Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

июль–август 2022 года

ВАРИАНТ 221

ОТВЕТЫ

1. 7

2. 3

3. $x = \pm\pi/3 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

4. $x \in (0, 1] \cup \{2\}$

5. 7

6. $a = 2$

7. 5

РЕШЕНИЯ

1. Найдите наименьшее целое число, большее, чем $\dfrac{\sqrt{17}+3}{\sqrt{17}-3}$.

Решение: $\dfrac{\sqrt{17}+3}{\sqrt{17}-3} = \dfrac{17+9+6\sqrt{17}}{17-9} = \dfrac{13+3\sqrt{17}}{4} \in \left(\dfrac{13+12}{4}, \dfrac{13+15}{4}\right) = \left(\dfrac{25}{4}, \dfrac{28}{4}\right) \subset (6, 7).$

Ответ: 7

2. Сумма первых пятнадцати членов арифметической прогрессии в два раза больше суммы первых десяти членов. Найдите первый член этой прогрессии, если известно, что пятый её член равен 7.

Решение: Обозначим через a и d соответственно первый член прогрессии и её разность. Тогда по условию

$$2 \cdot 10 \cdot \frac{a + a + 9d}{2} = 15 \cdot \frac{a + a + 14d}{2},$$

откуда $20a + 90d = 15a + 7 \cdot 15d$, то есть $a + 18d = 21d$. Стало быть, $a = 3d$. Далее, для пятого члена имеем $a + 4d = 7$, откуда $d = 1$ и $a = 3$.

Ответ: 3

3. Решите уравнение $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x + 3 = 0$.

Решение:

$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x + 3 = 0 \iff \begin{cases} \cos x \cos 2x \neq 0 \\ (\sin x \sin 2x + \cos x \cos 2x) + 2\cos x \cos 2x = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \cos x \cos 2x \neq 0 \\ \cos x + 2\cos x \cos 2x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \cos x \cos 2x \neq 0 \\ \cos x(1 + 2\cos 2x) = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \cos 2x = -1/2 \iff 2x = \pm 2\pi/3 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \iff x = \pm\pi/3 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Альтернативно, можно выразить $\operatorname{tg} 2x$ через $\operatorname{tg} x$ и прийти к соотношению $\operatorname{tg}^2 x = 3$.

Ответ: $x = \pm\pi/3 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

4. Решите неравенство $\left(2\log_2^2 x - \log_2 x^2 + 1\right)^{x^2-2x} \leqslant 1$.

Решение: Заметим, что $2\log_2^2 x - \log_2 x^2 + 1 = \log_2^2 x + (\log_2 x - 1)^2 > 0$. Стало быть,

$$\left(2\log_2^2 x - \log_2 x^2 + 1\right)^{x^2-2x} \leqslant 1 \iff \left(2\log_2^2 x - 2\log_2 x + 1\right)^{x^2-2x} \leqslant 1 \iff$$

$$\iff (2\log_2^2 x - 2\log_2 x)(x^2 - 2x) \leqslant 0 \iff x\log_2 x(\log_2 x - 1)(x - 2) \leqslant 0 \iff$$

$$\iff \begin{cases} x > 0 \\ x(x-1)(x-2)(x-2) \leqslant 0 \end{cases} \iff x \in (0, 1] \cup \{2\}.$$

Ответ: $x \in (0, 1] \cup \{2\}$

5. Середины сторон выпуклого четырёхугольника $ABCD$ лежат на окружности. Известно, что $AB = 1$, $BC = 4$, $CD = 8$. Найдите AD.

Решение: Обозначим середины сторон AB, BC, CD, DA через A_1, B_1, C_1, D_1 соответственно. Четырёхугольник $A_1B_1C_1D_1$ является параллелограммом, ибо отрезки A_1B_1 и C_1D_1 параллельны AC, будучи средними линиями в треугольниках ABC и CDA, и, аналогично, $A_1D_1 \parallel BD \parallel B_1C_1$. Поскольку этот параллелограмм вписан в окружность, он является прямоугольником. Следовательно, диагонали AC и BD исходного четырёхугольника перпендикулярны. Обозначим через X точку их пересечения. Тогда $AB^2 + CD^2 = AX^2 + BX^2 + CX^2 + DX^2 = BC^2 + AD^2$. Отсюда получаем $AD^2 = AB^2 + CD^2 - BC^2 = 1 + 64 - 16 = 49$. Стало быть, $AD = 7$.

Ответ: 7

6. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$x^2 + \left(1 - a + \sqrt[4]{|x|}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$$

имеет ровно три решения.

Решение: Если x_0 является решением, то и $-x_0$ также является решением. Следовательно, для того, чтобы было нечётное количество решений, необходимо, чтобы 0 было решением. Отсюда $(1 - a)^2 = a^2/4$, что выполняется при $a = 2$ и при $a = 2/3$.

Положим $y = 1 + \sqrt[4]{|x|}$. Тогда исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} y = 1 + \sqrt[4]{|x|} \\ x^2 + (y-a)^2 = a^2/4 \end{cases}.$$

Второе уравнение задаёт окружность радиуса $a/2$ с центром в точке $(0, a)$.

При $a = 2/3$ эта окружность находится под прямой $y = 1$, тогда как график уравнения $y = 1 + \sqrt[4]{|x|}$ находится над этой прямой и имеет с ней ровно одну общую точку $(0, 1)$, которая также лежит и на окружности. Стало быть, при $a = 2/3$ исходное уравнение имеет ровно одно решение $x = 0$. Таким образом, значение $2/3$ не подходит.

Пусть $a = 2$. Тогда окружность имеет центр в точке $(0, 2)$ и радиус 1. Заметим, что при $-1 \leqslant x \leqslant 1$ график уравнения $y = 1 + \sqrt[4]{|x|}$ находится над графиком уравнения $y = 1 + |x|$ и под графиком уравнения $y = 2$. При этом при $0 < |x| < 1$ он находится строго между ними. Что касается окружности, её верхняя половина находится над графиком уравнения $y = 2$, а нижняя — под графиком уравнения $y = 1 + |x|$. Остаётся заметить, что точки $(-1, 2)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$ лежат и на графике уравнения $y = 1 + \sqrt[4]{|x|}$, и на окружности. Таким образом, при $a = 2$ исходное уравнение имеет ровно три решения: $x = 0, \pm 1$.

Ответ: $a = 2$

7. Объём треугольной призмы $ABCA'B'C'$ с основанием ABC и боковыми рёбрами AA', BB', CC' равен 72. Найдите объём тетраэдра $DEFG$, где D — центр грани $ABB'A'$, E — точка пересечения медиан треугольника $A'B'C'$, F — середина ребра AC и G — середина ребра BC.

Решение: Обозначим через K, L, M середины отрезков FG, AB, $A'B'$ соответственно. Заметим, что точки C, C', E, D, K, L, M лежат в одной плоскости. Отметим на CL точки P и Q таким образом, что $EP \parallel ML$ и $DQ \parallel EK$. Тогда треугольники DLQ и EPK подобны. Поскольку $DL = \frac{1}{2}ML = \frac{1}{2}EP$, из подобия получаем $LQ = \frac{1}{2}PK$. Поскольку же $LK = \frac{1}{2}LC$ и $LP = ME = \frac{1}{3}MC' = \frac{1}{3}LC$, получаем $PK = LK - LP = (\frac{1}{2} - \frac{1}{3})LC = \frac{1}{6}LC$ и $LQ = \frac{1}{2}PK = \frac{1}{12}LC = \frac{1}{6}LK$. Стало быть, $QK = LK - LQ = \frac{5}{6}LK$. Таким образом,

$$S(\triangle FGQ) = \frac{5}{6}S(\triangle FGL) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{4}S(\triangle ABC) = \frac{5}{24}S(\triangle ABC).$$

Заметим, что, поскольку $DQ \parallel EK$, объёмы тетраэдров $DEFG$ и $QEFG$ равны. Заметим также, что объём тетраэдра $QEFG$ равен трети произведения $S(\triangle FGQ)$ на высоту призмы, а объём призмы равен произведению $S(\triangle ABC)$ на эту же высоту. Получаем, что объём тетраэдра $DEFG$ относится к объёму призмы как

$$\frac{\frac{1}{3}S(\triangle FGQ)}{S(\triangle ABC)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{24} = \frac{5}{72}.$$

Стало быть, искомый объём равен 5.

Ответ: 5

Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

июль–август 2022 года

ВАРИАНТ 222

ОТВЕТЫ

1. 11

2. 64

3. $x = \pi + 2k\pi,\ \pi/6 + \frac{2}{3}k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

4. $x \in \left(0, \frac{1}{4}\right] \cup \left[2, +\infty\right)$

5. $\sqrt{5}$

6. $xy = 0$

7. 45°

РЕШЕНИЯ

1. Найдите в явном виде целое число, заданное выражением $\sqrt{11}\left(\dfrac{2}{\sqrt{11}-\sqrt{7}} + \dfrac{2}{\sqrt{11}+\sqrt{7}}\right)$.

Решение: $\sqrt{11}\left(\dfrac{2}{\sqrt{11}-\sqrt{7}} + \dfrac{2}{\sqrt{11}+\sqrt{7}}\right) = \sqrt{11} \cdot \dfrac{4\sqrt{11}}{11-7} = 11.$

Ответ: 11

2. Сумма первых трёх членов геометрической прогрессии в два раза больше разности между первым и четвёртым её членами. Найдите первый член этой прогрессии, если известно, что сумма первых семи её членов равна 127.

Решение: Обозначим через b и q соответственно первый член прогрессии и её знаменатель. Тогда по условию $b(1+q+q^2) = 2b(1-q^3)$. Отсюда, сокращая на $b(1+q+q^2)$ (это действие корректно, ибо $b \neq 0$, поскольку иначе сумма любого количества членов прогрессии равна нулю), получаем $q = 1/2$. Для суммы первых семи членов прогрессии имеем $b(1-q^7)/(1-q) = 127$, то есть $b(2^7-1)/2^6 = 127$ и $b = 2^6 = 64$.

Ответ: 64

3. Решите уравнение $\sin x + \sin 2x = \cos x + \cos 2x$.

Решение:

$$\sin x + \sin 2x = \cos x + \cos 2x \iff \sin x - \cos x = \cos 2x - \sin 2x \iff$$

$$\iff \sin(x - \pi/4) = \sin(\pi/4 - 2x) \iff \left[\begin{array}{l} x - \pi/4 = \pi/4 - 2x + 2k\pi \\ x - \pi/4 = 3\pi/4 + 2x + 2k\pi \end{array}\right., \quad k \in \mathbb{Z} \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} 3x = \pi/2 + 2k\pi \\ x = -\pi - 2k\pi \end{array}\right., \quad k \in \mathbb{Z} \iff \left[\begin{array}{l} x = \pi/6 + 2k\pi/3 \\ x = \pi + 2k\pi \end{array}\right., \quad k \in \mathbb{Z} \iff$$

Ответ: $x = \pi + 2k\pi,\ \pi/6 + \frac{2}{3}k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

4. Решите неравенство $x^{\log_2 \sqrt{x}} \geqslant \dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

Решение:

$$x^{\log_2 \sqrt{x}} \geqslant \frac{2}{\sqrt{x}} \iff 2^{\frac{1}{2}\log_2^2 x} \geqslant 2^{1 - \frac{1}{2}\log_2 x} \iff \frac{1}{2}\log_2^2 x \geqslant 1 - \frac{1}{2}\log_2 x \iff$$

$$\iff (\log_2 x + 2)(\log_2 x - 1) \geqslant 0 \iff \begin{cases} x > 0 \\ (x - 1/4)(x - 2) \geqslant 0 \end{cases} \iff x \in \left(0, \tfrac{1}{4}\right] \cup \left[2, +\infty\right).$$

Ответ: $x \in \left(0, \frac{1}{4}\right] \cup \left[2, +\infty\right)$

5. На диагонали AC параллелограмма $ABCD$ как на диаметре построена окружность. Эта окружность пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно. При этом $AM = MB$ и $CN = 2NB$. Найдите тангенс острого угла параллелограмма $ABCD$.

Решение: Поскольку вершина B находится вне окружности, при ней угол острый. Обозначим его α. Пусть O — центр окружности. Тогда, поскольку OM — средняя линия в треугольнике ABC, имеем $BC = 2OM = 2OA = AC$, откуда $\angle BAC = \angle ABC = \alpha$. Далее, поскольку AC — диаметр, $\angle ANC = 90°$. Стало быть,

$$\cos\angle ACB = \frac{CN}{AC} = \frac{\frac{2}{3}BC}{AC} = \frac{2}{3}.$$

Тогда

$$\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} = \frac{1 - \cos(\pi - \angle ACB)}{2} = \frac{1 + 2/3}{2} = \frac{5}{6}.$$

Отсюда $\cos^2\alpha = 1/6$ и $\operatorname{tg}^2\alpha = 5$. Поскольку угол острый, получаем $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{5}$.

Ответ: $\sqrt{5}$

6. Найдите все возможные значения произведения xy, если известно, что $x, y \in [0, \pi/2)$ и справедливо

$$\frac{1 - \sin(x - y)}{1 - \cos(x - y)} = \frac{1 - \sin(x + y)}{1 - \cos(x + y)}.$$

Решение: При заданных ограничениях на x и y знаменатели не равны нулю тогда и только тогда, когда $x \neq y$.

Заметим, что при $x, y \in [0, \pi/2)$ справедливо

$$\cos(x-y) \geqslant \cos(x+y).$$

Действительно, $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y \geqslant \cos x \cos y - \sin x \sin y = \cos(x+y)$ ввиду неотрицательности $\sin x \sin y$. Аналогично, поскольку $\sin x \cos y + \cos x \sin y \geqslant \sin x \cos y - \cos x \sin y$, справедливо

$$\sin(x+y) \geqslant \sin(x-y).$$

Таким образом,

$$\frac{1-\sin(x-y)}{1-\cos(x-y)} \geqslant \frac{1-\sin(x+y)}{1-\cos(x+y)}$$

и равенство достигается тогда и только тогда, когда равны и числители, и знаменатели, то есть когда

$$\sin x \sin y = \cos x \sin y = 0.$$

Поскольку $\sin x$ и $\cos x$ не могут одновременно обращаться в 0, справедливо $\sin y = 0$, откуда $y = 0$. Остаётся заметить, что при $y = 0$ исходное равенство выполняется при любом $x \in (0, \pi/2)$.

Ответ: $xy = 0$

7. В пирамиду, в основании которой лежит ромб с острым углом α и стороной $\sqrt{6}$, вписана сфера диаметра 1. Найдите угол α, если известно, что все боковые грани пирамиды наклонены к плоскости её основания под углом $60°$.

Решение: Пусть S — вершина пирамиды, O — центр вписанной сферы и H — основание высоты пирамиды, опущенной из S. Поскольку боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под одним углом, точка H совпадает с точкой пересечения диагоналей основания, а точка O лежит на SH. Стало быть, если P — основание перпендикуляра, опущенного из S на одно из рёбер основания, то $\angle SPH = 60°$ и $PH = OH \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\angle SPH\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Значит, высота ромба равна $2PH = \sqrt{3}$ и $\sin\alpha$ равен отношению высоты ромба к его стороне, то есть $\sin\alpha = \sqrt{3}/\sqrt{6} = 1/\sqrt{2}$. Стало быть, поскольку угол острый, он равен $45°$.

Ответ: $45°$

Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

июль–август 2022 года

ВАРИАНТ 223

ОТВЕТЫ

1. Второе больше

2. 4

3. $x = k\pi,\ \pm\pi/3 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

4. $x \in \left[-\frac{2}{3}, 0\right) \cup \left(0, 1\right)$

5. $9 + 3\sqrt{3}$

6. $x = y = 1,\ x = y = -1$

7. $\sqrt{2}$

РЕШЕНИЯ

1. Определите, какое из двух чисел больше: $\sqrt{3+2\sqrt{2}} + \sqrt{3-2\sqrt{2}}$ или 3.

Решение: $\sqrt{3+2\sqrt{2}} + \sqrt{3-2\sqrt{2}} = (\sqrt{2}+1) + (\sqrt{2}-1) = 2\sqrt{2} = \sqrt{8} < \sqrt{9} = 3.$

Ответ: Второе больше

2. Дана возрастающая арифметическая прогрессия, состоящая из положительных чисел. Произведение третьего и четвёртого членов этой прогрессии в два раза больше произведения первого и шестого её членов. Найдите разность этой прогрессии, если известно, что восьмой её член равен 32.

Решение: Обозначим через a и d соответственно первый член прогрессии и её разность. Тогда по условию $(a+2d)(a+3d) = 2a(a+5d)$, откуда $a^2 + 5ad - 6d^2 = 0$, то есть $(a+6d)(a-d) = 0$. Поскольку по условию $a > 0$ и $d > 0$, получаем $a = d$. Тогда восьмой член прогрессии равен $8d$, то есть $8d = 32$ и $d = 4$.

Ответ: 4

3. Решите уравнение $\cos 2x + 6\sin 2x = \cos 4x + 6\sin x$.

Решение:

$$\cos 2x + 6\sin 2x = \cos 4x + 6\sin x \iff -2\sin^2 x + 6\sin 2x = -2\sin^2 2x + 6\sin x \iff$$
$$\iff \sin^2 2x - \sin^2 x = 3(\sin x - \sin 2x) \iff (\sin x - \sin 2x)(\sin x + \sin 2x + 3) = 0 \iff$$
$$\iff \sin x - \sin 2x = 0 \iff \sin x(1 - 2\cos x) = 0 \iff$$
$$\iff \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \cos x = 1/2 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \pm\pi/3 + 2k\pi \end{array}\right., \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = k\pi,\ \pm\pi/3 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

4. Решите неравенство $\log_3(1-x) - \log_3(1+x) + \log_{1+x}(1-x) - 1 \leqslant 0$.

Решение: Заметим, что О.Д.З. x равна $(-1,0) \cup (0,1)$. Тогда

$$\log_3(1-x) - \log_3(1+x) + \log_{1+x}(1-x) - 1 \leqslant 0 \iff$$
$$\iff \log_3(1-x) - \log_3(1+x) + \frac{\log_3(1-x) - \log_3(1+x)}{\log_3(1+x)} \leqslant 0 \iff$$
$$\iff \frac{\big(\log_3(1-x) - \log_3(1+x)\big)\big(\log_3(1+x) + 1\big)}{\log_3(1+x)} \leqslant 0 \iff$$
$$\iff \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\big((1-x) - (1+x)\big)\big((1+x) - \frac{1}{3}\big)}{x} \leqslant 0 \\ x \in (-1,0) \cup (0,1) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x \geqslant -\frac{2}{3} \\ x \in (-1,0) \cup (0,1) \end{array}\right. \iff$$
$$\iff x \in \big[-\tfrac{2}{3}, 0\big) \cup \big(0, 1\big).$$

Ответ: $x \in \big[-\frac{2}{3}, 0\big) \cup \big(0, 1\big)$

5. В треугольнике ABC угол C равен $60°$. На сторонах AB, BC, AC отмечены точки D, E, F соответственно. Радиус окружности, вписанной в треугольник ADF, равен 1. Радиус окружности, вписанной в треугольник BDE, равен 2. Найдите сторону AB, если известно, что четырёхугольник $DECF$ является ромбом.

Решение: Положим $a = AF$, $b = BE$, $c = DE = EC = CF = FD$. Треугольники ADF и DBE подобны с коэффициентом подобия 2. Стало быть,

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{b} = \frac{1}{2}.$$

Тогда

$$\frac{AC}{BC} = \frac{a+c}{b+c} = \frac{a/c+1}{b/c+1} = \frac{3/2}{3} = \frac{1}{2}.$$

Поскольку $\angle ACB = 60°$, заключаем, что $\angle BAC = 90°$. В треугольнике ADF имеем $FD = 2AF = 2a$ и $AD = AF\sqrt{3} = a\sqrt{3}$. Точки касания вписанной окружности со сторонами треугольника ADF делят сторону AF на отрезки длины 1 и $a-1$, сторону AD на отрезки длины 1 и $a\sqrt{3}-1$, сторону FD на отрезки длины $a-1$ и $a\sqrt{3}-1$. При этом $a - 1 + a\sqrt{3} - 1 = FD = 2a$, откуда получаем $a = 2/(\sqrt{3}-1) = \sqrt{3}+1$. Следовательно, $AD = (\sqrt{3}+1)\sqrt{3} = 3 + \sqrt{3}$ и $AB = AD + DB = 3AD = 9 + 3\sqrt{3}$.

Ответ: $9 + 3\sqrt{3}$

6. Найдите все пары действительных чисел x, y, удовлетворяющих соотношению

$$\frac{x^2+y^2}{2}+\frac{1}{xy}=2\sqrt{2-\sqrt{xy}}\cdot\sqrt[4]{xy}.$$

Решение: Для левой части ввиду неравенства между средними имеем

$$\frac{x^2+y^2}{2}+\frac{1}{xy}\geqslant 2\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2xy}}\geqslant 2.$$

Первое неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда $(x^2+y^2)/2=1/(xy)$, второе — тогда и только тогда, когда $x^2+y^2=2xy$. То есть оба неравенства обращаются в равенства тогда и только тогда, когда $x=y=\pm 1$.

Для правой части исходного равенства имеем

$$2\sqrt{2-\sqrt{xy}}\cdot\sqrt[4]{xy}=2\sqrt{2\sqrt{xy}-xy}=2\sqrt{1-(1-\sqrt{xy})^2}\leqslant 2,$$

где равенство достигается тогда и только тогда, когда $xy=1$.

Таким образом, исходное равенство реализуется только для $x=y=1$ и $x=y=-1$.

Ответ: $x=y=1,\ x=y=-1$

7. Высота правильной треугольной призмы $ABCA'B'C'$ с основанием ABC и боковыми рёбрами AA', BB', CC' равна 1. Найдите длину ребра основания, если известно, что $AB'\perp BC'$.

Решение: Достроим треугольники ABC и $A'B'C'$ до параллелограммов $ABCD$ и $A'B'C'D'$. В получившемся параллелепипеде $ABCDA'B'C'D'$ имеем $AB\parallel DC$ и $AB=DC$, а также $AB'\parallel DC'$ и $AB'=DC'$. Поскольку призма правильная, $AB'=BC'$. Стало быть, треугольник BDC' прямоугольный и равнобедренный. Пусть длина ребра основания равна a и пусть M — точка пересечения AC и BD. Тогда $CM=a/2$, $C'M=BM=a\sqrt{3}/2$ и $CC'=1$. По теореме Пифагора получаем $1+a^2/4=3a^2/4$, откуда $a^2=2$, то есть $a=\sqrt{2}$.

Ответ: $\sqrt{2}$

Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

июль–август 2022 года

ВАРИАНТ 224

ОТВЕТЫ

1. 5

2. 49

3. $x = \pi/4 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

4. $x \in (0,1) \cup (1,3] \cup [2+\sqrt{7}, +\infty)$

5. 252

6. $x = y = z = \pi/4$

7. $55 : 89$

РЕШЕНИЯ

1. Найдите наименьшее целое число, большее, чем $2\sqrt{3} + \dfrac{1}{\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}}$.

Решение: $2\sqrt{3} + \dfrac{1}{\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}} = 2\sqrt{3} + \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} + \sqrt{6}(\sqrt{3}-\sqrt{2}) = \sqrt{18} \in (4,5)$

Ответ: 5

2. Положительные числа a, b, c образуют непостоянную геометрическую прогрессию. Числа a, $4b$, $7c$ образуют арифметическую прогрессию. Найдите отношение a/c.

Решение: Имеем $b^2 = ac$ и $8b = a + 7c$. Отсюда $8\sqrt{ac} = a + 7c$, то есть $a/c - 8\sqrt{a/c} + 7$ и, стало быть, $\left(\sqrt{a/c} - 1\right)\left(\sqrt{a/c} - 7\right) = 0$. Поскольку $a \neq c$, получаем $a/c = 49$.

Ответ: 49

3. Решите уравнение $\dfrac{\sqrt{2}}{\sin x} + \dfrac{\sqrt{2}}{\cos x} = \dfrac{1}{\sin^2 x} + \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Решение:

$$\frac{\sqrt{2}}{\sin x}+\frac{\sqrt{2}}{\cos x}=\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x} \iff \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x+\cos x)}{2\sin x\cos x}=\frac{1}{4\sin^2 x\cos^2 x} \iff$$

$$\iff \sin(x+\pi/4)\sin 2x=1 \iff \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin(x+\pi/4)=1\\ \sin 2x=1\end{cases}\\ \begin{cases}\sin(x+\pi/4)=-1\\ \sin 2x=-1\end{cases}\end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x=\pi/2+2k_1\pi\\ x+\pi/4=\pi/2+2k_2\pi\end{cases}\\ \begin{cases}2x=-\pi/2+2k_1\pi\\ x+\pi/4=-\pi/2+2k_2\pi\end{cases}\end{array}\right., \quad k_1,k_2\in\mathbb{Z} \iff \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\pi/4+k_1\pi\\ x=\pi/4+2k_2\pi\end{cases}\\ \begin{cases}x=-\pi/4+k_1\pi\\ x=-3\pi/4+2k_2\pi\end{cases}\end{array}\right., \quad k_1,k_2\in\mathbb{Z} \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l}x=\pi/4+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\\ x\in\varnothing\end{array}\right. \iff x=\pi/4+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $x=\pi/4+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

4. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x}}\left|\dfrac{3x}{x-4}\right|\leqslant 4$.

Решение: Заметим, что $x>0$, $x\neq 1$, $x\neq 4$. Тогда

$$\log_{\sqrt{x}}\left|\frac{3x}{x-4}\right|\leqslant 4 \iff \log_x\frac{3x}{|x-4|}\leqslant 2 \iff \frac{\ln\dfrac{3x}{|x-4|}-\ln x^2}{\ln x}\leqslant 0 \iff$$

$$\iff \begin{cases}x>0\\ \dfrac{3x-x^2|x-4|}{|x-4|(x-1)}\leqslant 0\end{cases} \iff \begin{cases}x>0\\ \dfrac{3-x|x-4|}{|x-4|(x-1)}\leqslant 0\end{cases} \iff \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>4\\ x^2-4x-3\geqslant 0\end{cases}\\ \begin{cases}0<x<4\\ \dfrac{x^2-4x+3}{x-1}\leqslant 0\end{cases}\end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l}x\geqslant 2+\sqrt{7}\\ \begin{cases}0<x<4\\ \dfrac{(x-1)(x-3)}{x-1}\leqslant 0\end{cases}\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}x\geqslant 2+\sqrt{7}\\ 0<x<1\\ 1<x\leqslant 3\end{array}\right..$$

Ответ: $x\in(0,1)\cup(1,3]\cup[2+\sqrt{7},+\infty)$

5. В трапеции $ABCD$ основание AB в два раза больше основания CD. Отрезки AL, BM и DK, где K, L, M — соответственно середины сторон AB, BC, AD, ограничивают треугольник площади 1. Найдите площадь трапеции.

Решение: Обозначим точки пересечения прямых AL и BM с прямой CD через E и F соответственно. Обозначим также через P точку пересечения AL и DK, через Q — точку пересечения AL и BM, через R — точку пересечения DK и BM. Наконец, пусть h — высота трапеции, h_1 — расстояние от R до прямой AB, h_2 — расстояние от P до прямой AB, и h_3 — расстояние от Q до прямой AB. Заметим, что в силу равенства треугольников ABM и DFM, а также равенства треугольников ABL и ECL, справедливо $DF=AB=EC$. Учитывая, что $AB=2CD$,

получаем, что

$$DF/KB = 2, \quad ED/AK = 3, \quad EF/AB = 5/2\,.$$

Отсюда в силу подобия треугольников DFR и KBR, подобия треугольников EDP и AKP и подобия треугольников EFQ и ABQ, следует, что

$$(h - h_1)/h_1 = 2, \quad (h - h_2)/h_2 = 3, \quad (h - h_3)/h_3 = 5/2\,.$$

Стало быть, $h_1 = h/3$, $h_2 = h/4$, $h_3 = 2h/7$. Наконец,

$$S(\triangle PQR) = S(\triangle KBR) + S(\triangle AKP) - S(\triangle ABQ) =$$
$$= \frac{1}{2}(KB \cdot h_1 + AK \cdot h_2 - AB \cdot h_3) = \frac{AB}{2}(h_1/2 + h_2/2 - h_3) = \frac{AB \cdot h}{2}(1/6 + 1/8 - 2/7) =$$
$$= \frac{\frac{4}{3} \cdot \frac{AB+CD}{2} \cdot h}{2} \cdot \frac{28 + 21 - 48}{3 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{AB + CD}{2} \cdot h \cdot \frac{1}{9 \cdot 4 \cdot 7} = \frac{S(ABCD)}{252}\,.$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\frac{AB+CD}{2} = \frac{3}{4}AB$. Итак, $S(ABCD) = 252$.

Ответ: 252

6. Найдите все тройки действительных чисел x, y, z из интервала $(0, \pi/2)$, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} \sin x = \sin y - \sin z \cos(x + z) \\ \cos x = \cos z + \cos y \cos(x + y) \end{cases}.$$

Решение: Поскольку $\sin x = \sin(x + z)\cos z - \cos(x + z)\sin z$ и $\cos x = \cos(x + y)\cos y + \sin(x + y)\sin y$, исходная система равносильна системе

$$\begin{cases} \sin(x + z)\cos z = \sin y \\ \sin(x + y)\sin y = \cos z \end{cases}.$$

Поскольку в этих равенствах никакие множители не обращаются в нуль, корректно рассмотреть отношения $\cos z/\sin y$ и $\sin y/\cos z$. Оба эти отношения положительны и ограничены единицей, стало быть, они равны 1. Значит, $\sin y = \cos z \neq 0$, откуда $\sin(x + y) = \sin(x + z) = 1$. Ввиду ограничения на x, y, z, отсюда следует, что $y + z = \pi/2$ и что $x + y = x + z = \pi/2$. Стало быть, $x = y = z = \pi/4$.

Ответ: $x = y = z = \pi/4$

7. Дан параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$ с основанием $ABCD$ и боковыми рёбрами AA', BB', CC', DD'. Найдите отношение, в котором делит его объём плоскость, проходящая через вершину A, середину ребра BC и середину ребра $C'D'$.

Решение: Обозначим середины рёбер BC и $C'D'$ через M и N соответственно. Продлим AM до пересечения с прямой DC. Получим точку E. Поскольку треугольники ABM и ECM подобны и $BM = CM$, имеем $EC = AB = CD$. Продлим EN до пересечения с прямой DD'. Получим точку F. Обозначим также через G точку пересечения EN с CC' и через L — середину CD. Поскольку треугольники ECG, ELN, EDF подобны и $ED = 2EC = \frac{4}{3}EL$, имеем $DF = 2CG = \frac{4}{3}LN$. Наконец, обозначим через H точку пересечения AF с $A'D'$. Объём части параллелепипеда, содержащей точку D, равен

$$\mathrm{vol}(ADEF) - \mathrm{vol}(MCEG) - \mathrm{vol}(HD'NF) = \mathrm{vol}(ADEF)\Big(1 - \frac{1}{2^3} - \frac{1}{4^3}\Big) =$$
$$= \frac{55}{64} \cdot \mathrm{vol}(ADEF) = \frac{55}{64} \cdot 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \mathrm{vol}(ADCD') = \frac{55}{24} \cdot \mathrm{vol}(ADCD') = \frac{55}{24} \cdot \frac{1}{6} \cdot V = \frac{55}{144} \cdot V,$$

где V — объём параллелепипеда. Стало быть, искомое отношение равно $55 : 89$.

Ответ: $55 : 89$

Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

июль–август 2022 года

ВАРИАНТ 225

ОТВЕТЫ

1. 4

2. 15

3. $x = \pi/4 + k\pi/2,\ k \in \mathbb{Z}$

4. $x \in (-6, -5) \cup [-3, 3] \cup (5, 6)$

5. 45°

6. $a = b \geqslant 0$

7. $1/\sqrt{6}$

РЕШЕНИЯ

1. Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением $\left(\frac{2\sqrt{2}}{27}\right)^{2/3} + \left(\frac{27}{2\sqrt{2}}\right)^{2/3} - \frac{13}{18}$.

Решение: $\left(\frac{2\sqrt{2}}{27}\right)^{2/3} + \left(\frac{27}{2\sqrt{2}}\right)^{2/3} - \frac{13}{18} = \frac{2}{9} + \frac{9}{2} - \frac{13}{18} = \frac{4 + 81 - 13}{18} = \frac{72}{18} = 4.$

Ответ: 4

2. Сумма второго и восьмого членов возрастающей геометрической прогрессии равна $9\sqrt{2}$. Произведение четвёртого, пятого и шестого членов этой прогрессии равно 64. Найдите разность между девятым и первым членами этой прогрессии.

Решение: Заметим, что поскольку прогрессия возрастает, её знаменатель положителен. Следовательно, все члены прогрессии имеют одинаковые знаки. Поскольку же сумма второго и восьмого членов положительна, все члены прогрессии являются положительными числами. Пусть $b_1, b_2, \ldots, b_9$ — исследуемая прогрессия. Тогда $b_2 + b_8 = 9\sqrt{2}$ и $b_4 b_5 b_6 = 64$. Поскольку $b_2 b_8 = b_4 b_6 = b_5^2$, получаем $b_2 b_8 = 64^{2/3} = 16$. Стало быть, либо $b_2 = \sqrt{2}$, $b_8 = 8\sqrt{2}$, либо $b_2 = 8\sqrt{2}$, $b_8 = \sqrt{2}$. Поскольку $b_8 > b_2$, справедлив первый вариант. Знаменатель прогрессии равен $(b_8/b_2)^{1/6} = 8^{1/6} = \sqrt{2}$. Тогда $b_1 = 1$ и $b_9 = 16$. Искомая разность равна 15.

Ответ: 15

3. Решите уравнение $\sin^4 x + \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$.

Решение:

$$\sin^4 x + \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \iff \sin^4 x + \frac{1}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3} - \cos 2x\right) = 0 \iff$$
$$\iff 4\sin^4 x - 1 - 2\cos 2x = 0 \iff 4\sin^4 x + 4\sin^2 x - 3 = 0 \iff$$
$$\iff (2\sin^2 x - 1)(2\sin^2 x + 3) = 0 \iff \sin x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \iff x = \pi/4 + k\pi/2,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = \pi/4 + k\pi/2,\ k \in \mathbb{Z}$

4. Решите неравенство $\log_{\sqrt{6-x}}(6+x) + \log_{\sqrt{6+x}}(6-x) \leqslant 5$.

Решение:

$$\log_{\sqrt{6-x}}(6+x) + \log_{\sqrt{6+x}}(6-x) \leqslant 5 \iff \frac{2\ln(6+x)}{\ln(6-x)} + \frac{2\ln(6-x)}{\ln(6+x)} \leqslant 5 \iff$$
$$\iff \frac{2\ln^2(6+x) - 5\ln(6+x)\ln(6-x) + 2\ln^2(6-x)}{\ln(6+x)\ln(6-x)} \leqslant 0 \iff$$
$$\iff \frac{\left(\ln\left((6+x)^2\right) - \ln(6-x)\right)\left(\ln(6+x) - \ln\left((6-x)^2\right)\right)}{\ln(6+x)\ln(6-x)} \leqslant 0 \iff$$
$$\iff \begin{cases} -6 < x < 6 \\ \dfrac{((6+x)^2 - (6-x))((6+x) - (6-x)^2)}{(5+x)(5-x)} \leqslant 0 \end{cases} \iff$$
$$\iff \begin{cases} -6 < x < 6 \\ \dfrac{(x^2 + 13x + 30)(-x^2 + 13x - 30)}{(5+x)(5-x)} \leqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -6 < x < 6 \\ \dfrac{(x+10)(x+3)(x-10)(x-3)}{(x+5)(x-5)} \leqslant 0 \end{cases} \iff$$
$$\iff \begin{cases} -6 < x < 6 \\ \left[\begin{array}{l} -10 \leqslant x < -5 \\ -3 \leqslant x \leqslant 3 \\ 5 < x \leqslant 10 \end{array}\right. \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} -6 < x < -5 \\ -3 \leqslant x \leqslant 3 \\ 5 < x < 6 \end{array}\right.$$

Ответ: $x \in (-6, -5) \cup [-3, 3] \cup (5, 6)$

5. Окружность, проходящая через вершины A, B треугольника ABC и центр описанной около этого треугольника окружности, пересекает стороны AC и BC в точках D и E соответственно. Найдите угол $\angle BCA$, если известно, что $AB = \sqrt{2}$, $AC = \sqrt{3}$ и что угол $\angle BAE$ в два раза больше угла $\angle ABD$.

Решение: Положим $\alpha = \angle BCA$, $\beta = \angle ABD$. Тогда $\angle BAE = 2\beta$. Обозначим через F точку пересечения AE и BD и через O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Тогда $\angle AOB = 2\alpha$. Поскольку точки A, D, O, E, B лежат на окружности, $\angle ADB = \angle AEB =$

$\angle AOB = 2\alpha$. Далее, из четырёхугольника $CDFE$

$$\begin{aligned}\angle DFE &= 360^\circ - \angle FDC - \angle DCE - \angle CEF = \\ &= 360^\circ - (180^\circ - \angle ADF) - \angle DCE - (180^\circ - \angle BEF) = \\ &= \angle ADF - \angle DCE + \angle BEF = 2\alpha - \alpha + 2\alpha = 3\alpha.\end{aligned}$$

Поскольку же угол DFE является внешним углом треугольников BEF и ADF, получаем $\angle FBE = 3\alpha - 2\alpha = \alpha$ и $\angle FAD = 3\alpha - 2\alpha = \alpha$. Стало быть, сумма углов треугольника ABC равна $\alpha + (\alpha + \beta) + (\alpha + 2\beta) = 3(\alpha + \beta)$. Откуда следует, что $\angle ABC = \alpha + \beta = \frac{1}{3} \cdot 180^\circ = 60^\circ$. Применяя теорему синусов, получаем, что $\sin \angle BCA = \sin \angle ABC \cdot AB/AC = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Поскольку же $\alpha < \alpha + \beta = 60^\circ$, заключаем, что $\alpha = 45^\circ$.

Ответ: 45°

6. Найдите все значения параметров a, b, при которых неравенство

$$a^3x^4 + 2ax^3 + b \leqslant 2bx^2 + b^3x + a$$

выполняется для всех x из отрезка $[0, 1]$.

Решение: Подставим $x = 0$ и $x = 1$. Получим $b \leqslant a$ и $a^3 + a \leqslant b^3 + b$. Из последнего следует, что $a \leqslant b$, ибо функция $f(x) = x^3 + x$ возрастает. Стало быть, $a = b$. Далее,

$$\begin{aligned}&a^3x^4 + 2ax^3 + a \leqslant 2ax^2 + a^3x + a \iff a^3x^4 + 2ax^3 - 2ax^2 - a^3x \leqslant 0 \iff \\ &\iff ax(a^2(x^3 - 1) + 2(x^2 - x)) \leqslant 0 \iff ax(x - 1)(a^2x^2 + (a^2 + 2)x + a^2) \leqslant 0.\end{aligned}$$

При $0 < x < 1$ справедливо $x > 0$, $x - 1 < 0$, $a^2x^2 + (a^2 + 2)x + a^2 > 0$. Стало быть, исходное неравенство выполняется для всех x из отрезка $[0, 1]$ тогда и только тогда, когда $a = b \geqslant 0$.

Ответ: $a = b \geqslant 0$

7. Дана правильная треугольная пирамида $ABCS$ с основанием ABC и вершиной S. Плоскость π перпендикулярна ребру AS и пересекает рёбра AS, BS в точках D, E соответственно. Известно, что $SD = AD$ и $SE = 2BE$. Найдите косинус угла между ребром AS и плоскостью основания ABC.

Решение: Пусть a — длина ребра основания и b — длина бокового ребра. В прямоугольном треугольнике SDE имеем $SD = \frac{1}{2}b$ и $SE = \frac{2}{3}b$. Стало быть, $\cos \angle ASB = \frac{3}{4}$. Применяя теорему косинусов к треугольнику ASB, получаем, что $a^2 = 2b^2 - 2b^2 \cdot \frac{3}{4}$, откуда $b = a\sqrt{2}$. Пусть O — центр основания. Тогда в прямоугольном треугольнике ASO имеем $AS = b = a\sqrt{2}$ и $AO = a/\sqrt{3}$. Стало быть, $\cos \angle SAO = AO/AS = 1/\sqrt{6}$.

Ответ: $1/\sqrt{6}$

Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

июль–август 2022 года

ВАРИАНТ 226

ОТВЕТЫ

1. Первое больше

2. 14

3. $x = \pi/3 + 2k\pi,\ 2\pi/9 + \frac{2}{3}k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

4. $x \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$

5. $4\sqrt{3}$

6. $a = 1/2$

7. $\frac{\sqrt{11}}{4}$

РЕШЕНИЯ

1. Определите, какое из двух чисел больше: $\sqrt{3}^{15}$ или $9^{\sqrt{14}}$.

Решение: $9^{\sqrt{14}} = \sqrt{3}^{4\sqrt{14}} = \sqrt{3}^{\sqrt{16\cdot 14}} = \sqrt{3}^{\sqrt{15^2-1}} < \sqrt{3}^{15}$.

Ответ: Первое больше

2. Числа $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{30}$ образуют арифметическую прогрессию. Известно, что $a_2 + a_4 + a_6 + \ldots + a_{30} = 45$ и что $a_3 + a_6 + a_9 + \ldots + a_{30} = 100$. Найдите разность этой прогрессии.

Решение: Пусть d — разность прогрессии. Тогда, во-первых, $45 = 15(a_2 + a_{30})/2 = 15(2a_1 + 30d)/2 = 15(a_1 + 15d)$, откуда $a_1 + 15d = 3$, и во-вторых, $100 = 10(a_3 + a_{30})/2 = 10(2a_1 + 31d)/2 = 5(2a_1 + 31d)$, откуда $2a_1 + 31d = 20$. Стало быть, $(2a_1 + 31d) - 2(a_1 + 15d) = 20 - 2 \cdot 3$, то есть $d = 14$.

Ответ: 14

3. Решите уравнение $\operatorname{tg} x = 4\sin x - \sqrt{3}$.

Решение: Заметим, что $\sin x$ и $\cos x$ одновременно в нуль не обращаются. Стало быть,

$$\operatorname{tg} x = 4\sin x - \sqrt{3} \iff \sin x = 4\sin x\cos x - \sqrt{3}\cos x \iff \sin 2x = \frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x \iff$$

$$\iff \sin 2x = \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) \iff \left[\begin{array}{l} 2x = x + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ 2x = -x + \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{array}\right., \ k \in \mathbb{Z} \iff \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x = \frac{2\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi \end{array}\right., \ k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = \pi/3 + 2k\pi,\ 2\pi/9 + \frac{2}{3}k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

4. Решите неравенство $\log_x\left(x^2 + \dfrac{3}{2}\right) \leqslant 4\log_{x^2+\frac{3}{2}}(x)$.

Решение: Положим $t = \log_x\left(x^2 + \dfrac{3}{2}\right)$. Тогда, поскольку

$$t \leqslant \frac{4}{t} \iff \frac{(t-2)(t+2)}{t} \leqslant 0 \iff \left[\begin{array}{l} 0 < t \leqslant 2 \\ t \leqslant -2 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} \frac{1}{t} \geqslant \frac{1}{2} \\ t \leqslant -2 \end{array}\right.,$$

Получаем

$$\log_x\left(x^2 + \tfrac{3}{2}\right) \leqslant 4\log_{x^2+\frac{3}{2}}(x) \iff \left[\begin{array}{l} \log_{x^2+\frac{3}{2}}(x) \geqslant \frac{1}{2} \\ \log_x\left(x^2 + \frac{3}{2}\right) \leqslant -2 \end{array}\right. \iff$$

$$\iff \begin{cases} x > 0 \\ \left[\begin{array}{l} \log_{x^2+\frac{3}{2}}(x^2) \geqslant 1 \\ \log_{x^{-2}}\left(x^2 + \frac{3}{2}\right) \geqslant 1 \end{array}\right. \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0 \\ \left[\begin{array}{l} \dfrac{x^2 - (x^2 + \frac{3}{2})}{(x^2 + \frac{3}{2}) - 1} \geqslant 0 \\ \dfrac{(x^2 + \frac{3}{2}) - x^{-2}}{x^{-2} - 1} \geqslant 0 \end{array}\right. \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x > 0 \\ \left[\begin{array}{l} x \in \varnothing \\ \dfrac{x^4 + \frac{3}{2}x^2 - 1}{x^2 - 1} \leqslant 0 \end{array}\right. \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0 \\ \dfrac{(x^2+2)(x^2 - \frac{1}{2})}{x^2 - 1} \leqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0 \\ \frac{1}{2} \leqslant x^2 < 1 \end{cases} \iff$$

$$\iff \frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant x < 1.$$

Ответ: $x \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$

5. Окружность, проходящая через вершину A треугольника ABC, касается его стороны BC в точке D и пересекает стороны AC и AB в точках E и F соответственно. Известно, что $AF = 3BF$, $BD = CD$, $AE = 2CE$ и что $ED = \sqrt{10}$. Найдите BC.

Решение: Положим $x = BF$, $y = BD$. Тогда $AB = 4x$, $BC = 2y$. По теореме о касательной и секущей $y^2 = 4x^2$, то есть $BC = 2y = 4x = AB$.

Обозначим через L точку пересечения прямых AB и ED. Обозначим также через M и N середины сторон AC и AB соответственно. Треугольники AEL и MED подобны. При этом $ME = AE - AM = AE - \frac{1}{2}AC = AE - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}AE = \frac{1}{4}AE$. Стало быть, $ED = \frac{1}{4}EL$, откуда $DL = 3ED = 3\sqrt{10}$. Кроме того, из того же подобия получаем, что $AL = 4MD = 2AB = 8x$. Применяя ещё раз теорему о касательной и секущей, получаем $8x \cdot 5x = 4\sqrt{10}\cdot 3\sqrt{10}$, то есть $x = \sqrt{3}$. Стало быть, $BC = AB = 4x = 4\sqrt{3}$.

Ответ: $4\sqrt{3}$

6. Найдите все значения параметра a из интервала $(0,1)$, при которых для каждого x из интервала $(0,\pi/4)$ существует не более одного значения y в интервале $(0,\pi/4)$, такого что

$$\frac{\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}{\operatorname{tg}\big(a(x+y)\big)} = \frac{\operatorname{tg}(x+y) - \operatorname{tg}\big(a(x+y)\big)}{1+\operatorname{tg}(x+y)\operatorname{tg}\big(a(x+y)\big)}.$$

Решение: Будем считать, что $0<a<1$, $0<x<\pi/4$, $0<y<\pi/4$. Тогда значения всех тангенсов определены и никакие знаменатели не обращаются в нуль. Домножая на произведения знаменателей и учитывая, что $\operatorname{tg}(x+y) = \dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1-\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$, получаем

$$\begin{aligned}
&\operatorname{tg}^2\big(a(x+y)\big) + \operatorname{tg}\big(a(x+y)\big)\operatorname{tg}(x+y)\big(\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y - 1\big) + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 0 \iff \\
&\iff \operatorname{tg}^2\big(a(x+y)\big) - \big(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y\big)\operatorname{tg}\big(a(x+y)\big) + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 0 \iff \\
&\iff \Big(\operatorname{tg}\big(a(x+y)\big) - \operatorname{tg} x\Big)\Big(\operatorname{tg}\big(a(x+y)\big) - \operatorname{tg} y\Big) = 0 \iff \\
&\iff \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}\big(a(x+y)\big) = \operatorname{tg} x \\ \operatorname{tg}\big(a(x+y)\big) = \operatorname{tg} y \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} a(x+y) = x \\ a(x+y) = y \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} y = \frac{1-a}{a}x \\ y = \frac{a}{1-a}x \end{array}\right. .
\end{aligned}$$

При любом $a \in (0,1)$, $a \neq \frac{1}{2}$, любому x, удовлетворяющему $0 < x < \min\left(\frac{1-a}{a}, \frac{a}{1-a}\right)\cdot\frac{\pi}{4}$, будут соответствовать два значения y в интервале $0<y<\pi/4$. Если же $a=\frac{1}{2}$, получаем соответствие $y=x$, которое взаимно однозначно.

Ответ: $a = 1/2$

7. Основание $ABCD$ прямоугольного параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$ с боковыми рёбрами AA', BB', CC', DD' является квадратом со стороной $\sqrt{2}$. Известно, что $AE \perp D'F$, где E — центр грани $BCC'B'$, F — центр квадрата $ABCD$. Найдите расстояние между серединами отрезков AE и $D'F$.

Решение: Положим $h = AA'$. Введём прямоугольную систему координат с центром в A и осями AB, AD и AA'. Тогда

$$\vec{AE} = \left(\sqrt{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{h}{2}\right), \qquad \vec{D'F} = \vec{AF} - \vec{AD'} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ 0\right) - (0,\sqrt{2},h) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2},\ -h\right).$$

Ортогональность этих векторов означает, что $1-\dfrac{1}{2}-\dfrac{h^2}{2}=0$, откуда $h=1$. Стало быть, середины отрезков AE и $D'F$ имеют координаты

$$\frac{1}{2}\vec{AE} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{4},\ \frac{1}{4}\right), \qquad \frac{1}{2}(\vec{AF}+\vec{AD'}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{3\sqrt{2}}{2},\ 1\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{4},\ \frac{3\sqrt{2}}{4},\ \frac{1}{2}\right).$$

Квадрат расстояния же между этими точками равен

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{8}+\frac{1}{2}+\frac{1}{16} = \frac{11}{16}.$$

Стало быть, само расстояние равно $\dfrac{\sqrt{11}}{4}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{11}}{4}$

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

июль–август 2021 года

ОТВЕТЫ К ВАРИАНТУ EM222

1. 41/20
2. 7
3. $x = k\pi,\ \pi/6 + k\pi/3,\ k \in \mathbb{Z}$
4. 15
5. $x \in (5,6) \cup (6,7) \cup (7,8)$
6. 3
7. 7 : 5

РЕШЕНИЯ

1. Известно, что $f(x) = \dfrac{x}{0,2} + \dfrac{1}{5x}$. Найдите $f\left(\dfrac{1}{4}\right)$.

Решение: $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{5}{4} + \frac{4}{5} = \frac{41}{20}$. **Ответ:** $\frac{41}{20}$

2. Чему равна сумма выражений $\sqrt{9+t^2}$ и $\sqrt{2+t^2}$, если их разность равна 1?

Решение: Сумма равна $\sqrt{9+t^2}+\sqrt{2+t^2} = \dfrac{(9+t^2)-(2+t^2)}{\sqrt{9+t^2}-\sqrt{2+t^2}} = 7$. Заметим, что тогда $\sqrt{9+t^2} = 4$, то есть, $t^2 = 7$, стало быть, условие корректно.

Ответ: 7

3. Решите уравнение $4\sin^2 x \sin 2x - \sin 4x = 0$.

Решение: $4\sin^2 x \sin 2x - \sin 4x = 4\sin x(\sin x \sin 2x - \cos x \cos 2x) = -4\sin x \cos 3x$, то есть либо $\sin x = 0$, либо $\cos 3x = 0$.

Ответ: $x = k\pi,\ \pi/6 + k\pi/3,\ k \in \mathbb{Z}$

4. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC отмечены точки D и F, так что $\angle ACD = \angle DCF = \angle FCB$. Известно, что $AD = 2$, $AF = 5$. Найдите FB.

Решение: Обозначим $BC = a$, $AC = b$, $\frac{AD}{DF} = \lambda$, $\frac{FB}{DF} = \mu$. Из условия следует, что $\lambda = 2/3$. Отрезок CD является биссектрисой треугольника ACF, следовательно, $CF = b/\lambda$. Аналогично, из треугольника DCB получаем, что $CD = a/\mu$.

Площадь треугольника DCF равна

$$\frac{1}{2}CD \cdot CF \cdot \sin(\angle DCF) = \frac{ab}{4\lambda\mu},$$

так как $\angle DCF = 30°$. С другой стороны, она относится к площади треугольника ABC, равной $\frac{ab}{2}$, как $\frac{DF}{AB} = \frac{1}{1+\lambda+\mu}$. Стало быть,

$$\frac{1}{2\lambda\mu} = \frac{1}{1+\lambda+\mu},$$

откуда следует, что

$$\mu = \frac{\lambda+1}{2\lambda-1}.$$

Вспоминая, что $\lambda = 2/3$, получаем, что $\mu = 5$, то есть $FB = 5DF = 15$.

Ответ: 15.

5. Решите неравенство $\log_{|x-7|}\sqrt{x-5} \leqslant \dfrac{1}{4}$.

Решение:

$$\log_{|x-7|}\sqrt{x-5} \leqslant \frac{1}{4} \iff \begin{cases} x > 5 \\ \log_{(x-7)^2}\frac{(x-5)^4}{(x-7)^2} \leqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 5 \\ \dfrac{\frac{(x-5)^4}{(x-7)^2} - 1}{(x-7)^2 - 1} \leqslant 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x > 5 \\ \dfrac{(x^2 - 11x + 32)(x-3)(x-6)}{(x-7)^2(x-6)(x-8)} \leqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 5,\ x \neq 6, 7 \\ \dfrac{x-3}{x-8} \leqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \neq 6, 7 \\ 5 < x < 8 \end{cases}$$

Ответ: $x \in (5, 6) \cup (6, 7) \cup (7, 8)$

6. Действительные числа a, b, c удовлетворяют условиям $a \geqslant b \geqslant c \geqslant 1$, $a^{-1} + b^{-1} + c^{-1} = 1$. Известно, что при некотором положительном x выполняется равенство

$$\frac{c+x}{a+x} = c - 2.$$

Найдите все возможные значения b.

Решение: Перепишем данное равенство как $(c-3)x = c + 2a - ac$. Заметим, что $c + 2a - ac = ac(a^{-1} + 2c^{-1} - 1) \geqslant ac(a^{-1} + b^{-1} + c^{-1} - 1) = 0$. При этом $3c^{-1} \geqslant a^{-1} + b^{-1} + c^{-1} = 1$, то есть $c \leqslant 3$. Следовательно, если $c - 3 \neq 0$, решение уравнения $(c-3)x = c + 2a - ac$ единственно и неположительно. Но по условию оно имеет положительное решение. Стало быть, $c = 3$. Но тогда $a = b = c = 3$, поскольку, если $a > c$, то $a^{-1} + b^{-1} + c^{-1} < 3c^{-1} = 1$, что противоречит условию. Стало быть, $b = 3$.

Ответ: 3

7. Дан куб $ABCDA'B'C'D'$. Через середины его ребер AA', $C'D'$ и через центр грани $BCC'B'$ проведена плоскость, пересекающая диагональ DB' куба в точке O. Найдите отношение $DO : OB'$.

Решение: Обозначим середины ребер AA', $C'D'$ и центр грани $BCC'B'$ через F, G, H, соответственно. Обозначим также через π плоскость FGH.

Найдем точку Q пересечения плоскости π и прямой BB'. Точки G, H, A, B лежат в плоскости ABC', следовательно прямые GH и AB пересекаются. Пусть P — точка их пересечения. Тогда $BP = C'G = \frac{1}{2}AB$, поскольку треугольники $HC'G$ и HBP равны. Точки P и F принадлежат π, следовательно, прямая FP есть прямая пересечения плоскости ABB' с π. То есть Q лежит на отрезке BB'. Из подобия треугольников APF и BPQ следует, что $BQ = \frac{1}{3}AF = \frac{1}{6}BB'$. Следовательно, $QB' = \frac{5}{6}BB'$.

Найдем теперь точку S пересечения плоскости π и прямой DD'. Прямая GH лежит в плоскости ABC', равно как и прямая AD'. Обозначим через R точку пересечения этих прямых. Из подобия треугольников RAP и $RD'G$ следует, что $RD' = \frac{1}{3}RA$. Точки R и F принадлежат π, следовательно, прямая FR есть прямая пересечения плоскости ADD' с π. То есть S лежит на продолжении отрезка DD' за точку D'. Из подобия треугольников ARF и $D'RS$ следует, что $D'S = \frac{1}{3}AF = \frac{1}{6}DD'$. Следовательно, $SD = \frac{7}{6}DD'$.

Прямая SQ есть прямая пересечения плоскости DBB' с π, то есть она проходит через O. Треугольники SDO и $QB'O$ подобны с коэффициентом подобия $\frac{7}{5}$. Следовательно, $DO : OB' = 7 : 5$.

Ответ: $7 : 5$.