Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

июль–август 2021 года

ВАРИАНТ 213

ОТВЕТЫ

1. 12

2. 72%

3. $x = \pi/6 + k\pi/2,\ k \in \mathbb{Z}$

4. $x \in (1, \sqrt{2}] \cup (2, 3]$

5. 2

6. $(1 - \sqrt{2})/2 \leqslant a \leqslant (\sqrt{2} - 1)/2$

7. $1 : 2$

РЕШЕНИЯ

1. Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением $\left(\dfrac{3\sin\frac{\pi}{2}}{\log_2 16} - \sqrt{\dfrac{4}{9}}\right)^{-1}$.

Решение: $\left(\dfrac{3\sin\frac{\pi}{2}}{\log_2 16} - \sqrt{\dfrac{4}{9}}\right)^{-1} = \left(\dfrac{3}{4} - \dfrac{2}{3}\right)^{-1} = 12$

Ответ: 12

2. Автовладелец Авдей продал автосалону свой автомобиль за 60% его первоначальной стоимости. Автосалон выставил на продажу этот автомобиль за цену, на 20% большую уплаченной Авдею. Какова доля получившейся цены по отношению к первоначальной?

Решение: Обозначим через x первоначальную стоимость автомобиля. Тогда итоговая цена равна $1,2 \cdot 0,6x = 0,72x$.

Ответ: 72%

3. Решите уравнение $2 \cdot \dfrac{\sin 3x - \sin x}{\cos 3x + \cos x} = \sqrt{3} \cdot \left(1 - \operatorname{tg}^2 x\right)$.

Решение:

$$2\cdot\frac{\sin 3x-\sin x}{\cos 3x+\cos x}=\sqrt{3}\cdot\left(1-\operatorname{tg}^2 x\right)\iff 2\cdot\frac{\cos 2x\sin x}{\cos 2x\cos x}=\sqrt{3}\cdot\frac{\cos 2x}{\cos^2 x}\iff$$

$$\operatorname{tg}2x\cdot\frac{\cos x}{\cos x}=\sqrt{3}\iff 2x=\frac{\pi}{3}+k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}\iff x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2},\quad k\in\mathbb{Z}$$

Ответ: $x=\pi/6+k\pi/2,\ k\in\mathbb{Z}$

4. Решите неравенство $\log_{x-1}(x+1)-\log_{\sqrt{x+1}}(x-1)\geqslant 1$.

Решение:

$$\log_{x-1}(x+1)-\log_{\sqrt{x+1}}(x-1)\geqslant 1\iff\frac{\ln(x+1)}{\ln(x-1)}-\frac{2\ln(x-1)}{\ln(x+1)}-1\geqslant 0\iff$$

$$\frac{\ln^2(x+1)-2\ln^2(x-1)-\ln(x-1)\ln(x+1)}{\ln(x-1)\ln(x+1)}\geqslant 0\iff$$

$$\frac{\Big(\ln(x+1)-2\ln(x-1)\Big)\Big(\ln(x+1)+\ln(x-1)\Big)}{\ln(x-1)\ln(x+1)}\geqslant 0\iff$$

$$\begin{cases}x>1\\ \dfrac{\big((x+1)-(x-1)^2\big)\big((x+1)-(x-1)^{-1}\big)}{(x-2)x}\geqslant 0\end{cases}\iff\begin{cases}x>1\\ \dfrac{x(3-x)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{(x-2)x}\geqslant 0\end{cases}\iff$$

$$x\in(1,\sqrt{2}]\cup(2,3]$$

Ответ: $x\in(1,\sqrt{2}]\cup(2,3]$

5. В четырёхугольник $ABCD$ площади 2 вписана окружность, касающаяся сторон AB и CD в точках K и L соответственно. Отрезок KL пересекает диагональ AC в точке M. Найдите BD, если известно, что $AM=MC=1$.

Решение: Поскольку K и L — точки касания, углы BKL и CLK равны. Стало быть, по теореме синусов

$$\frac{AK}{\sin\angle AMK}=\frac{AM}{\sin\angle AKM}=\frac{CM}{\sin\angle CLM}=\frac{CL}{\sin\angle CML},$$

откуда $AK=CL$. Обозначим через N точку касания окружности со стороной BC. Тогда $CL=CN$ и $BN=BK$. Получаем, что $AB=BC$. Аналогично, $AD=CD$. Отсюда следует, что $AC\perp BD$ и $S(ABCD)=BD\cdot AM$. Значит, $BD=2$.

Ответ: 2

6. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство

$$\sin^6 x+\cos^6 x+a\cdot\sin 2x\geqslant a^2$$

выполняется для всех действительных x.

Решение: Заметим, что

$$\sin^6 x+\cos^6 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)(\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x)=$$

$$\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-3\sin^2 x\cos^2 x=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x.$$

Положим $t = \sin 2x$. Теперь задача в том, чтобы описать все значения a, при которых для каждого $t \in [-1, 1]$ справедливо

$$3t^2 - 4at + 4(a^2 - 1) \leqslant 0.$$

Это выполняется тогда и только тогда, когда для $f(t) = 3t^2 - 4at + 4(a^2 - 1)$ справедливо $f(-1) \leqslant 0$ и $f(1) \leqslant 0$. Получаем

$$\begin{cases} 4a^2 + 4a - 1 \leqslant 0 \\ 4a^2 - 4a - 1 \leqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (-1 - \sqrt{2})/2 \leqslant a \leqslant (-1 + \sqrt{2})/2 \\ (1 - \sqrt{2})/2 \leqslant a \leqslant (1 + \sqrt{2})/2 \end{cases} \iff \frac{1 - \sqrt{2}}{2} \leqslant a \leqslant \frac{\sqrt{2} - 1}{2}.$$

Ответ: $(1 - \sqrt{2})/2 \leqslant a \leqslant (\sqrt{2} - 1)/2$

7. Вписанная в треугольную пирамиду $ABCD$ сфера касается граней BCD, ACD, ABD и ABC в точках A_1, B_1, C_1 и D_1 соответственно. Известно, что D_1 является точкой пересечения высот треугольника ABC, что плоскости ABC и $A_1B_1C_1$ параллельны и что радиус окружности, описанной около треугольника ABC в четыре раза больше радиуса окружности, описанной около треугольника $A_1B_1C_1$. Найдите отношение, в котором сфера делит отрезок DD_1, считая от вершины D.

Решение: Пусть O — центр сферы и пусть A_2, B_2, C_2 — основания высот треугольника ABC, опущенных из вершин A, B, C соответственно. Рассмотрим четырёхугольники $OA_1A_2D_1$, $OB_1B_2D_1$, $OC_1C_2D_1$. Каждый из них состоит из двух равных прямоугольных треугольников. При этом катеты OD_1, OA_1, OB_1, OC_1 равны. Из равенства расстояний от A_1, B_1, C_1 до плоскости ABC следует, что равны углы D_1OA_1, D_1OB_1, D_1OC_1, а стало быть, равны и углы $D_1A_2A_1$, $D_1B_2B_1$, $D_1C_2C_1$. Значит, равны отрезки D_1A_2, D_1B_2, D_1C_2, то есть D_1 является точкой пересечения биссектрис треугольника ABC. При этом D_1 — это ортоцентр ABC. Стало быть, треугольник ABC правильный. Поскольку углы $D_1A_2A_1$, $D_1B_2B_1$, $D_1C_2C_1$ равны, DD_1 — высота пирамиды. Опустим из A_1 перпендикуляр A_1D_2 на DD_1. Тогда радиус окружности, описанной около треугольника $A_1B_1C_1$ равен A_1D_2. Радиус же окружности, описанной около треугольника ABC равен AD_1. Получаем, что $A_2D_1 = \frac{1}{2}AD_1 = \frac{1}{2} \cdot 4A_1D_2 = 2A_1D_2$. Отсюда видим, что $\angle D_1A_2A_1 = 60°$. Стало быть, $DD_1 = \sqrt{3} \cdot A_2D_1 = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot OD_1 = 3OD_1$. Получаем, что искомое отношение равно $(DD_1 - 2OD_1) : 2OD_1 = 1 : 2$.

Ответ: $1 : 2$

Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

июль–август 2021 года

ВАРИАНТ 214

ОТВЕТЫ

1. 3

2. В 7 раз

3. $x = \pi/2 + k\pi,\ \pi/4 + k\pi/2,\ k \in \mathbb{Z}$

4. $x \in (0, 1/3] \cup (1, 3]$

5. 1

6. $a \in [0, 1) \cup \{3\} \cup (5, +\infty)$

7. 60°

РЕШЕНИЯ

1. Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением $\left(\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} - \dfrac{2\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}\right)^2$.

Решение: $\left(\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} - \dfrac{2\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}\right)^2 = \left(\dfrac{4\sqrt{3}}{4}\right)^2 = 3$

Ответ: 3

2. Бобёр доплывает от своей норы вниз по реке до осиновой рощи за три минуты. Подкрепившись, он плывёт обратно к своей норе, на что у него уходит четыре минуты. Во сколько раз собственная скорость бобра превышает скорость течения? (Собственную скорость бобра считать постоянной).

Решение: Пусть x — собственная скорость бобра, y — скорость течения. Тогда $3(x + y) = 4(x - y)$, откуда $x = 7y$.

Ответ: В 7 раз

3. Решите уравнение $\cos 4x + \cos 2x + \operatorname{ctg}^2 x = 0$.

Решение:

$$\cos 4x + \cos 2x + \operatorname{ctg}^2 x = 0 \iff 2\cos^2 2x + \cos 2x + \frac{\cos 2x}{\sin^2 x} = 0 \iff$$

$$\cos 2x\left(2 - 4\sin^2 x + 1 + \frac{1}{\sin^2 x}\right) = 0 \iff \frac{\cos 2x}{\sin^2 x}(4\sin^4 x - 3\sin^2 x - 1) = 0 \iff$$

$$\frac{\cos 2x(\sin^2 x - 1)(4\sin^2 x + 1)}{\sin^2 x} = 0 \iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ \sin x = \pm 1 \end{array}\right. \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{array}\right., \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = \pi/2 + k\pi,\ \pi/4 + k\pi/2,\ k \in \mathbb{Z}$

4. Решите неравенство $\log_2 x + \log_3 x \leqslant \log_2 3 \cdot \log_x 6$.

Решение:

$$\log_2 x + \log_3 x \leqslant \log_2 3 \cdot \log_x 6 \iff \frac{\log_x 6}{\log_x 2 \log_x 3} \leqslant \log_2 3 \cdot \log_x 6 \iff$$

$$\log_2 3 \cdot \log_x 6 \cdot \left(\frac{\log_2 x \cdot \log_3 x}{\log_2 3} - 1\right) \leqslant 0 \iff \log_x 6 \cdot (\log_3^2 x - 1) \leqslant 0 \iff$$

$$\frac{(\log_3 x - 1)(\log_3 x + 1)}{\log_6 x} \leqslant 0 \iff \begin{cases} \dfrac{(x-3)\left(x - \frac{1}{3}\right)}{x-1} \leqslant 0 \\ x > 0 \end{cases} \iff x \in (0, 1/3] \cup (1, 3]$$

Ответ: $x \in (0, 1/3] \cup (1, 3]$

5. На сторонах AB и AC треугольника ABC отмечены точки K и L соответственно. Известно, что $AB = BC = 1$, что площади треугольников AKC и BCL равны и что около четырёхугольника $AKML$, где M — точка пересечения отрезков BL и CK, можно описать окружность. Найдите все возможные значения AC.

Решение: Из того, что четырёхугольник $AKML$ вписанный, следует, что углы MLC и MKA равны. Поскольку углы BCA и BAC также равны, получаем подобие треугольников BCL и CAK. Отсюда $BC/CA = CL/AK$. Из равенства площадей получаем $BC \cdot CL = CA \cdot AK$, то есть $BC/CA = AK/CL$. Стало быть, $CA = BC = 1$.

Ответ: 1

6. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\left(\sqrt{3+2x-x^2} - \sqrt{3-2x-x^2}\right)\left(\sqrt{a-x^2} - \sqrt{3-2x-x^2}\right)\left(\sqrt{a-x^2} - \sqrt{3+2x-x^2}\right) = 0$$

имеет ровно одно решение.

Решение: Заметим, что $3 \pm 2x - x^2 = 2^2 - (x \mp 1)^2$. Стало быть, графики функций $\sqrt{3+2x-x^2}$ и $\sqrt{3-2x-x^2}$ — верхние половины окружностей радиуса 2 с центрами в точках $(1, 0)$ и $(-1, 0)$ соответственно. График же функции $\sqrt{a-x^2}$ — верхняя половина окружности радиуса $\sqrt{a}$ с центром в точке $(0, 0)$. Первые две полуокружности имеют одну общую точку — $(0, \sqrt{3})$. При этом ОДЗ x является пересечением отрезков $[-1, 1]$ и $[-\sqrt{a}, \sqrt{a}]$. Соответственно, при $a < 1$ третья полуокружность первые две не пересекает и решение будет одно. При $1 \leqslant a \leqslant 5$

третья полуокружность пересекает первые две в точках с абсциссами из отрезка $[-1, 1]$ и точки пересечения совпадают только при $a = 3$. При $a > 5$ третья полуокружность либо пересекает первые две в точках с абсциссами по модулю большими 1, либо не пересекает вообще. Стало быть, решение будет единственным при $a \in [0, 1) \cup \{3\} \cup (5, +\infty)$.

Ответ: $a \in [0, 1) \cup \{3\} \cup (5, +\infty)$

7. Дан тетраэдр $ABCD$. Известно, что центр сферы, описанной около этого тетраэдра, лежит на AB, что плоскости ABC и ABD перпендикулярны и что $AD = DC = CB$. Найдите угол между прямыми AD и CB.

Решение: Сразу отметим, что, поскольку центр сферы, описанной около тетраэдра, лежит на AB, углы ACB и ADB — прямые. Далее, опустим перпендикуляры CK и CL на AB и BD соответственно. Тогда $DL = LB$, ибо $DC = CB$, следовательно, KL — серединный перпендикуляр к BD в плоскости ABD и, поскольку $\angle ADB = 90°$, точка K является серединой AB. Значит, $AC = BC$. Аналогично, $AD = BD$.

Итак, $AC = BC = AD = BD = CD$, $AB \perp CK$, $AB \perp DK$, $AK = BK = CK = DK$. Пусть E — точка, симметричная точке C относительно K. Тогда $AK \perp EK \perp DK$ и $AK = EK = DK$. Следовательно, треугольник ADE — равносторонний. При этом $AE \parallel CB$. Стало быть, искомый угол равен углу EAD и равен $60°$.

Ответ: $60°$

Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

июль–август 2021 года

ВАРИАНТ 215

ОТВЕТЫ

1. 4

2. 24%

3. $x = k\pi,\ \pm\pi/3 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

4. $x \in (1, 2) \cup \{3^{\log_2 3}\}$

5. $(3 + 2\sqrt{3}) : 1$

6. $(x, y) = (1/2, -1)$

7. 3

РЕШЕНИЯ

1. Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением $\dfrac{27^{1/3}}{25^{1/2}} + \dfrac{\log_5 25}{3\sqrt{2} \cdot \cos\frac{\pi}{4}} + \dfrac{41}{15}$.

Решение: $\dfrac{27^{1/3}}{25^{1/2}} + \dfrac{\log_5 25}{3\sqrt{2} \cdot \cos\frac{\pi}{4}} + \dfrac{41}{15} = \dfrac{3}{5} + \dfrac{2}{3} + \dfrac{41}{15} = \dfrac{9 + 10 + 41}{15} = 4$

Ответ: 4

2. Любитель коктейлей Игнат смешал 300 мл морковного сока с 200 мл сливок. Тщательно перемешав полученную смесь, Игнат попробовал её на вкус и решил, что сливок оказалось слишком много. Игнат налил в полулитровый графин 200 мл морковного сока, а оставшиеся 300 мл заполнил приготовленной смесью. Каково процентное содержание сливок в полученном напитке?

Решение: В первоначальной смеси было 2/5 сливок. В графине смесь занимает 3/5 объёма. Значит, доля сливок в итоговой смеси равна $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{25}$, то есть 24%.

Ответ: 24%

3. Решите уравнение $4\sin 2x\cos 3x - 2\sin 5x = \operatorname{tg} 2x$.

Решение:

$$4\sin 2x\cos 3x - 2\sin 5x = \operatorname{tg} 2x \iff 2\sin 2x\cos 3x - 2\cos 2x\sin 3x = \operatorname{tg} 2x \iff$$

$$-2\sin x = \operatorname{tg} 2x \iff \frac{\sin x(2\cos 2x + 2\cos x)}{\cos 2x} = 0 \iff \frac{\sin x(2\cos^2 x + \cos x - 1)}{\cos 2x} = 0 \iff$$

$$\frac{\sin x(2\cos x - 1)(\cos x + 1)}{\cos 2x} = 0 \iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \cos x = -1 \\ \cos x = 1/2 \end{array}\right. \\ \cos 2x \neq 0 \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \pm\pi/3 + 2k\pi \end{array}\right., \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = k\pi,\ \pm\pi/3 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

4. Решите неравенство $\log_{x-1}\left(4^{\log_3 x} - 6x^{\log_3 2} + 10\right) \leqslant 0$.

Решение:

$$\log_{x-1}\left(4^{\log_3 x} - 6x^{\log_3 2} + 10\right) \leqslant 0 \iff \log_{x-1}\left(4^{\log_3 x} - 6\cdot 2^{\log_3 x} + 10\right) \leqslant 0 \iff$$

$$\log_{x-1}\left(\left(2^{\log_3 x} - 3\right)^2 + 1\right) \leqslant 0 \iff \frac{\ln\left(\left(2^{\log_3 x} - 3\right)^2 + 1\right)}{\ln(x-1)} \leqslant 0 \iff$$

$$\begin{cases} \dfrac{\left(2^{\log_3 x} - 3\right)^2}{x-2} \leqslant 0 \\ x > 1 \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} 1 < x < 2 \\ x = 3^{\log_2 3} \end{array}\right.$$

Ответ: $x \in (1,2) \cup \{3^{\log_2 3}\}$

5. Дана равнобокая трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD. Известно, что окружности, вписанные в треугольники ABC и ACD, касаются диагонали AC в одной и той же точке. При этом точка касания первой окружности со стороной BC делит эту сторону пополам. Найдите отношение, в котором точка касания второй окружности со стороной AD делит эту сторону, считая от точки A.

Решение: Обозначим через K, L, M, N, O точки касания окружностей с отрезками AB, BC, CD, AD, AC соответственно. Не ограничивая общности, можно считать, что $BL = 1$. Тогда $BK = BL = CL = CO = CM = 1$. Положим $AN = x$ и $DN = y$. Тогда $AK = AO = AN = x$ и $DN = DM = y$. Искомое отношение равно $x : y$. Заметим сразу, что $x + y = AD = BC = 2$. Опустим высоту CH. Тогда $AC^2 - AH^2 = CH^2 = BC^2 - BH^2$. При этом $AC = x + 1$, $AH = (AB+CD)/2 = (x+y+2)/2 = 2$, $BC = 2$, $BH = (AB-CD)/2 = (x-y)/2 = (x-(2-x))/2 = x-1$. Стало быть,

$$AC^2 - AH^2 = BC^2 - BH^2 \iff (x+1)^2 - 4 = 4 - (x-1)^2 \iff x^2 = 3.$$

Тогда $x = \sqrt{3}$, $y = 2 - \sqrt{3}$ и $x/y = \sqrt{3}/(2-\sqrt{3}) = 3 + 2\sqrt{3}$.

Ответ: $(3 + 2\sqrt{3}) : 1$

6. Найдите все пары действительных чисел (x, y) с наименьшим возможным значением y, удовлетворяющие неравенству

$$\log_{x^2-y}\left(x - y^2 + \frac{7}{4}\right) \geqslant 1.$$

Решение: При $y < x^2 - 1$ неравенство равносильно $x - y^2 + \frac{7}{4} \geqslant x^2 - y$, то есть

$$(x - 1/2)^2 + (y - 1/2)^2 \leqslant (3/2)^2.$$

Это неравенство задаёт круг с центром $(1/2, 1/2)$ и радиусом $3/2$. Самая нижняя точка имеет координаты $(1/2, -1)$ и удовлетворяет ограничению $y < x^2 - 1$.

При $y > x^2 - 1$ для каждой пары (x, y), удовлетворяющей исходному неравенству, справедливо $y > -1$.

Стало быть, искомое множество состоит ровно из одной точки $(1/2, -1)$.

Ответ: $(x, y) = (1/2, -1)$

7. Сфера касается всех рёбер тетраэдра $ABCD$. Известно, что произведения длин скрещивающихся рёбер равны. Известно также, что $AB = 3$, $BC = 1$. Найдите AC.

Решение: Расстояния от вершины A до точек касания сферы с рёбрами AB, AC, AD равны. Обозначим это расстояние a. Соответствующие расстояния от вершин B, C, D обозначим b, c, d соответственно. Тогда $(a + b)(c + d) = (a + c)(b + d) = (a + d)(b + c)$, откуда

$$(a - c)(b - d) = 0 \qquad \text{и} \qquad (a - b)(c - d) = 0.$$

Если $a = c$, то $AB = BC$, а это не так. Значит, $b = d$. Тогда либо $a = b$, либо $c = b$. Если $a = b$, то $AC = BC = 1$, что противоречит неравенству треугольника. Значит, $c = b$ и, стало быть, $AC = AB = 3$.

Ответ: 3

Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

июль–август 2021 года

ВАРИАНТ 216

ОТВЕТЫ

1. 2

2. 60%

3. $x = \pi/6 + 2k\pi,\ 5\pi/6 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

4. $x \in (3, 4) \cup [7, +\infty)$

5. 30°

6. $x = y = \pm 1/\sqrt{2}$

7. $\sqrt{5}$

РЕШЕНИЯ

1. Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением $\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} \cdot \sin\frac{\pi}{4} - \sqrt{2}\right)^4 - \frac{1}{4}$.

Решение: $\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} \cdot \sin\frac{\pi}{4} - \sqrt{2}\right)^4 - \frac{1}{4} = \left(\frac{4+2\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}\right)^4 - \frac{1}{4} = \frac{9}{4} - \frac{1}{4} = 2$

Ответ: 2

2. Футболист Федот сыграл в трёх матчах на чемпионате. Премиальная выплата Федота за второй матч в связи с отличной игрой была на n процентов больше, чем за первый. В третьем же матче Федот не сумел показать хорошую игру и его премия за этот матч оказалась на n процентов меньше, чем за второй матч. Найдите n, если известно, что премия за третий матч составила 64% от премии за первый матч.

Решение: Положим $x = n/100$. Тогда $(1+x)(1-x) = 0,64$. Отсюда $x^2 = 0,36$, то есть $x = 0,6$. Стало быть, $n = 60$.

Ответ: 60%

3. Решите уравнение $\operatorname{ctg} x - 2\operatorname{ctg} 2x = \dfrac{2}{3}\cos x$.

Решение:

$$\operatorname{ctg} x - 2\operatorname{ctg} 2x = \frac{2}{3}\cos x \iff \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos 2x}{\sin x \cos x} = \frac{2}{3}\cos x \iff \frac{\sin^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{2}{3}\cos x \iff$$

$$\begin{cases} 3\sin x = 2\cos^2 x \\ \sin 2x \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0 \\ \sin 2x \neq 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} (2\sin x - 1)(\sin x + 2) = 0 \\ \sin 2x \neq 0 \end{cases} \iff \sin x = \frac{1}{2} \iff x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = \pi/6 + 2k\pi,\ 5\pi/6 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

4. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x-1}} \dfrac{x^2 - 7x + 12}{x - 5} \leqslant 2$.

Решение:

$$\log_{\sqrt{x-1}} \frac{x^2 - 7x + 12}{x - 5} \leqslant 2 \iff \frac{\ln\left(\dfrac{x^2 - 7x + 12}{x - 5}\right) - \ln(x-1)}{\ln(x-1)} \leqslant 0 \iff$$

$$\begin{cases} \dfrac{(x^2 - 7x + 12) - (x-5)(x-1)}{(x-5)(x-2)} \leqslant 0 \\ x > 1 \\ \dfrac{x^2 - 7x + 12}{x - 5} > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{x - 7}{(x-5)(x-2)} \geqslant 0 \\ x > 1 \\ \dfrac{(x-3)(x-4)}{x-5} > 0 \end{cases} \iff x \in (3, 4) \cup [7, +\infty)$$

Ответ: $x \in (3, 4) \cup [7, +\infty)$

5. Окружность Ω_1 с центром O_1 пересекает окружность Ω_2 с центром O_2 в точках A и B. При этом точки O_1 и O_2 лежат вне Ω_2 и Ω_1 соответственно. Касательная к окружности Ω_2 в точке A пересекает Ω_1 в точках A и C. Касательная к окружности Ω_1 в точке A пересекает Ω_2 в точках A и D. Найдите угол между прямыми O_1C и O_2D, если известно, что $\angle AO_1B = 36^\circ$ и $\angle AO_2B = 64^\circ$.

Решение: Заметим, что $\angle BAD = \frac{1}{2}\angle AO_1B = 18^\circ$ и, аналогично, $\angle BAC = \frac{1}{2}\angle AO_2B = 32^\circ$. Далее, $\angle DAO_2 = 90^\circ - (\angle BAD + \angle BAC) = 40^\circ$ и $\angle CAO_1 = 90^\circ - (\angle BAD + \angle BAC) = 40^\circ$. Поскольку треугольники CAO_1 и DAO_2 равнобедренные, $\angle ACO_1 = \angle CAO_1 = 40^\circ$ и $\angle ADO_2 = \angle DAO_2 = 40^\circ$. Поскольку $\angle ACO_1 > \angle BAC$, точка пересечения прямой O_1C с прямой AB лежит за точкой B. Аналогично, поскольку $\angle ADO_2 > \angle BAD$, точка пересечения прямой O_2D с прямой AB лежит за точкой B. Стало быть, искомый угол равен $\angle ACO_1 - (\angle BAD + \angle BAC) + \angle ADO_2 = 40^\circ - 50^\circ + 40^\circ = 30^\circ$.

Ответ: 30°

6. Найдите все пары действительных чисел (x, y), удовлетворяющих равенству

$$\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(1 + \log_2\left(x^2 + y^2\right)\right) = 1 + \log_2(xy).$$

Решение: Арксинус определён на отрезке $[-1, 1]$ и принимает значения на отрезке $[-\pi/2, \pi/2]$. Значит, левая часть исходного равенства принимает лишь неотрицательные значения, а x, y должны удовлетворять неравенству $\log_2\left(x^2+y^2\right) \leqslant 0$. Но тогда для правой части имеем

$$1+\log_2(xy)=\log_2(2xy) \leqslant \log_2\left(x^2+y^2\right) \leqslant 0,$$

причём первое неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда $x=y$, а второе — когда $x^2+y^2=1$. Получаем $x=y=\pm 1/\sqrt{2}$. Остаётся убедиться, что при таких значениях x, y обе части исходного равенства обращаются в 0.

Ответ: $x=y=\pm 1/\sqrt{2}$

7. Дан параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$ с основаниями $ABCD$, $A'B'C'D'$ и боковыми рёбрами AA', BB', CC', DD'. Все рёбра параллелепипеда равны. Плоские углы при вершине B также равны. Известно, что центр сферы, описанной около тетраэдра $AB'CD'$, лежит в плоскости $AB'C$. Радиус этой сферы равен 2. Найдите длину ребра параллелепипеда.

Решение: Грани параллелепипеда являются ромбами. Поскольку плоские углы при вершине B равны, равны также и плоские углы при вершине D'. Стало быть, $AD'=B'D'=CD'$ как равные диагонали ромбов и, по той же причине, $AB'=B'C=AC$. Таким образом, центр сферы, описанной около тетраэдра $AB'CD'$, является центром окружности, описанной около правильного треугольника $AB'C$, а также является основанием высоты тетраэдра, опущенной из вершины D'. Отсюда получаем $AB'=2\sqrt{3}$, $AD'=2\sqrt{2}$. Итак, диагонали ромба равны $2\sqrt{3}$ и $2\sqrt{2}$, значит, его сторона равна $\sqrt{5}$.

Ответ: $\sqrt{5}$