Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

июль–август 2021 года

ВАРИАНТ 213

1. Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением $\left(\dfrac{3\sin\frac{\pi}{2}}{\log_2 16} - \sqrt{\dfrac{4}{9}}\right)^{-1}$.

2. Автовладелец Авдей продал автосалону свой автомобиль за 60% его первоначальной стоимости. Автосалон выставил на продажу этот автомобиль за цену, на 20% большую уплаченной Авдею. Какова доля получившейся цены по отношению к первоначальной?

3. Решите уравнение $2 \cdot \dfrac{\sin 3x - \sin x}{\cos 3x + \cos x} = \sqrt{3} \cdot \left(1 - \operatorname{tg}^2 x\right)$.

4. Решите неравенство $\log_{x-1}(x+1) - \log_{\sqrt{x+1}}(x-1) \geqslant 1$.

5. В четырёхугольник $ABCD$ площади 2 вписана окружность, касающаяся сторон AB и CD в точках K и L соответственно. Отрезок KL пересекает диагональ AC в точке M. Найдите BD, если известно, что $AM = MC = 1$.

6. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство

$$\sin^6 x + \cos^6 x + a \cdot \sin 2x \geqslant a^2$$

выполняется для всех действительных x.

7. Вписанная в треугольную пирамиду $ABCD$ сфера касается граней BCD, ACD, ABD и ABC в точках A_1, B_1, C_1 и D_1 соответственно. Известно, что D_1 является точкой пересечения высот треугольника ABC, что плоскости ABC и $A_1B_1C_1$ параллельны и что радиус окружности, описанной около треугольника ABC в четыре раза больше радиуса окружности, описанной около треугольника $A_1B_1C_1$. Найдите отношение, в котором сфера делит отрезок DD_1, считая от вершины D.

Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

июль–август 2021 года

ВАРИАНТ 214

1. Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением $\left(\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}-\dfrac{2\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}\right)^2$.

2. Бобёр доплывает от своей норы вниз по реке до осиновой рощи за три минуты. Подкрепившись, он плывёт обратно к своей норе, на что у него уходит четыре минуты. Во сколько раз собственная скорость бобра превышает скорость течения? (Собственную скорость бобра считать постоянной).

3. Решите уравнение $\cos 4x + \cos 2x + \operatorname{ctg}^2 x = 0$.

4. Решите неравенство $\log_2 x + \log_3 x \leqslant \log_2 3 \cdot \log_x 6$.

5. На сторонах AB и AC треугольника ABC отмечены точки K и L соответственно. Известно, что $AB = BC = 1$, что площади треугольников AKC и BCL равны и что около четырёхугольника $AKML$, где M — точка пересечения отрезков BL и CK, можно описать окружность. Найдите все возможные значения AC.

6. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\left(\sqrt{3+2x-x^2}-\sqrt{3-2x-x^2}\right)\left(\sqrt{a-x^2}-\sqrt{3-2x-x^2}\right)\left(\sqrt{a-x^2}-\sqrt{3+2x-x^2}\right)=0$$

имеет ровно одно решение.

7. Дан тетраэдр $ABCD$. Известно, что центр сферы, описанной около этого тетраэдра, лежит на AB, что плоскости ABC и ABD перпендикулярны и что $AD = DC = CB$. Найдите угол между прямыми AD и CB.

Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

ВАРИАНТ 215

1. Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением $\dfrac{27^{1/3}}{25^{1/2}} + \dfrac{\log_5 25}{3\sqrt{2}\cdot\cos\frac{\pi}{4}} + \dfrac{41}{15}$.

2. Любитель коктейлей Игнат смешал 300 мл морковного сока с 200 мл сливок. Тщательно перемешав полученную смесь, Игнат попробовал её на вкус и решил, что сливок оказалось слишком много. Игнат налил в полулитровый графин 200 мл морковного сока, а оставшиеся 300 мл заполнил приготовленной смесью. Каково процентное содержание сливок в полученном напитке?

3. Решите уравнение $4\sin 2x\cos 3x - 2\sin 5x = \operatorname{tg} 2x$.

4. Решите неравенство $\log_{x-1}\left(4^{\log_3 x} - 6x^{\log_3 2} + 10\right) \leqslant 0$.

5. Дана равнобокая трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD. Известно, что окружности, вписанные в треугольники ABC и ACD, касаются диагонали AC в одной и той же точке. При этом точка касания первой окружности со стороной BC делит эту сторону пополам. Найдите отношение, в котором точка касания второй окружности со стороной AD делит эту сторону, считая от точки A.

6. Найдите все пары действительных чисел (x, y) с наименьшим возможным значением y, удовлетворяющие неравенству

$$\log_{x^2-y}\left(x - y^2 + \frac{7}{4}\right) \geqslant 1.$$

7. Сфера касается всех рёбер тетраэдра $ABCD$. Известно, что произведения длин скрещивающихся рёбер равны. Известно также, что $AB = 3$, $BC = 1$. Найдите AC.

Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

ВАРИАНТ 216

1. Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением $\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\cdot\sin\frac{\pi}{4}-\sqrt{2}\right)^4-\frac{1}{4}$.

2. Футболист Федот сыграл в трёх матчах на чемпионате. Премиальная выплата Федота за второй матч в связи с отличной игрой была на n процентов больше, чем за первый. В третьем же матче Федот не сумел показать хорошую игру и его премия за этот матч оказалась на n процентов меньше, чем за второй матч. Найдите n, если известно, что премия за третий матч составила 64% от премии за первый матч.

3. Решите уравнение $\operatorname{ctg} x-2\operatorname{ctg} 2x=\frac{2}{3}\cos x$.

4. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x-1}}\frac{x^2-7x+12}{x-5}\leqslant 2$.

5. Окружность Ω_1 с центром O_1 пересекает окружность Ω_2 с центром O_2 в точках A и B. При этом точки O_1 и O_2 лежат вне Ω_2 и Ω_1 соответственно. Касательная к окружности Ω_2 в точке A пересекает Ω_1 в точках A и C. Касательная к окружности Ω_1 в точке A пересекает Ω_2 в точках A и D. Найдите угол между прямыми O_1C и O_2D, если известно, что $\angle AO_1B=36^\circ$ и $\angle AO_2B=64^\circ$.

6. Найдите все пары действительных чисел (x,y), удовлетворяющих равенству

$$\frac{\pi}{2}-\arcsin\left(1+\log_2\left(x^2+y^2\right)\right)=1+\log_2(xy).$$

7. Дан параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$ с основаниями $ABCD$, $A'B'C'D'$ и боковыми рёбрами AA', BB', CC', DD'. Все рёбра параллелепипеда равны. Плоские углы при вершине B также равны. Известно, что центр сферы, описанной около тетраэдра $AB'CD'$, лежит в плоскости $AB'C$. Радиус этой сферы равен 2. Найдите длину ребра параллелепипеда.