

ВАРИАНТ 221

1. Найдите наименьшее целое число, большее, чем  $\frac{\sqrt{17} + 3}{\sqrt{17} - 3}$ .
2. Сумма первых пятнадцати членов арифметической прогрессии в два раза больше суммы первых десяти членов. Найдите первый член этой прогрессии, если известно, что пятый её член равен 7.
3. Решите уравнение  $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x + 3 = 0$ .
4. Решите неравенство  $\left(2 \log_2^2 x - \log_2 x^2 + 1\right)^{x^2 - 2x} \leq 1$ .
5. Середины сторон выпуклого четырёхугольника  $ABCD$  лежат на окружности. Известно, что  $AB = 1$ ,  $BC = 4$ ,  $CD = 8$ . Найдите  $AD$ .
6. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых уравнение

$$x^2 + \left(1 - a + \sqrt[4]{|x|}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$$

имеет ровно три решения.

7. Объём треугольной призмы  $ABCA'B'C'$  с основанием  $ABC$  и боковыми рёбрами  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  равен 72. Найдите объём тетраэдра  $DEFG$ , где  $D$  — центр грани  $ABB'A'$ ,  $E$  — точка пересечения медиан треугольника  $A'B'C'$ ,  $F$  — середина ребра  $AC$  и  $G$  — середина ребра  $BC$ .

ВАРИАНТ 222

1. Найдите в явном виде целое число, заданное выражением  $\sqrt{11} \cdot \left( \frac{2}{\sqrt{11} - \sqrt{7}} + \frac{2}{\sqrt{11} + \sqrt{7}} \right)$ .
2. Сумма первых трёх членов геометрической прогрессии в два раза больше разности между первым и четвёртым её членами. Найдите первый член этой прогрессии, если известно, что сумма первых семи её членов равна 127.
3. Решите уравнение  $\sin x + \sin 2x = \cos x + \cos 2x$ .
4. Решите неравенство  $x^{\log_2 \sqrt{x}} \geq \frac{2}{\sqrt{x}}$ .
5. На диагонали  $AC$  параллелограмма  $ABCD$  как на диаметре построена окружность. Эта окружность пересекает стороны  $AB$  и  $BC$  в точках  $M$  и  $N$  соответственно. При этом  $AM = MB$  и  $CN = 2NB$ . Найдите тангенс острого угла параллелограмма  $ABCD$ .
6. Найдите все возможные значения произведения  $xy$ , если известно, что  $x, y \in [0, \pi/2)$  и справедливо
$$\frac{1 - \sin(x - y)}{1 - \cos(x - y)} = \frac{1 - \sin(x + y)}{1 - \cos(x + y)}$$
7. В пирамиду, в основании которой лежит ромб с острым углом  $\alpha$  и стороной  $\sqrt{6}$ , вписана сфера диаметра 1. Найдите угол  $\alpha$ , если известно, что все боковые грани пирамиды наклонены к плоскости её основания под углом  $60^\circ$ .

ВАРИАНТ 223

1. Определите, какое из двух чисел больше:  $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} + \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$  или 3.
2. Дана возрастающая арифметическая прогрессия, состоящая из положительных чисел. Произведение третьего и четвёртого членов этой прогрессии в два раза больше произведения первого и шестого её членов. Найдите разность этой прогрессии, если известно, что восьмой её член равен 32.
3. Решите уравнение  $\cos 2x + 6 \sin 2x = \cos 4x + 6 \sin x$ .
4. Решите неравенство  $\log_3(1 - x) - \log_3(1 + x) + \log_{1+x}(1 - x) - 1 \leq 0$ .
5. В треугольнике  $ABC$  угол  $C$  равен  $60^\circ$ . На сторонах  $AB$ ,  $BC$ ,  $AC$  отмечены точки  $D$ ,  $E$ ,  $F$  соответственно. Радиус окружности, вписанной в треугольник  $ADF$ , равен 1. Радиус окружности, вписанной в треугольник  $BDE$ , равен 2. Найдите сторону  $AB$ , если известно, что четырёхугольник  $DECF$  является ромбом.
6. Найдите все пары действительных чисел  $x, y$ , удовлетворяющих соотношению

$$\frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{1}{xy} = 2\sqrt{2 - \sqrt{xy}} \cdot \sqrt[4]{xy}.$$

7. Высота правильной треугольной призмы  $ABCA'B'C'$  с основанием  $ABC$  и боковыми рёбрами  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  равна 1. Найдите длину ребра основания, если известно, что  $AB' \perp BC'$ .

ВАРИАНТ 224

1. Найдите наименьшее целое число, большее, чем  $2\sqrt{3} + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}}$ .

2. Положительные числа  $a, b, c$  образуют непостоянную геометрическую прогрессию. Числа  $a, 4b, 7c$  образуют арифметическую прогрессию. Найдите отношение  $a/c$ .

3. Решите уравнение  $\frac{\sqrt{2}}{\sin x} + \frac{\sqrt{2}}{\cos x} = \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}$ .

4. Решите неравенство  $\log_{\sqrt{x}} \left| \frac{3x}{x-4} \right| \leq 4$ .

5. В трапеции  $ABCD$  основание  $AB$  в два раза больше основания  $CD$ . Отрезки  $AL, BM$  и  $DK$ , где  $K, L, M$  — соответственно середины сторон  $AB, BC, AD$ , ограничивают треугольник площади 1. Найдите площадь трапеции.

6. Найдите все тройки действительных чисел  $x, y, z$  из интервала  $(0, \pi/2)$ , удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} \sin x = \sin y - \sin z \cos(x+z) \\ \cos x = \cos z + \cos y \cos(x+y) \end{cases}$$

7. Дан параллелепипед  $ABCD A' B' C' D'$  с основанием  $ABCD$  и боковыми рёбрами  $AA', BB', CC', DD'$ . Найдите отношение, в котором делит его объём плоскость, проходящая через вершину  $A$ , середину ребра  $BC$  и середину ребра  $C'D'$ .

ВАРИАНТ 225

1. Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением  $\left(\frac{2\sqrt{2}}{27}\right)^{2/3} + \left(\frac{27}{2\sqrt{2}}\right)^{2/3} - \frac{13}{18}$ .

2. Сумма второго и восьмого членов возрастающей геометрической прогрессии равна  $9\sqrt{2}$ . Произведение четвёртого, пятого и шестого членов этой прогрессии равно 64. Найдите разность между девятым и первым членами этой прогрессии.

3. Решите уравнение  $\sin^4 x + \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$ .

4. Решите неравенство  $\log_{\sqrt{6-x}}(6+x) + \log_{\sqrt{6+x}}(6-x) \leq 5$ .

5. Окружность, проходящая через вершины  $A, B$  треугольника  $ABC$  и центр описанной около этого треугольника окружности, пересекает стороны  $AC$  и  $BC$  в точках  $D$  и  $E$  соответственно. Найдите угол  $\angle BCA$ , если известно, что  $AB = \sqrt{2}$ ,  $AC = \sqrt{3}$  и что угол  $\angle BAE$  в два раза больше угла  $\angle ABD$ .

6. Найдите все значения параметров  $a, b$ , при которых неравенство

$$a^3x^4 + 2ax^3 + b \leq 2bx^2 + b^3x + a$$

выполняется для всех  $x$  из отрезка  $[0, 1]$ .

7. Дана правильная треугольная пирамида  $ABCS$  с основанием  $ABC$  и вершиной  $S$ . Плоскость  $\pi$  перпендикулярна ребру  $AS$  и пересекает рёбра  $AS, BS$  в точках  $D, E$  соответственно. Известно, что  $SD = AD$  и  $SE = 2BE$ . Найдите косинус угла между ребром  $AS$  и плоскостью основания  $ABC$ .

ВАРИАНТ 226

1. Определите, какое из двух чисел больше:  $\sqrt{3}^{15}$  или  $9\sqrt{14}$ .
2. Числа  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{30}$  образуют арифметическую прогрессию. Известно, что  $a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{30} = 45$  и что  $a_3 + a_6 + a_9 + \dots + a_{30} = 100$ . Найдите разность этой прогрессии.
3. Решите уравнение  $\operatorname{tg} x = 4 \sin x - \sqrt{3}$ .
4. Решите неравенство  $\log_x \left( x^2 + \frac{3}{2} \right) \leq 4 \log_{x^2 + \frac{3}{2}}(x)$ .
5. Окружность, проходящая через вершину  $A$  треугольника  $ABC$ , касается его стороны  $BC$  в точке  $D$  и пересекает стороны  $AC$  и  $AB$  в точках  $E$  и  $F$  соответственно. Известно, что  $AF = 3BF$ ,  $BD = CD$ ,  $AE = 2CE$  и что  $ED = \sqrt{10}$ . Найдите  $BC$ .
6. Найдите все значения параметра  $a$  из интервала  $(0, 1)$ , при которых для каждого  $x$  из интервала  $(0, \pi/4)$  существует не более одного значения  $y$  в интервале  $(0, \pi/4)$ , такого что

$$\frac{\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}{\operatorname{tg}(a(x+y))} = \frac{\operatorname{tg}(x+y) - \operatorname{tg}(a(x+y))}{1 + \operatorname{tg}(x+y) \operatorname{tg}(a(x+y))}.$$

7. Основание  $ABCD$  прямоугольного параллелепипеда  $ABCD A' B' C' D'$  с боковыми рёбрами  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ ,  $DD'$  является квадратом со стороной  $\sqrt{2}$ . Известно, что  $AE \perp D'F$ , где  $E$  — центр грани  $BCC' B'$ ,  $F$  — центр квадрата  $ABCD$ . Найдите расстояние между серединами отрезков  $AE$  и  $D'F$ .

ВАРИАНТ 227

1. Определите, какое из двух чисел больше:  $\sqrt{3} + \sqrt{7} + \sqrt{21}$  или 9.
2. Произведение седьмого и восьмого членов непостоянной арифметической прогрессии равно произведению пятого и девятого её членов. Найдите одиннадцатый член данной прогрессии.
3. Решите уравнение  $5 + \cos 4x = 6 \sin^2 x$ .
4. Решите неравенство  $\log_{x-\frac{3}{4}} \left( x - \frac{3}{2} \right) \geq \frac{1}{2}$ .
5. Биссектриса  $AL$  треугольника  $ABC$  перпендикулярна его медиане  $BM$ . Найдите площадь этого треугольника, если известно, что  $AB = \sqrt{3}$  и  $ML = 1$ .
6. Найдите наименьшее значение выражения  $x^2 - 5\pi x + 2xy - 5\pi y + y^2$  при условии, что  $x$  и  $y$  удовлетворяют соотношению
$$\frac{\sin(x+y)}{\sin x \sin y} = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin y}.$$
7. Плоские углы при вершине  $A$  тетраэдра  $ABCD$  прямые. Двугранные углы при рёбрах  $BD$  и  $CD$  равны между собой и в два раза больше двугранного угла при ребре  $BC$ . Найдите объём тетраэдра, если известно, что  $AD = 1$ .