $t_2=1$, а третье уравнение, очевидно, не имеет неотрицательных корней (его левая часть, $Q(t)$, для $t\ge 0$ является суммой шести неотрицательных слагаемых вида t^n и положительного числа 2 и потому $Q(t)\ge 2$ при любом $t\ge 0$).

Возвращаясь к основной неизвестной x, мы получим, что уравнение $x^2+\sqrt{|x|}-2\sqrt[4]{|x|}=0$ распадается на два уравнения: $\sqrt[4]{|x|}=0$ и $\sqrt[4]{|x|}=1$. Первое из них имеет единственный корень $x=0$, а второе — два корня: $x=1$ и $x=-1$. Таким образом, при $a=2$ исходное уравнение имеет три корня, т.е. проверяемое значение параметра удовлетворяет требованию задачи.

Случай 2. Для $a=2/3$ исходное уравнение примет вид:

$$x^2+\left(\frac{1}{3}+\sqrt[4]{|x|}\right)^2=\frac{1}{9} \quad \Leftrightarrow \quad x^2+\sqrt{|x|}+\frac{2}{3}\sqrt[4]{|x|}=0.$$

Функция в левой части последнего уравнения:

1. определена при всех x;
2. является чётной;
3. монотонно возрастает при $x\ge 0$ (как сумма трёх монотонно возрастающих функций) и, значит (в силу чётности), монотонно убывает при $x\le 0$;
4. принимает значение 0 при $x=0$.

Из графика этой функции (он похож на график стандартной параболы $y=x^2$) ясно, что последнее уравнение имеет единственный корень $x=0$. Таким образом, проверяемое значение параметра не удовлетворяет требованию задачи.

Ответ: $a=2$.

Задача 7. Объём треугольной призмы $ABCA'B'C'$ с основанием ABC и боковыми рёбрами AA', BB', CC' равен 72. Найдите объём тетраэдра $DEFG$, где D — центр грани $ABB'A'$, E — точка пересечения медиан треугольника $A'B'C'$, F — середина ребра AC и G — середина ребра BC.

Решение. Тетраэдр $DEFG$ расположен внутри призмы $ABCA'B'C'$ так причудливо, что совсем неясно, как соотносятся их объёмы (см. Рисунок 2; на этом рисунке M и M' — середины рёбер AB и $A'B'$ соответственно, так что точка D является серединой отрезка MM'). Поэтому мы заменим тетраэдр $DEFG$ на равновеликий ему тетраэдр, объём которого легко будет вычислить. Для этого мы используем следующее утверждение:

если два тетраэдра имеют общее основание, а их вершины лежат на прямой, которая параллельна основанию, то эти тетраэдры равновелики.

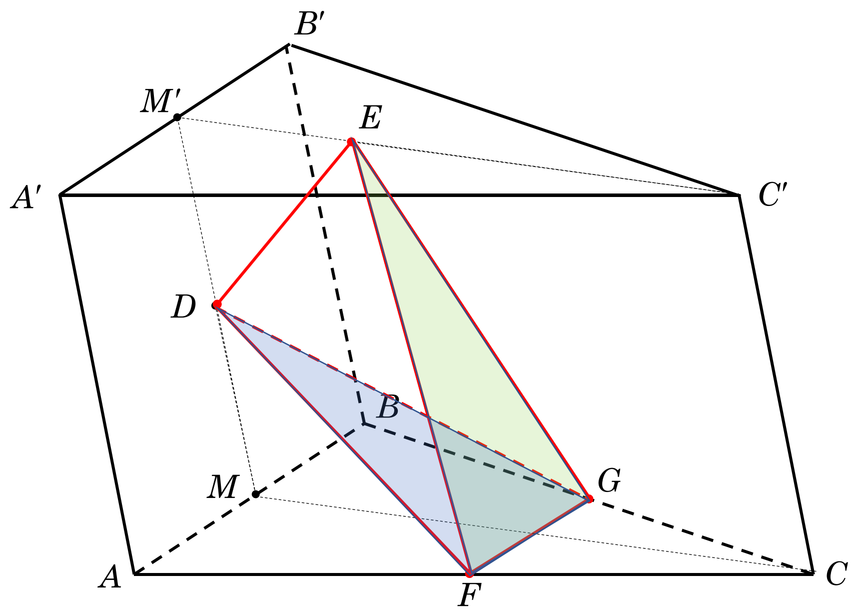

Рисунок 2

В качестве основания тетраэдра $DEFG$ мы рассмотрим треугольник EFG, а в качестве вершины – точку D. Сместим точку D параллельно плоскости EFG так, чтобы она попала на плоскость ABC. Проще всего сделать это следующим образом. Поскольку грань $AA'B'B$ основной призмы является параллелограммом, прямая MM' параллельна рёбрам AA' и BB', а значит и ребру CC'. Рассмотрим сечение $MM'C'C$ призмы $ABCA'B'C'$ плоскостью α, проходящей через ребро CC' и параллельную ему прямую MM' (см. Рисунок 3).

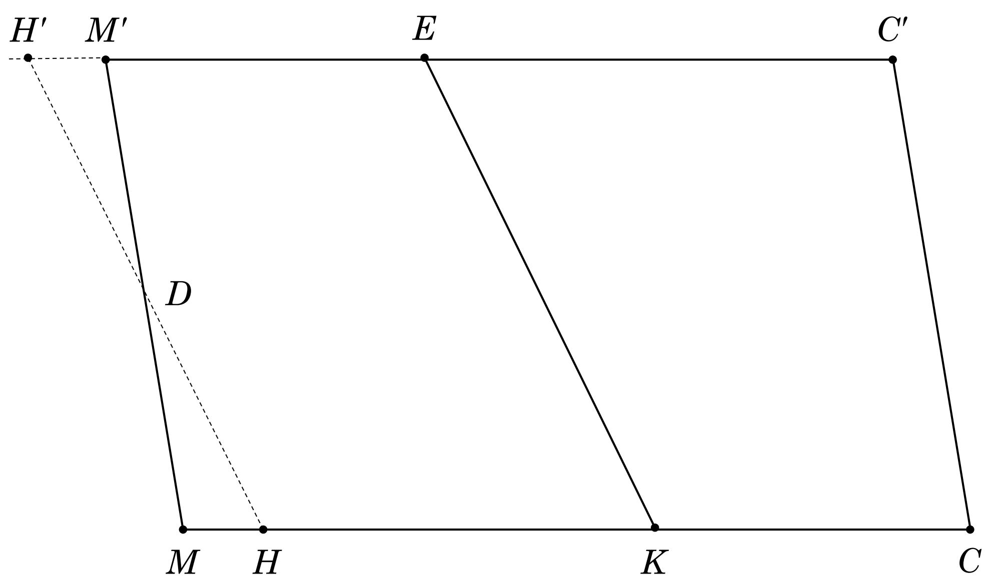

Рисунок 3

Так как плоскости ABC и $A'B'C'$ параллельны, $M'C' \parallel MC$. Кроме того, как мы отметили ранее, $MM' \parallel CC'$. Значит, четырёхугольник $MM'C'C$ является параллелограммом.

Поскольку $C'M'$ — медиана треугольника $A'B'C'$, точка E лежит на отрезке $M'C'$ и делит его в отношении 1:2, считая от точки M'.

Пусть K — точка пересечения плоскости α и отрезка FG; ясно, что K — середина отрезка FG. Проведём через точку D прямую, параллельную прямой EK, и обозначим H и H' точки пересечения этой прямой с прямыми MC и $M'C'$ соответственно. Пусть x — длина отрезка MH, m_C — длина медианы CM треугольника ABC. Из сказанного выше ясно, что $H'M' = x$, $M'E = \frac{1}{3}m_C$, $MK = \frac{1}{2}m_C$. Поскольку четырёхугольник $HH'EK$ — параллелограмм,

$$H'E = HK \Leftrightarrow x + \frac{1}{3}m_C = \frac{1}{2}m_C - x \Leftrightarrow x = \frac{1}{12}m_C.$$

Ниже нам понадобится длина отрезка HK, которая равна

$$MK - MH = \frac{1}{2}m_C - \frac{1}{12}m_C = \frac{5}{12}m_C.$$

Теперь сместим вершину D тетраэдра $DEFG$ в точку H. В результате тетраэдр $DEFG$ превратится в тетраэдр $HEFG$ (см. Рисунок 4).

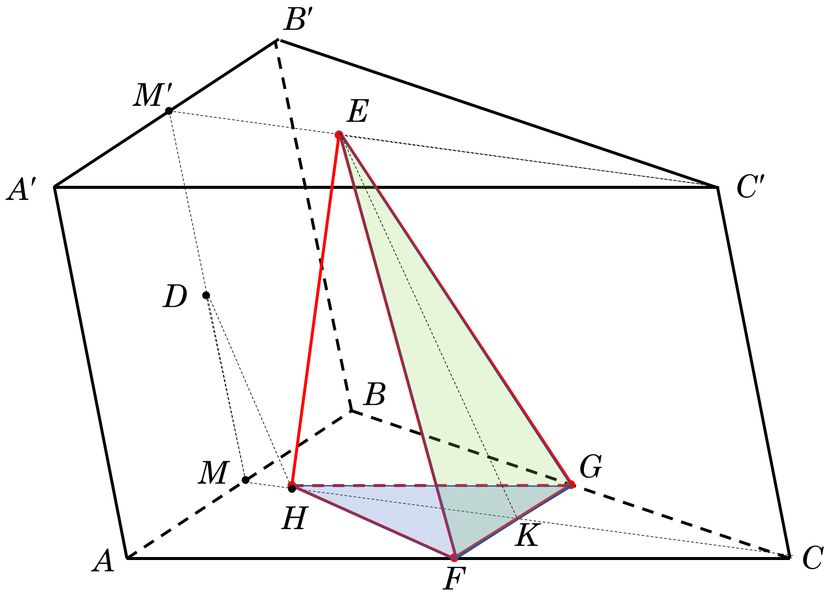

Рисунок 4

Поскольку прямая DH параллельна прямой EK, лежащей в плоскости основания FEG тетраэдра $DEFG$, можно утверждать, что прямая DH параллельна плоскости FEG, а тогда, как мы отметили, тетраэдры $DEFG$ и $HEFG$ равновелики.

Займёмся теперь вычислением объёма тетраэдра $HEFG$, причём в качестве основания этого тетраэдра рассмотрим треугольник HFG, лежащий внутри нижней грани призмы $ABCA'B'C'$, а в качестве вершины — точку E, лежащую внутри верхней грани призмы.

Площадь основания HFG тетраэдра $HEFG$ легко найти из Рисунка 5 с помощью полученных выше результатов. Если h_C — высота треугольника ABC, опущенная из вершины C, $\hat{h}$ — высота треугольника FHG, опущенная из вершины H, то

$$\frac{\hat{h}}{h_C/2} = \frac{5m_C/12}{m_C/2} \Leftrightarrow \hat{h} = \frac{5}{12}h_C.$$

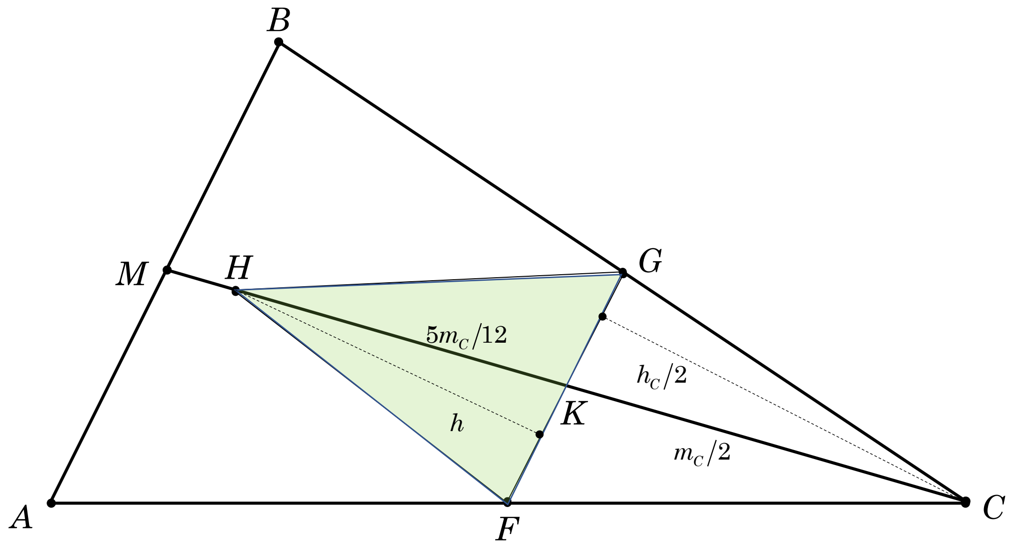

Рисунок 5

Поэтому площадь треугольника HFG равна

$$\frac{1}{2}FG \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \frac{AB}{2} \cdot \frac{5}{12}h_C = \frac{5}{24} \cdot \left(\frac{1}{2}AB \cdot h_C\right) = \frac{5}{24}S_{\Delta ABC}.$$

У основной призмы $ABCA'B'C'$ и тетраэдра $HEFG$ основания лежат в одной плоскости, а высоты равны (они равны расстоянию ρ между плоскостями ABC и $A'B'C'$). Следовательно,

$$V_{HEFG} = \frac{1}{3} S_{HFG} \rho = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{24} S_{ABC} \rho = \frac{5}{72} V_{ABCA'B'C'} = \frac{5}{72} \cdot 72 = 5.$$

Ответ: 5.

ДВИ-2023, вариант 231

Задача 1. Найдите наименьшее целое число, превосходящее $\dfrac{\sqrt{8}}{\dfrac{\sqrt{2}}{20}+\dfrac{\sqrt{2}}{23}}$.

Решение. Начнём решение с того, что упростим данное нам числовое выражение. Для этого в числителе заменим $\sqrt{8}$ равным ему выражением $2\sqrt{2}$, в знаменателе вынесем $\sqrt{2}$ за скобку, а после этого сократим дробь на $\sqrt{2}$:

$$\frac{\sqrt{8}}{\dfrac{\sqrt{2}}{20}+\dfrac{\sqrt{2}}{23}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\left(\dfrac{1}{20}+\dfrac{1}{23}\right)}=\frac{2}{\dfrac{1}{20}+\dfrac{1}{23}}.$$

Сумма дробей $\dfrac{1}{20}$ и $\dfrac{1}{23}$ (которая стоит в знаменателе последнего выражения) равна $\dfrac{23+20}{20\cdot 23}=\dfrac{43}{460}$. Поэтому данное нам число равно

$$\frac{2}{\dfrac{43}{460}}=2:\frac{43}{460}=2\cdot\frac{460}{43}=\frac{920}{43}=21\frac{17}{43}.$$

Больше этого числа следующие целые числа: 22, 23, 24, ... Наименьшее из них — это число 22.

Ответ: 22.

Задача 2. Дана последовательность $a_0, a_1, a_2, \ldots$ действительных чисел. Найдите a_8, если известно, что $a_1=1$ и что для любой пары индексов n, m, таких что $n \geq m \geq 0$, справедливо равенство $a_{n+m}+a_{n-m}=2(a_n+a_m)$.

Решение. В том виде, как задача сформулирована на экзамене, её легко решить следующими примитивными рассуждениями.

1. Запишем равенство $a_{n+m}+a_{n-m}=2(a_n+a_m)$ для $n=0, m=0$:

$$a_0+a_0=2(a_0+a_0).$$

После приведения подобных членов мы получим: $2a_0=4a_0 \Leftrightarrow 2a_0=0$, откуда следует, что $a_0=0$.

2. Запишем равенство $a_{n+m}+a_{n-m}=2(a_n+a_m)$ для $n=1, m=1$:

$$a_2+a_0=2(a_1+a_1).$$

После приведения подобных членов мы получим: $a_2 = 4a_1 - a_0$. Используя данное нам значение $a_1 = 1$ и найденное значение $a_0 = 0$, мы получим: $a_2 = 4 \cdot 1 - 0 = 4$.

3. Запишем равенство $a_{n+m} + a_{n-m} = 2(a_n + a_m)$ для $n = 2, m = 2$:

$$a_4 + a_0 = 2(a_2 + a_2).$$

После приведения подобных членов мы получим: $a_4 = 4a_2 - a_0$. Используя найденные ранее значения $a_0 = 0$ и $a_2 = 4$, мы получим: $a_4 = 4 \cdot 4 - 0 = 16$.

4. Запишем равенство $a_{n+m} + a_{n-m} = 2(a_n + a_m)$ для $n = 4, m = 4$:

$$a_8 + a_0 = 2(a_4 + a_4).$$

После приведения подобных членов мы получим: $a_8 = 4a_4 - a_0$. Используя найденные ранее значения $a_0 = 0$ и $a_4 = 16$, мы получим: $a_8 = 4 \cdot 16 - 0 = 64$.

Ответ: $a_8 = 64$.

Замечание. Задача становится гораздо сложнее и интереснее, если переформулировать её следующим образом:

Дана последовательность $a_0, a_1, a_2, \ldots$ *действительных чисел. Найдите зависимость* a_n *от* n *(т.е. формулу общего члена), если известно, что для любой пары индексов* n, m, *таких что* $n \geq m \geq 0$, *справедливо равенство*

$$a_{n+m} + a_{n-m} = 2(a_n + a_m). \qquad (1)$$

В такой формулировке мы фактически рассматриваем соотношение (1) как функциональное уравнение для функции $f(n) \equiv a_n$, заданной на множестве $\mathbb{Z}_+$ неотрицательных целых чисел, и ищем общее решение этого уравнения.

Из школьного курса нам известны четыре вида функциональных уравнений для последовательностей:

1. Уравнение $a_{n+1} + a_{n-1} = 2a_n$, $n \geq 1$, для последовательности $a_0, a_1, a_2, \ldots$ Этому уравнению удовлетворяют арифметические прогрессии и только они, так что существует число d (разность прогрессии) такое, что $a_n = a_0 + nd$ при всех $n \in \mathbb{Z}_+$ (это просто формула общего члена арифметической прогрессии). Иначе говоря, справедливость равенства $a_{n+1} + a_{n-1} = 2a_n$ при всех $n \geq 1$ означает, что функция a_n является линейной.
2. Уравнение $a_n = a_{n-1} + d$, которое определяет арифметическую прогрессию *с заданной разностью* d (а не арифметическую прогрессию вообще). Если последовательность a_n нумеруется, начиная с 0, то равенство $a_n = a_{n-1} + d$ должно быть справедливо при всех $n \geq 1$; в этом случае формула общего члена имеет вид: $a_n = a_0 + nd$. Если же последовательность начинается с

a_1, то равенство $a_n = a_{n-1} + d$ должно быть справедливо при всех $n \geq 2$; в этом случае формула общего члена имеет вид: $a_n = a_1 + (n-1)d$.

3. Уравнение $a_{n+1} \cdot a_{n-1} = a_n^2$, $n \geq 1$, для последовательности ненулевых чисел $a_0, a_1, a_2, \ldots$ Этому уравнению удовлетворяют геометрические прогрессии и только они, так что существует ненулевое число q (знаменатель прогрессии) такое, что $a_n = a_0 q^n$ при всех $n \in \mathbb{Z}_+$ (это просто формула общего члена геометрической прогрессии). Иначе говоря, справедливость равенства $a_{n+1} \cdot a_{n-1} = a_n^2$ при всех $n \geq 1$ означает, что функция a_n является «показательной» (мы поставили кавычки потому, что стандартная показательная действительного аргумента имеет положительное основание).
4. Уравнение $a_n = a_{n-1} \cdot q$, которое определяет геометрическую прогрессию *с заданным знаменателем* q (а не геометрическую прогрессию вообще). Если последовательность a_n нумеруется, начиная с 0, то равенство $a_n = a_{n-1} \cdot q$ должно быть справедливо при всех $n \geq 1$; в этом случае формула общего члена имеет вид: $a_n = a_0 q^n$. Если же последовательность начинается с a_1, то равенство $a_n = a_{n-1} \cdot q$ должно быть справедливо при всех $n \geq 2$; в этом случае формула общего члена имеет вид: $a_n = a_1 q^{n-1}$.

Уравнение (1) очень похоже на уравнение $a_{n+1} + a_{n-1} = 2a_n$, определяющее арифметические прогрессии. Сходство станет ещё яснее, если рассмотреть (1) для $m = 1$:

$$a_{n+1} + a_{n-1} = 2a_n + 2a_1, \quad n \geq 1. \tag{2}$$

Уравнение (2) отличается от уравнения $a_{n+1} + a_{n-1} = 2a_n$ «лишним» слагаемым $2a_1$ в правой части. Чтобы от него избавиться, проведём следующие рассуждения (хорошо известные в математике при решении неоднородных уравнений с «правой частью»):

1. Найдём какое-нибудь частное, т.е. конкретное, решение уравнения (2). Нетрудно сообразить, что, например, последовательность $a_n^* = a_1 n^2$ является таким решением (это легко проверить простой подстановкой).
2. Запишем тот факт, что последовательность $a_n^* = a_1 n^2$ является решением уравнения (2), в виде:
$$a_{n+1}^* + a_{n-1}^* = 2a_n^* + 2a_1 \text{ при всех } n \geq 1. \tag{3}$$
3. Вычтем из уравнения (2) равенство (3). В результате мы получим, что
$$\left(a_{n+1} - a_{n+1}^*\right) + \left(a_{n-1} - a_{n-1}^*\right) = 2\left(a_n - a_n^*\right) \text{ при всех } n \geq 1. \tag{4}$$

4. Если ввести новую последовательность $b_n = a_n - a_n^*$, то для неё соотношение (4) примет вид $b_{n+1} + b_{n-1} = 2b_n$ — это в точности функциональное уравнение, определяющее арифметические прогрессии.

Значит, для последовательности b_n справедлива формула общего члена арифметической прогрессии, т.е. существует такое число d, что $b_n = b_0 + nd$ при всех $n \in \mathbb{Z}_+$. Для основной последовательности a_n это означает, что при всех $n \in \mathbb{Z}_+$ справедливо равенство: $a_n = b_0 + nd + a_1 n^2$. В частности, при $n = 0$ и $n = 1$ мы получим: $a_0 = b_0$ и $a_1 = b_0 + d + a_1$ соответственно. Отсюда следует, что $d = -a_0$, так что окончательно мы следующую формулу для общего решения уравнения (2):

$$a_n = a_1 n^2 - a_0 n + a_0, \quad n \geq 0. \tag{5}$$

Уравнение (2) можно свести к уравнению для арифметической прогрессии и другим способом, который часто применяется при решении функциональных уравнений для последовательностей. Для этого следующим образом преобразуем уравнение (2):

1. перенесём член a_{n-1} из левой части в правую,
2. член $2a_n$ запишем как сумму $a_n + a_n$ и одно слагаемое a_n перенесём из правой части в левую.

В результате мы получим:

$$a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1} + 2a_1, \quad n \geq 1. \tag{6}$$

Теперь введём новую последовательность $x_1, x_2, x_3, \ldots$ с помощью равенства: $x_n = a_n - a_{n-1}$. Это превратит соотношение (6) в равенство

$$x_{n+1} = x_n + 2a_1, \quad n \geq 1, \tag{7}$$

которое означает, что последовательность $\{x_n\}_{n\geq 1}$ является арифметической прогрессией с разностью $2a_1$. Поэтому $x_n = x_1 + 2a_1(n-1)$. Возвращаясь к основной последовательности a_n, т.е. заменяя x_n на $a_n - a_{n-1}$, а x_1 на $a_1 - a_0$, мы получим, что при всех $n \geq 1$ верно равенство

$$a_n - a_{n-1} = (2n-1)a_1 - a_0. \tag{8}$$

Запишем теперь соотношение (8) для $n = 1, 2, 3, \ldots, n$:

$$
\begin{aligned}
&a_1 - a_0 = 1 \cdot a_1 - a_0, \\
&a_2 - a_1 = 3 \cdot a_1 - a_0, \\
&a_3 - a_2 = 5 \cdot a_1 - a_0, \\
&\ldots \\
&a_n - a_{n-1} = (2n-1)a_1 - a_0,
\end{aligned}
$$

и сложим все получившиеся равенства. В результате мы получим:

$$a_n - a_0 = \big(1+3+5+\ldots+(2n-1)\big)a_1 - na_0, \quad n \geq 1.$$

Сумма $1+3+5+\ldots+(2n-1)$, состоящая из n первых нечётных чисел, может быть подсчитана по формуле для суммы членов арифметической прогрессии; она равна n^2. Поэтому

$$a_n = n^2 a_1 - na_0 + a_0, \quad n \geq 1.$$

Хотя последнее равенство установлено для $n \geq 1$, ясно, что оно верно и для $n = 0$.

Таким образом, второй подход даёт ту же формулу для общего решения уравнения (2), что и первый.

Займёмся теперь основным уравнением (1). Поскольку уравнение (2) является следствием уравнения (1), каждое решение уравнения (1) является и решением уравнения (2). Утверждать обратное, вообще говоря, нельзя, т.к. могут быть решения уравнения (2), которые не являются решениями уравнения (1). Особой беды в этом нет, т.к. простая проверка позволяет установить, какие решения уравнения (2) являются решениями уравнения (1), а какие нет.

Если мы подставим в уравнение (1) вместо a_n выражение $a_1 n^2 - a_0 n + a_0$ и, соответственно, вместо a_m выражение $a_1 m^2 - a_0 m + a_0$, вместо a_{n+m} выражение $a_1(n+m)^2 - a_0(n+m) + a_0$, вместо a_{n-m} выражение $a_1(n-m)^2 - a_0(n-m) + a_0$, то после несложных преобразований мы получим: $2(m-1)a_0 = 0$, причём это равенство должно быть выполнено при всех $n \geq 0$ и $0 \leq m \leq n$. Ясно, что это возможно тогда и только тогда, когда $a_0 = 0$. Таким образом, общее решение уравнения (1) даётся формулой: $a_n = a_1 n^2$. Если, как сказано в условии нашей основной задачи, $a_1 = 1$, то $a_n = n^2$, так что $a_8 = 8^2 = 64$.

Задача 3. Решите неравенство $x^{\log_3 \sqrt{x}} > 9$.

Решение. Прологарифмируем данное нам неравенство используя в качестве основания логарифмов число 3:

$$\log_3\left(x^{\log_3 \sqrt{x}}\right) > \log_3 9.$$

В правой части заменим $\log_3 9$ его значением 2, а в левой части применим тождество $\log_a\left(x^k\right)=k\log_a x$, что приведёт исходное неравенство к виду:

$$\log_3\sqrt{x}\cdot\log_3 x>2.$$

Применяя то же тождество, заменим $\log_3\sqrt{x}$ на $\frac{1}{2}\log_3 x$:

$$\frac{1}{2}\log_3^2 x>2 \quad\Leftrightarrow\quad \log_3^2 x>4 \quad\Leftrightarrow\quad (\log_3 x-2)(\log_3 x+2)>0.$$

Решать последнее неравенство можно разными методами.

А. Примитивный *метод расщепления* сводит его к совокупности двух систем:

$$\begin{cases}\log_3 x-2>0,\\ \log_3 x+2>0,\end{cases}\qquad \begin{cases}\log_3 x-2<0,\\ \log_3 x+2<0,\end{cases}$$

которые легко решаются следующими элементарными преобразованиями:

1. Первая система:

$$\begin{cases}\log_3 x-2>0\\ \log_3 x+2>0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}\log_3 x>\log_3 9\\ \log_3 x>\log_3\frac{1}{9}\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x>9\\ x>\frac{1}{9}\end{cases}\Leftrightarrow \quad x>9.$$

2. Вторая система:

$$\begin{cases}\log_3 x-2<0\\ \log_3 x+2<0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}\log_3 x<\log_3 9\\ \log_3 x<\log_3\frac{1}{9}\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}0<x<9\\ 0<x<\frac{1}{9}\end{cases}\Leftrightarrow \quad 0<x<\frac{1}{9}.$$

Б. Вместо метода расщепления можно было использовать *метод введения новой неизвестной*, заменив $\log_3 x$ какой-нибудь буквой, например, t. Это даст квадратичное неравенство $(t-2)(t+2)>0$, множество решений которого характеризуется условием: $t<-2$ или $t>2$. Возвращаясь к основной неизвестной, мы получим совокупность из двух неравенств: $\log_3 x<-2$ и $\log_3 x>2$, множества решений которых имеют вид $0<x<1/9$ и $x>9$ соответственно.

В. Самое короткое решение получится, если мы применим *метод интервалов*, что даст систему

$$\begin{cases}(x-9)\left(x-\frac{1}{9}\right)>0\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<\frac{1}{9}\ \text{или}\ x>9\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow 0<x<\frac{1}{9}\ \text{или}\ x>9.$$

Ответ: $\left(0;\frac{1}{9}\right)\cup(9;+\infty)$.

Задача 4. Решите уравнение $\cos 3x + 2\sin 2x + 2\cos x = 0$.

Решение. В предложенном нам уравнении стоят тригонометрические функции близких аргументов $3x$, $2x$ и x. С помощью стандартных формул $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$ и $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ мы сведём дело к уравнению, в котором встречаются только $\sin x$ и $\cos x$:

$$4\cos^3 x + 4\sin x\cos x - \cos x = 0.$$

Обычно после этого уравнение решается введением новой неизвестной $y = \sin x$ (если в нечётной степени стоит только $\sin x$), $y = \cos x$ (если в нечётной степени стоит только $\cos x$) или $y = \operatorname{tg} x$ (если в нечётной степени стоит и $\sin x$, и $\cos x$).

В нашем случае сначала, очевидно, нужно вынести $\cos x$ за скобки и расщепить уравнение на два: $\cos x = 0$ и $4\cos^2 x + 4\sin x - 1 = 0$.

Первое из них является простейшим тригонометрическим уравнением и его множество решений задаётся формулой: $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Второе уравнение с помощью основного тригонометрического тождества преобразуется к виду: $4\sin^2 x - 4\sin x - 3 = 0$, после чего мы можем ввести новую неизвестную $y = \sin x$ и свести дело к решению квадратного уравнения $4y^2 - 4y - 3 = 0$. Это квадратное уравнение имеет два корня: $y_1 = \dfrac{3}{2}$, $y_2 = -\dfrac{1}{2}$. Соответственно уравнение $4\sin^2 x - 4\sin x - 3 = 0$ распадается на два простейших тригонометрических уравнения: $\sin x = \dfrac{3}{2}$ и $\sin x = -\dfrac{1}{2}$. Множество решений первого из них — пусто, а множество решений второго задаётся формулой:

$$x = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Так как $\arcsin\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\arcsin\dfrac{1}{2} = -\dfrac{\pi}{6}$, последнее соотношение можно упростить и записать в виде: $x = (-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \quad x = (-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

Задача 5. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AF, BD и CE. Найдите все возможные значения разности углов A и B этого треугольника, если известно, что $DE : EF = BC : AC$.

Решение. Конфигурация, о которой идёт речь в задаче, изображена на Рисунке 1.

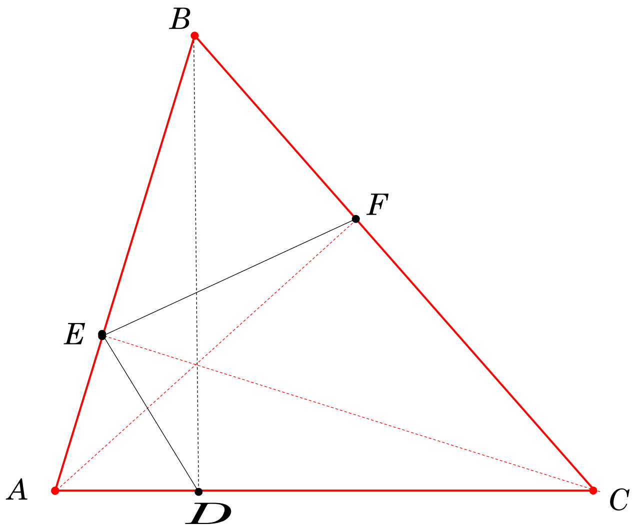

Рисунок 1

Выглядит она как бессистемное нагромождение линий. Ключевая идея решения заключается в том, чтобы заметить в этой конфигурации две пары прямоугольных треугольников с общей гипотенузой:

1. ΔBDC и ΔBEC с общей гипотенузой BC,
2. ΔAEC и ΔAFC с общей гипотенузой AC.

Проанализируем первую пару треугольников. Для этого воспользуемся Рисунком 2, на котором мы убрали «лишние» линии и оставили только высоты BD и CE, а также выделили заливкой треугольники BDC и BEC.

Известно, что если прямоугольные треугольники (в любом количестве) имеют общую гипотенузу, то окружность, построенная на этой гипотенузе как на диаметре, проходит через вершины прямых углов всех рассматриваемых прямоугольных треугольников. На Рисунке 2 мы построили окружность на отрезке BC как на диаметре (так что центр этой окружности лежит в середине отрезка BC, а её радиус R равен половине этого отрезка). В силу сказанного выше построенная окружность пройдёт через точки D и E.

Теперь обратим внимание на угол A основного треугольника ABC; пусть α — его градусная мера. Вершина этого угла лежит вне построенной окружности. Значит, он измеряется полуразностью дуг, заключённых между его сторонами:

$\alpha = \dfrac{BC - DE}{2}$. Но градусная мера дуги BC равна 180° (ведь BC — диаметр окружности). Поэтому $DE = 180^\circ - 2\alpha$.

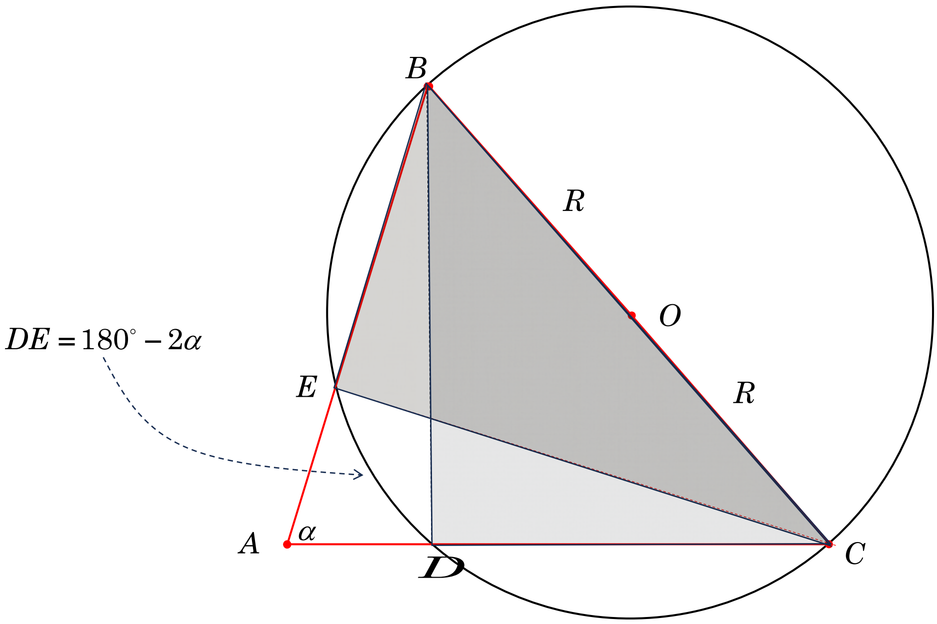

Рисунок 2

Отрезок DE является хордой построенной окружности, причём градусная мера дуги DE, стягиваемой этой хордой, равна $180^\circ - 2\alpha$. Значит (см. Рисунок 3),

$$DE = 2R \cdot \sin\left(90^\circ - \alpha\right) = BC \cdot \cos\alpha.$$

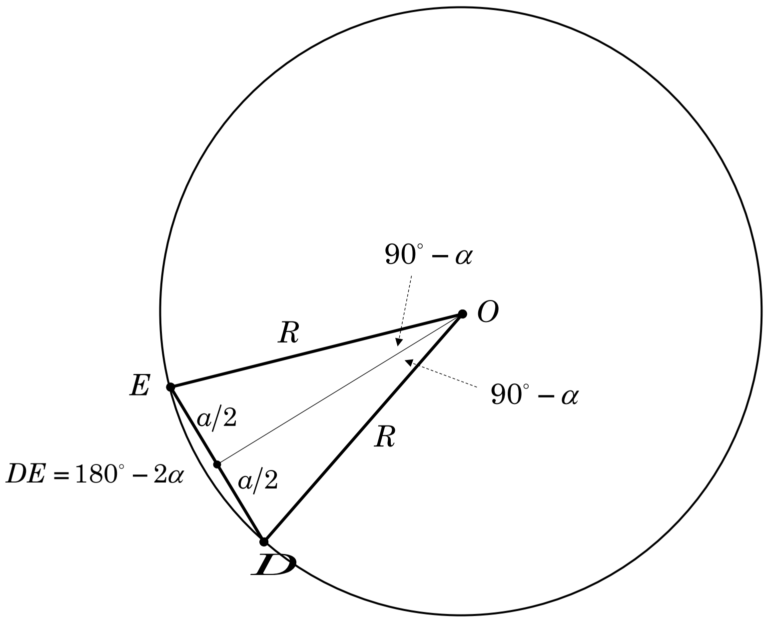

Рисунок 3

Проведённые рассуждения относятся к произвольному углу остроугольного треугольника. Поэтому можно аналогичный результат верен и для длины отрезка EF:

$$EF = AC \cdot \cos\beta,$$

где β — градусная мера угла B основного треугольника ABC.

Используя полученные равенства для длин хорд DE и EF, мы можем переписать условие $DE : EF = BC : AC$ в виде:

$$\frac{BC \cdot \cos\alpha}{AC \cdot \cos\beta} = \frac{BC}{AC} \quad \Leftrightarrow \quad \cos\alpha = \cos\beta \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \beta.$$

Ответ: 0 (углы A и B равны).

Задача 6. Положительные числа a, b, c удовлетворяют соотношению

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = 1.$$

Найдите наибольшее возможное значение выражения $\dfrac{a}{2+a^2} + \dfrac{b}{2+b^2} + \dfrac{c}{2+c^2}$.

Решение. Решение будет базироваться на классических неравенствах, связывающих среднее арифметическое, $A(x,y) = \dfrac{x+y}{2}$, среднее геометрическое, $G(x,y) = \sqrt{xy}$, и среднее гармоническое, $H(x,y) = \dfrac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$, двух положительных чисел x и y:

- $A(x,y) \ge G(x,y)$, причём $A(x,y) = G(x,y)$ тогда и только тогда, когда $x = y$. В частности, при $y = 1/x$ отсюда следует, что сумма двух взаимно обратных положительных чисел не меньше, чем 2: $x + \dfrac{1}{x} \ge 2$, причём $x + \dfrac{1}{x} = 2$ тогда и только тогда, когда $x = 1$.
- $A(x,y) \ge H(x,y)$, причём $A(x,y) = H(x,y)$ тогда и только тогда, когда $x = y$.

Рассмотрим выражение $f(t) = \dfrac{t}{2+t^2}$, где t — положительное число, и оценим его вверху. Начнём с того, что разделим числитель и знаменатель дроби $\dfrac{t}{2+t^2}$ на t и запишем $f(t)$ в виде: $f(t) = \dfrac{1}{\frac{2}{t} + t}$. В знаменателе получившейся дроби заменим t на сумму $\frac{t}{2}+\frac{t}{2}$, что даст: $f(t)=\dfrac{1}{\frac{2}{t}+\frac{t}{2}+\frac{t}{2}}$. Числа $\frac{2}{t}$ и $\frac{t}{2}$ положительны и взаимно обратны. Поэтому их сумма больше или равна, чем 2, причём она равна 2 тогда и только тогда, когда $\frac{t}{2}=1$, т.е. $t=2$. Отсюда следует, что

$$f(t)\le \frac{1}{2+\frac{t}{2}}\equiv \frac{2}{4+t},$$

причём в этом неравенстве знак «=» достигается тогда и только тогда, когда $t=2$.

Для дальнейшего запишем дробь $\frac{2}{4+t}$ в виде $\dfrac{1}{\frac{3+(1+t)}{2}}$, после чего применим к положительным числам $x=3$ и $y=1+t$ неравенство, связывающее их среднее арифметическое и среднее гармоническое:

$$\frac{3+(1+t)}{2}\ge \frac{2}{\frac{1}{3}+\frac{1}{1+t}}\ .$$

Отметим, что в этом неравенстве знак «=» достигается тогда и только тогда, когда $3=1+t$, т.е. когда $t=2$. Последнее неравенство влечёт, что

$$f(t)\le \frac{1}{\frac{3+(1+t)}{2}}\le \frac{1}{\frac{2}{\frac{1}{3}+\frac{1}{1+t}}}\equiv \frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{1+t}}{2}=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+t},$$

причём знак «=» в доказанном неравенстве $f(t)\le \frac{1}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+t}$ достигается тогда и только тогда, когда $t=2$.

Последнее неравенство при $t=a$, $t=b$, $t=c$ даёт:

$$\frac{a}{2+a^2}\le \frac{1}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+a},\quad \frac{b}{2+b^2}\le \frac{1}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+b},\quad \frac{c}{2+c^2}\le \frac{1}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+c}$$

соответственно, причём в этих неравенствах знак «=» достигается тогда и только тогда, когда $a=2, b=2, c=2$ соответственно. Складывая последние неравенства почленно, мы получим:

$$\frac{a}{2+a^2}+\frac{b}{2+b^2}+\frac{c}{2+c^2}\le \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\right),$$

причём знак «=» в этом неравенстве достигается тогда и только тогда, когда достигается знак «=» во всех трёх использованных трёх неравенствах одновременно, т.е. когда $a=2, b=2, c=2$. Поскольку $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}=1$, можно утверждать, что выражение

$$\frac{a}{2+a^2}+\frac{b}{2+b^2}+\frac{c}{2+c^2}$$

не превосходит 1, причём эта верхняя граница действительно достигается (при $a=2,\ b=2,\ c=2$).

Ответ: 1.

Задача 7. В правильной треугольной пирамиде $ABCS$ проведено сечение через ребро AB основания ABC перпендикулярно боковому ребру CS. Найдите его площадь, если известно, что площадь основания пирамиды равна 3, а площадь каждой боковой грани равна $\sqrt{5}$.

Решение. *Способ 1.* Конфигурация, о которой идёт речь в задаче, изображена на Рисунке 4. На этом рисунке:

- D — точка пересечения рассматриваемого сечения пирамиды с боковым ребром CS. Поэтому это сечение является треугольником BDA — его площадь нам и предстоит найти.
- M — середина стороны AB. Поэтому прямые CM, DM и SM перпендикулярны линии AB пересечения плоскости основания и плоскости сечения (поскольку треугольники BCA, BDA и BSA равнобедренные, в них медианы CM, DM и SM одновременно являются и высотами). Следовательно, плоский угол DMC является углом φ между плоскостью ABC основания пирамиды и плоскостью BDA сечения, плоский угол DMS является углом ψ между плоскостью BSA сечения и боковой гранью BSA.

Обозначим искомую площадь треугольника BDA буквой x. Так как плоскость BDA перпендикулярна ребру CS, треугольник BDA является ортогональной проекцией треугольника ABC на плоскость сечения. Поэтому

$$x=S_{ABC}\cdot\cos\varphi=3\cos\varphi.$$

По той же причине треугольник BDA является ортогональной проекцией треугольника BSA на плоскость сечения. Поэтому

$$x=S_{BSA}\cdot\cos\psi=\sqrt{5}\cos\psi.$$

И наконец, если спроектировать боковые грани BSA, ASC, CSB на плоскость основания, мы получим треугольники BHA, AHC, CHB (см. Рисунок 5, где H — проекция вершины пирамиды на плоскость основания).

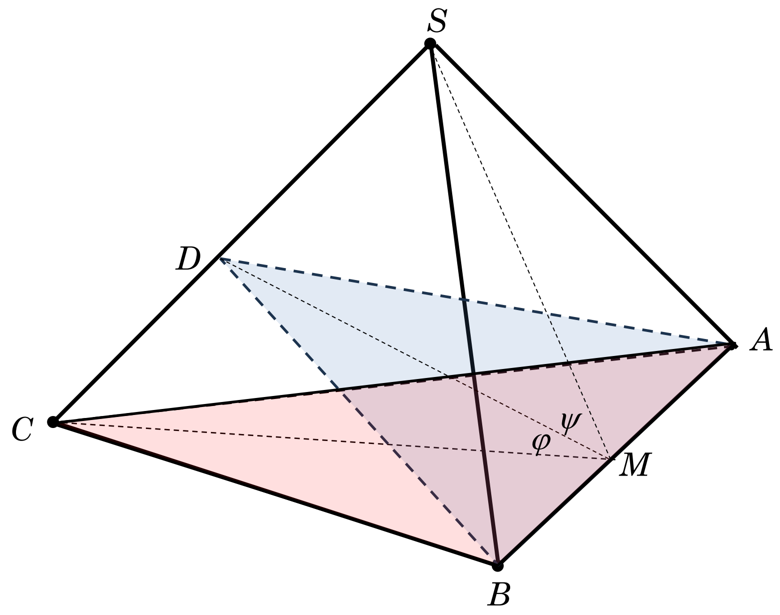

Рисунок 4

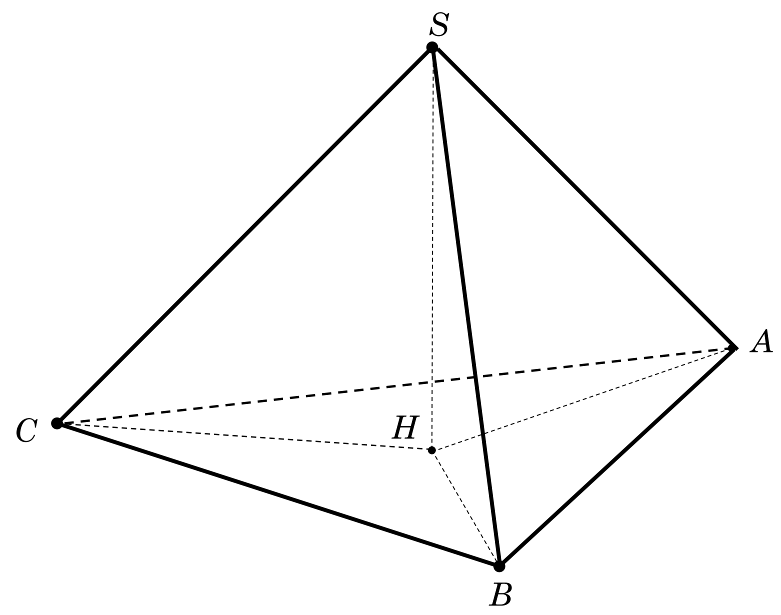

Рисунок 5

Все боковые грани наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом, равным $\varphi+\psi$. Поэтому:

$$S_{BHA} = S_{BSA} \cdot \cos(\varphi+\psi) = \sqrt{5} \cdot \cos(\varphi+\psi),$$
$$S_{AHC} = S_{ASC} \cdot \cos(\varphi+\psi) = \sqrt{5} \cdot \cos(\varphi+\psi),$$
$$S_{CHB} = S_{CSB} \cdot \cos(\varphi+\psi) = \sqrt{5} \cdot \cos(\varphi+\psi).$$

Сумма площадей треугольников BHA, AHC, CHB даёт площадь треугольника ABC, т.е. 3. Поэтому складывая эти равенства, мы получим: $\sqrt{5} \cdot \cos(\varphi+\psi) = 1$, или, что равносильно: $\sqrt{5} \cdot \left(\cos\varphi \cdot \cos\psi - \sin\varphi \cdot \sin\psi\right) = 1$.

Итак, мы имеем три равенства, связывающих величины φ, ψ и $x \equiv S_{BDA}$:

$$\begin{cases} x = 3\cos\varphi, \\ x = \sqrt{5}\cos\psi, \\ \sqrt{5} \cdot \left(\cos\varphi \cdot \cos\psi - \sin\varphi \cdot \sin\psi\right) = 1. \end{cases}$$

Поскольку $\cos\varphi = \dfrac{S_{BDA}}{3} \equiv \dfrac{x}{3}$, $\cos\psi = \dfrac{S_{BDA}}{\sqrt{5}} \equiv \dfrac{x}{\sqrt{5}}$, $\sin\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi} = \sqrt{1-\dfrac{x^2}{9}}$, $\sin\psi = \sqrt{1-\cos^2\psi} = \sqrt{1-\dfrac{x^2}{5}}$, мы можем переписать третье уравнение последней системы в виде:

$$\sqrt{5} \cdot \left(\frac{x}{3} \cdot \frac{x}{\sqrt{5}} - \sqrt{1-\frac{x^2}{9}} \cdot \sqrt{1-\frac{x^2}{5}}\right) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - \sqrt{9-x^2}\sqrt{5-x^2} = 3.$$

Это иррациональное уравнение легко решается (мы учитываем, что $x \equiv S_{BDA}$ — положительное число):

$$x^2 - 3 = \sqrt{9-x^2}\sqrt{5-x^2} \Rightarrow x^4 - 6x^2 + 9 = 45 - 14x^2 + x^4 \Rightarrow 4x^2 = 18 \Rightarrow x = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

В ходе этого решения мы получали лишь следствия исходного иррационального уравнения, не анализируя равносильность преобразований. Тем не менее, проверка не нужна (т.к. искомая площадь существует, а мы получили единственное положительное значение неизвестной x).

Способ 2. Зная площади основания и боковых граней, мы можем найти все линейные размеры пирамиды (см. Рисунок 6) :

- длину стороны основания, a;
- длину бокового ребра, e;
- высоту, h;
- апофему, l.

1. Длина стороны основания. Так как в основании пирамиды лежит правильный треугольник, его площадь даётся формулой $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. С другой стороны, по условию эта площадь равна 3. Отсюда следует, что $a = 2\sqrt[4]{3}$.

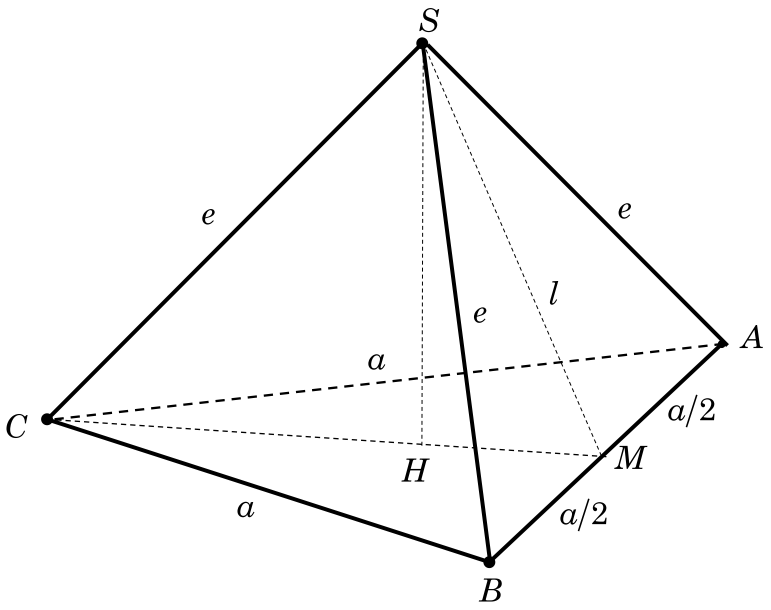

Рисунок 6

2. Апофема. Площадь боковой грани правильной пирамиды даётся формулой $\dfrac{al}{2}$. С другой стороны, по условию эта площадь равна $\sqrt{5}$. Отсюда следует, что $l = \dfrac{2\sqrt{5}}{a} = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt[4]{3}}$.

3. Длина бокового ребра. Из прямоугольного треугольника BMS по теореме Пифагора мы имеем: $e = \sqrt{l^2 + \dfrac{a^2}{4}} = \sqrt{\dfrac{5}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}}$.

4. Высота. Поскольку пирамида правильная, точка H является центром треугольника ABC, т.е. общим центром окружностей, описанной вокруг этого треугольника и вписанной в него или, что в данном случае равносильно, точкой, в которой пересекаются медианы треугольника. Значит, точка H делит медиану $CM \equiv m_C$ в отношении 2:1, считая от вершины C, т.е. $MH = \dfrac{1}{3} m_C$. Далее, для равностороннего треугольника медиана вычисляется по формуле $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, т.е. равна $\dfrac{3}{\sqrt[4]{3}}$. Теперь из прямоугольного треугольника SHM по теореме Пифагора мы имеем: $h = \sqrt{l^2 - \dfrac{m_C^2}{9}} = \sqrt{\dfrac{5}{\sqrt{3}} - \dfrac{1}{\sqrt{3}}} = \dfrac{2}{\sqrt[4]{3}}$.

Отметим, хотя это и не существенно для нашего решения, что $CH = \frac{2}{3} m_C = \frac{2}{\sqrt[4]{3}} = h,$ т.е. в прямоугольном треугольнике CHS катеты равны. Значит, его острые углы равны 45°. Иначе говоря, в рассматриваемой пирамиде боковые рёбра наклонены к плоскости основания под углом 45°.

Теперь мы можем вычислить высоту DM треугольника BDA, площадь которого мы должны найти. Для этого рассмотрим треугольник CSM (сечение пирамиды плоскостью CSM; для бо́льшей наглядности на Рисунке 7 мы изобразили само это сечение).

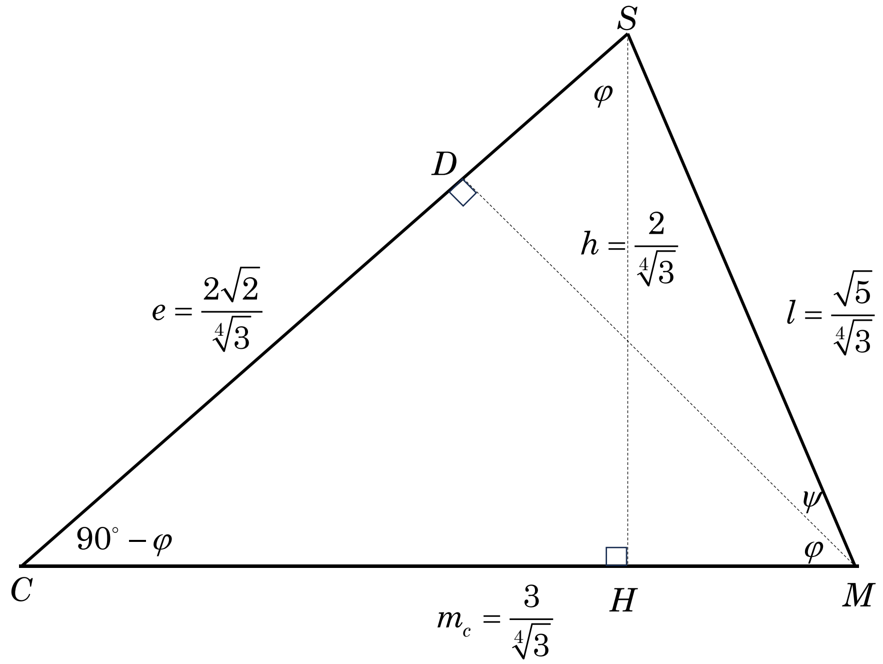

Рисунок 7

В этом треугольнике DM также является высотой, так что

$$S_{CSM} = \frac{CS \cdot DM}{2} \equiv \frac{e \cdot DM}{2} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}} \cdot DM}{2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}} \cdot DM.$$

С другой стороны, в этом треугольнике и SH является высотой, так что

$$S_{CSM} = \frac{CM \cdot SH}{2} \equiv \frac{m_C \cdot h}{2} = \frac{\frac{3}{\sqrt[4]{3}} \cdot \frac{2}{\sqrt[4]{3}}}{2} = \sqrt{3}.$$

Отсюда: $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}} \cdot DM = \sqrt{3},$ т.е. $DM = \frac{3}{\sqrt{2}\sqrt[4]{3}}$. Теперь мы можем вычислить искомую площадь треугольника BDA:

$$S_{BDA}=\frac{BA\cdot BD}{2}=\frac{2\sqrt[4]{3}\cdot\frac{3}{\sqrt{2}\sqrt[4]{3}}}{2}=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ: $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Замечание. Если использовать отмеченную ранее особенность нашей пирамиды ($\angle SCH=45^\circ$), то найти DM совсем легко: DM — катет в равнобедренном прямоугольном треугольнике CDM с гипотенузой $CM\equiv m_C=\frac{3}{\sqrt[4]{3}}$, так что $DM\equiv\frac{CM}{\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}\sqrt[4]{3}}$.

Литература

1. Г.В.Дорофеев, М.К.Потапов, Н.Х.Розов. *Пособие по математике для поступающих в ВУЗы.* М.: Наука, 1968.

2. Ю.В.Нестеренко, С.Н.Олехник, М.К.Потапов. *Задачи вступительных экзаменов по математике.* Изд. второе, М.: Наука, 1983.

3. Ю.В.Нестеренко, С.Н.Олехник, М.К.Потапов. *Задачи вступительных экзаменов по математике.* М.: Факториал, 1995.

4. И.И. Мельников, С.Н. Олехник, И.Н. Сергеев. *Математика. Задачи вступительных экзаменов с ответами и решениями*. М.: Изд-во Учебно-научный центр МГУ им. М.В. Ломоносова, 1995.

5. И.И. Мельников, И.Н.Сергеев. *Как решать задачи по математике на вступительных экзаменах.* Издательский отдел УНЦ ДО, Физматлит Москва, 2003.

6. И.Н. Сергеев. *Математика. Задачи с ответами и решениями.* Изд-во КДУ, 2013. ISBN: 978-5-98227-872-2

7. Н.Д. Золотарёва, А.В. Разгулин, М.В. Федотов, Е.Н. Хайлов. *Математика. Подготовка к ЕГЭ и ДВИ МГУ.* Изд. Московского университета, 2018. ISBN: 978-5-19-011229-0

8. А.С. Зеленский, А.И. Козко, В.С. Панфёров, И.Н. Сергеев, И.А. Шейпак. *Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике* (*2013–2018*). М.: МЦНМО, 2019. ISBN 978-5-4439-1373-5

9. А.В. Бегунц, П.А. Бородин, Д.В. Горяшин, А.С. Зеленский, В.С. Панферов, И.Н. Сергеев, И.А. Шейпак. *Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике* (*2005-2019*). М.: МЦНМО, 2019. ISBN 978-5-4439-1442-8

10. Г.И. Фалин, А.И. Фалин. *Алгебра на вступительных экзаменах по математике в МГУ*: Учебное пособие. – Изд. 3-е, перераб. и доп. – М.: МАКС Пресс, 2020. ISBN 978-5-317-06275-0 https://elibrary.ru/download/elibrary_42389271_54686562.pdf

11. Г.И. Фалин, А.И. Фалин. *Тригонометрия на вступительных экзаменах по математике в МГУ.* Москва, БИНОМ, 2007. ISBN 978-5-94774-671-6

12. Г.И. Фалин, А.И. Фалин. *Обратные тригонометрические функции*. Москва, Изд-во «Экзамен», 2013. ISBN 5-377-05341-5

13. Г. Фалин, А. Фалин. *Линейные диофантовы уравнения*. М., Изд-во Чистые Пруды, 2008, 32 с. (библиотечка «Первого Сентября», серия математика, вып.24). ISBN 978-5-9667-0510-7

14. Г. Фалин, А. Фалин. *Центральная симметрия*. М., Изд-во Чистые Пруды, 2010, 32 с. (библиотечка «Первого Сентября», серия математика, вып.33). ISBN 978-5-9667-0698-2

15. Сайт Центральной приёмной комиссии МГУ: http://cpk.msu.ru/

16. Сайт приёмной комиссии механико-математического факультета МГУ: http://pk.math.msu.ru/ru

17. Сайт приёмной комиссии факультета ВМК МГУ: https://pk.cs.msu.ru/

18. Личный учебно-методический сайт автора: https://math.msu.ru/~falin