Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

июль–август 2023 года

ВАРИАНТ 231

ОТВЕТЫ

1. 22

2. 64

3. $x \in \left(0, \frac{1}{9}\right) \cup \left(9, +\infty\right)$

4. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ (-1)^k\frac{\pi}{6} + (k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

5. 0°

6. 1

7. $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$

РЕШЕНИЯ

1. Найдите наименьшее целое число, превосходящее $\dfrac{\sqrt{8}}{\frac{\sqrt{2}}{20} + \frac{\sqrt{2}}{23}}$.

Решение: $\dfrac{\sqrt{8}}{\frac{\sqrt{2}}{20} + \frac{\sqrt{2}}{23}} = \dfrac{2 \cdot 20 \cdot 23}{20 + 23} = \dfrac{920}{43} = 20 + \dfrac{60}{43} = 22 - \dfrac{26}{43}$.

Ответ: 22

2. Дана последовательность $a_0, a_1, a_2, \ldots$ действительных чисел. Найдите a_8, если известно, что $a_1 = 1$ и что для любой пары индексов n, m, таких что $n \geqslant m \geqslant 0$, справедливо равенство $a_{n+m} + a_{n-m} = 2(a_n + a_m)$.

Решение: При $m = 0$ имеем $a_n + a_n = 2(a_n + a_0)$, откуда следует, что $a_0 = 0$. Далее, при $m = n$ имеем $a_{2n} + a_0 = 2(a_n + a_n)$, откуда следует, что $a_{2n} = 4a_n$ для любого $n \geqslant 0$. Стало быть, $a_8 = 4^3 a_1 = 64$.

Ответ: 64

3. Решите неравенство

$$x^{\log_3 \sqrt{x}} > 9.$$

Решение:

$$x^{\log_3 \sqrt{x}} > 9 \iff 3^{\frac{1}{2}\log_3^2 x} > 3^2 \iff |\log_3 x| > 2 \iff x \in \left(0, \tfrac{1}{9}\right) \cup \left(9, +\infty\right).$$

Ответ: $x \in \left(0, \frac{1}{9}\right) \cup \left(9, +\infty\right)$

4. Решите уравнение

$$\cos 3x + 2\sin 2x + 2\cos x = 0.$$

Решение:

$$\cos 3x + 2\sin 2x + 2\cos x = 0 \iff \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x + 4\sin x \cos x + 2\cos x = 0 \iff$$
$$\iff \cos x(\cos 2x - 2\sin^2 x + 4\sin x + 2) = 0 \iff \cos x(3 - 4\sin^2 x + 4\sin x) = 0 \iff$$
$$\iff \cos x(\sin^2 x - \sin x - \tfrac{3}{4}) = 0 \iff \cos x(\sin x + \tfrac{1}{2})(\sin x - \tfrac{3}{2}) = 0 \iff$$
$$\iff \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = (-1)^k\frac{\pi}{6} + (k+1)\pi \end{array}\right., \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ (-1)^k\frac{\pi}{6} + (k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

5. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AF, BD и CE. Найдите все возможные значения разности углов $\angle A$ и $\angle B$ треугольника, если известно, что $DE : EF = BC : AC$.

Решение: По теореме синусов для треугольника CDE имеем

$$\frac{DE}{\sin\angle DCE} = \frac{DC}{\sin\angle DEC}.$$

Далее, поскольку четырёхугольник $BCDE$ вписанный, имеем $\angle DEC = \angle DBC$. Стало быть,

$$\frac{DE}{\sin\angle DCE} = \frac{DC}{\sin\angle DBC} = BC.$$

Последнее равенство справедливо, поскольку треугольник DBC прямоугольный. Из прямоугольного же треугольника ACE видим, что $\sin\angle DCE = \cos\angle A$. Получаем

$$DE = BC\sin\angle DCE = BC\cos\angle A.$$

Аналогично, $EF = AC\cos\angle B$. Стало быть,

$$\frac{\cos\angle A}{\cos\angle B} = \frac{DE\cdot AC}{BC\cdot EF} = 1.$$

Таким образом, $\cos\angle A = \cos\angle B$, откуда $\angle A = \angle B$. То есть $\angle A - \angle B = 0°$.

Ответ: $0°$

6. Положительные числа a, b, c удовлетворяют соотношению

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = 1.$$

Найдите наибольшее возможное значение выражения $\dfrac{a}{2+a^2}+\dfrac{b}{2+b^2}+\dfrac{c}{2+c^2}$.

Решение: Положим $x=\dfrac{1}{1+a}$, $y=\dfrac{1}{1+b}$, $z=\dfrac{1}{1+c}$. Тогда $x+y+z=1$, $a=\dfrac{1-x}{x}$, $b=\dfrac{1-y}{y}$, $c=\dfrac{1-z}{z}$. Далее,

$$\frac{a}{2+a^2}=\frac{\frac{1-x}{x}}{2+\frac{(1-x)^2}{x^2}}=\frac{x-x^2}{3x^2-2x+1}=$$
$$=-\frac{1}{3}+\frac{\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}}{3x^2-2x+1}=-\frac{1}{3}+\frac{\frac{1}{3}(x+1)}{3(x-\frac{1}{3})^2+\frac{2}{3}}\leqslant-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}(x+1).$$

Причём равенство достигается тогда и только тогда, когда $x=\frac{1}{3}$. Учитывая же, что $x+y+z=1$, получаем

$$\frac{a}{2+a^2}+\frac{b}{2+b^2}+\frac{c}{2+c^2}\leqslant-1+\frac{1}{2}(x+y+z+3)=-1+2=1.$$

И равенство достигается тогда и только тогда, когда $x=y=z=\frac{1}{3}$, то есть когда $a=b=c=2$.

Ответ: 1

7. В правильной треугольной пирамиде $ABCS$ проведено сечение через ребро основания AB перпендикулярно боковому ребру CS. Найдите его площадь, если известно, что площадь основания пирамиды равна 3, а площадь каждой боковой грани равна $\sqrt{5}$.

Решение: Обозначим точку пересечения сечения и ребра CS через D. Середину ребра AB обозначим через M. Поскольку плоскость SCM перпендикулярна AB, отрезки CM, DM и SM суть высоты треугольников ABC, ABD и ABS соответственно. Причём относятся эти высоты друг ко другу в точности, как площади этих треугольников. Рассмотрим треугольник SCM. Высота SH этого треугольника совпадает с высотой пирамиды, а H — с центром треугольника ABC. Следовательно, $MH:HC=1:2$. Положим $x=MH$. Тогда $CM=3x$, $SM=\frac{\sqrt{5}}{3}\cdot 3x=\sqrt{5}x$, $SH=2x$, $SC=2\sqrt{2}x$. Площадь треугольника SCM, стало быть, равна $\frac{3\cdot 2}{2}x^2=3x^2$ и, значит, $DM=\frac{6x^2}{2\sqrt{2}x}=\frac{3}{\sqrt{2}}x$, поскольку DM — высота треугольника SCM. Отсюда получаем, что искомая площадь равна

$$3\cdot\frac{\frac{3}{\sqrt{2}}x}{3x}=\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Ответ: $\frac{3}{\sqrt{2}}$

Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

июль–август 2023 года

ВАРИАНТ 233

ОТВЕТЫ

1. 5

2. 2068

3. $x \in (-3, 0] \cup (2, 3)$

4. $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$

5. 1

6. 1

7. $\frac{\sqrt{1+\sqrt{5}}}{6}$

РЕШЕНИЯ

1. Найдите целое число, задающееся выражением $\dfrac{3}{\sqrt[4]{16}} + \dfrac{5}{\sqrt[3]{27}} + \dfrac{11}{\sqrt{36}}$.

Решение: $\frac{3}{\sqrt[4]{16}} + \frac{5}{\sqrt[3]{27}} + \frac{11}{\sqrt{36}} = \frac{3}{2} + \frac{5}{3} + \frac{11}{6} = \frac{9+10+11}{6} = \frac{30}{6} = 5$.

Ответ: 5

2. Последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots$ получается из последовательности натуральных чисел вычёркиванием всех полных квадратов (то есть $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$, $a_4 = 6$, $a_5 = 7$, $a_6 = 8$, $a_7 = 10$ и т.д.). Найдите a_{2023}.

Решение: Для каждых натуральных n, m, таких что $m^2 < n < (m+1)^2$, справедливо $n = a_{n-m}$. Стало быть, для каждого n, удовлетворяющего условию $45^2 = 2025 < n < 2116 = 46^2$, справедливо $n = a_{n-45}$. Поскольку $n - 45 = 2023$ при $n = 2068$, получаем $a_{2023} = 2068$.

Ответ: 2068

3. Решите неравенство

$$\log_{\sqrt{3-x}}(3+x) \leqslant 2.$$

Решение:

$$\log_{\sqrt{3-x}}(3+x) \leqslant 2 \iff \log_{3-x}(3+x) \leqslant 1 \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3-x>1 \\ 0<3+x\leqslant 3-x \end{cases} \\ \begin{cases} 0<3-x<1 \\ 3+x\geqslant 3-x \end{cases} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<2 \\ x>-3 \\ x\leqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x<3 \\ x>2 \\ x\geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right. \iff x \in (-3, 0] \cup (2, 3).$$

Ответ: $x \in (-3, 0] \cup (2, 3)$

4. Решите уравнение

$$\cos^4 x - \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right).$$

Решение:

$$\cos^4 x - \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right) \iff$$

$$\iff \cos^4 x - \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\cos\left(\frac{2\pi}{3}-x\right) \iff$$

$$\iff \cos^4 x - \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = -2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right) \iff$$

$$\iff \cos^4 x + \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = 0 \iff \cos^4 x + \frac{1}{2}\left(\cos 2x + \cos\frac{2\pi}{3}\right) = 0 \iff$$

$$\iff \cos^4 x + \cos^2 x - \frac{3}{4} = 0 \iff \left(\cos^2 x - \frac{1}{2}\right)\left(\cos^2 x + \frac{3}{2}\right) = 0 \iff$$

$$\iff \cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \iff x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$

5. Прямая ℓ касается окружности, описанной около треугольника ABC, в точке A. Известно, что $AB > AC$ и что $AC = 1$. На стороне AB отмечена точка D так, что $AD = AC$. Прямая, проходящая через точку D и через центр окружности, вписанной в треугольник ABC, пересекает прямую ℓ в точке E. Найдите длину отрезка AE.

Решение: Пусть I — центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Поскольку $AD = AC$, точка I лежит и на биссектрисе, и на высоте треугольника ADC. Следовательно, $\angle ADI = \angle ACI = \frac{1}{2}\angle ACB$. Далее, поскольку ℓ — касательная, $\angle EAC = \angle ABC$. Отсюда следует, что $\angle AED + \angle ADE = 180^\circ - \angle DAE = 180^\circ - (\angle DAC + \angle EAC) = 180^\circ - (\angle BAC + \angle ABC) = \angle ACB = 2\angle ACI = 2\angle ADE$. Стало быть, $\angle AED = \angle ADE$, то есть треугольник AED равнобедренный и $AE = AD = AC = 1$.

Ответ: 1

6. Положительные числа a, b, c удовлетворяют соотношению

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

Найдите наибольшее возможное значение выражения $ab + bc\sqrt{3}$.

Решение: В силу неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим

$$ab + bc\sqrt{3} = \sqrt{a^2b^2} + \sqrt{3b^2c^2} = 2 \cdot \sqrt{a^2 \cdot \frac{1}{4}b^2} + 2 \cdot \sqrt{\frac{3}{4}b^2 \cdot c^2} \leqslant$$
$$\leqslant \left(a^2 + \frac{1}{4}b^2\right) + \left(\frac{3}{4}b^2 + c^2\right) = a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

При этом равенство достигается при $a^2 = \frac{1}{4}b^2$ и $\frac{3}{4}b^2 = c^2$, то есть при $a = \frac{1}{2}b$ и $c = \frac{\sqrt{3}}{2}b$. При выполнении этих равенств имеем $1 = a^2 + b^2 + c^2 = 2b^2$, откуда $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $a = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, $c = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ и $ab + bc\sqrt{3} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$.

Ответ: 1

7. Найдите объём правильной четырёхугольной пирамиды со стороной основания равной 1, если известно, что плоские углы при вершине равны углам наклона боковых рёбер к плоскости основания.

Решение: Обозначим через S вершину пирамиды и через H центр основания. Пусть AB — одно из рёбер основания и M — его середина. По условию $\angle ASB = \angle SAH$. Обозначим этот угол φ. Тогда

$$\angle SAM = \frac{\pi}{2} - \angle ASM = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\angle ASB = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\varphi.$$

С другой стороны,

$$\cos\angle SAM = \frac{AM}{AS} = \frac{AM}{AH} \cdot \frac{AH}{AS} = \cos\angle HAM \cdot \cos\angle SAH = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\varphi.$$

Получаем $\cos\varphi = \sqrt{2}\sin\frac{\varphi}{2}$, т.е.

$$2\sin^2\frac{\varphi}{2} + \sqrt{2}\sin\frac{\varphi}{2} - 1 = 0.$$

Отсюда $\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{10}}{4}$ (ибо $\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{10}}{4} < -1$), $\cos\varphi = \sqrt{2}\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $\sin\varphi = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$ (берём положительный, ибо $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$), $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{5}-1}} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$.

Стало быть, объём пирамиды равен

$$\frac{1}{3}AB^2SH = \frac{1}{3}AB^2AH\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{3\sqrt{2}}AB^3\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{3\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} = \frac{\sqrt{1+\sqrt{5}}}{6}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{1+\sqrt{5}}}{6}$

Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

июль–август 2023 года

ВАРИАНТ 234

ОТВЕТЫ

1. $\dfrac{47}{15}$

2. 7

3. $x \in (0, 1/9] \cup [3, +\infty)$

4. $x = \dfrac{\pi}{9} + \dfrac{2k\pi}{3},\ \ \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$

5. $1 : 1$

6. $6\sqrt{2} - 9$

7. $\sqrt{6}$

РЕШЕНИЯ

1. Найдите $f\left(\dfrac{3}{5}\right)$, если $f(x) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{\dfrac{8}{3} + \dfrac{1}{x^2}}$.

Решение: $f\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{4}{5} + \frac{7}{3} = \frac{12+35}{15} = \frac{47}{15}$.

Ответ: $\frac{47}{15}$

2. Дана последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots$ действительных чисел. Найдите a_1, если известно, что $a_8 = 8$ и что для любого индекса n справедливо равенство

$$a_{n+1} = \sqrt[7]{2}\, a_n + \left(\sqrt[7]{2} - 1\right)n - 1.$$

Решение: Перепишем равенство как $a_{n+1} + (n+1) = \sqrt[7]{2}(a_n + n)$. Отсюда следует, что $a_{n+1} + (n+1) = \left(\sqrt[7]{2}\right)^n(a_1 + 1)$. При $n = 7$ получаем $a_8 + 8 = 2(a_1 + 1)$. Стало быть, $a_1 = (8+8)/2 - 1 = 7$.

Ответ: 7

3. Решите неравенство

$$\left(\sqrt{x}\right)^{3+\log_3 x} \geqslant 3^{1+\log_3 x}.$$

Решение:

$$\left(\sqrt{x}\right)^{3+\log_3 x} \geqslant 3^{1+\log_3 x} \iff \log_3 x(3+\log_3 x) \geqslant 2(1+\log_3 x) \iff$$

$$\iff \log_3^2 x + \log_3 x - 2 \geqslant 0 \iff \left[\begin{array}{l} \log_3 x \geqslant 1 \\ \log_3 x \leqslant -2 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x \geqslant 3 \\ 0 < x \leqslant \frac{1}{9} \end{array}\right..$$

Ответ: $x \in (0, 1/9] \cup [3, +\infty)$

4. Решите уравнение

$$\frac{\sqrt{3}}{\sin x} - \frac{1}{\cos x} = 4.$$

Решение:

$$\frac{\sqrt{3}}{\sin x} - \frac{1}{\cos x} = 4 \iff \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x - \sin 2x}{\sin x \cos x} = 0 \iff \frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)}{\sin x \cos x} = 0 \iff$$

$$\iff \begin{cases} x + \frac{\pi}{6} = \pm\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \\ x \neq \frac{n\pi}{2}, \ n \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 3x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} - 2k\pi \end{array}\right., \ k \in \mathbb{Z} \\ x \neq \frac{n\pi}{2}, \ n \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{array}\right., \ k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = \dfrac{\pi}{9} + \dfrac{2k\pi}{3}, \ \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

5. На сторонах AB, BC, CD, AD вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ отмечены соответственно точки E, F, G, H. Известно, что $AE = EB$, $2BF = FC$, $CG = GD$, $DH = 2HA$ и что площадь четырёхугольника $ABCD$ в два раза больше площади четырёхугольника $EFGH$. Найдите отношение $AC : BD$.

Решение: Не ограничивая общности, будем считать, что площадь четырёхугольника $ABCD$ равна 1. Обозначим площади треугольников ABC, ACD, BCD, BDA через a, b, c, d соответственно. Тогда $a + b = c + d = 1$, а площади треугольников EBF, FCG, GDH, HAE равны соответственно $\frac{1}{6}a$, $\frac{1}{3}c$, $\frac{1}{3}b$, $\frac{1}{6}d$. Сумма же площадей этих треугольников равна $\frac{1}{2}$. Получаем

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{6}a + \frac{1}{3}c + \frac{1}{3}(1-a) + \frac{1}{6}(1-c) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}(c-a).$$

Таким образом, $a = c$, то есть площади треугольников ABC и BCD равны. Стало быть, $AD \parallel BC$, то есть четырёхугольник $ABCD$ является трапецией. Поскольку же он вписанный, эта трапеция равнобокая. Стало быть, диагонали её равны. То есть $AC : BD = 1 : 1$.

Ответ: $1 : 1$

6. Найдите наименьшее возможное значение выражения

$$\frac{c-b}{a+2b+c} + \frac{2b}{a+b+2c} - \frac{4c}{a+b+3c}$$

при положительных a, b, c.

Решение: Положим $x = a + 2b + c$, $y = a + b + 2c$, $z = a + b + 3c$. Тогда x, y, z также положительны, $c = z - y$, $b = x + z - 2y$, $c - b = y - x$ и исходное выражение переписывается как

$$\frac{c-b}{a+2b+c} + \frac{2b}{a+b+2c} - \frac{4c}{a+b+3c} = \frac{y-x}{x} + \frac{2x+2z-4y}{y} - \frac{4z-4y}{z} =$$
$$= -9 + \frac{y}{x} + 2\frac{x}{y} + 2\frac{z}{y} + 4\frac{y}{z}\,.$$

В силу неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим $\frac{y}{x} + 2\frac{x}{y} \geqslant 2\sqrt{2}$ и $2\frac{z}{y} + 4\frac{y}{z} \geqslant 4\sqrt{2}$. Причём равенства достигаются при $y = x\sqrt{2}$ и $z = y\sqrt{2}$, то есть при

$$\begin{cases} a + b + 2c = (a + 2b + c)\sqrt{2} \\ a + b + 3c = (a + b + 2c)\sqrt{2} \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения первое, получаем $c = (c - b)\sqrt{2}$, откуда $b\sqrt{2} = c(\sqrt{2} - 1)$, то есть $c = b(2 + \sqrt{2})$. Подставляя $c = b(2 + \sqrt{2})$ в любое из двух уравнений, получаем $a(\sqrt{2} - 1) = b(3 - 2\sqrt{2})$, то есть $a = b(\sqrt{2} - 1)$. Таким образом, например, при $a = \sqrt{2} - 1$, $b = 1$, $c = 2 + \sqrt{2}$ равенства $y = x\sqrt{2}$ и $z = y\sqrt{2}$ имеют место и, стало быть, исходное выражение достигает своего наименьшего значения $-9 + 2\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 6\sqrt{2} - 9$.

Ответ: $6\sqrt{2} - 9$

7. Расстояния от (внутренней) диагонали прямоугольного параллелепипеда до его рёбер, не имеющих с этой диагональю общих точек, равны $\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sqrt{\frac{6}{5}}$. Найдите объём этого параллелепипеда.

Решение: Обозначим вершины параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$ так, чтобы нижнее основание было $ABCD$, а боковые рёбра были AA', BB', CC', DD'. Пусть $AB = x$, $BB' = y$, $B'C' = z$. Рассмотрим диагональ AC'. Расстояние от AC' до ребра BB' достигается на отрезке, перпендикулярном AC' и BB'. Этот отрезок параллелен плоскости нижнего основания, а его ортогональная проекция на эту плоскость совпадает с высотой треугольника ABC, опущенной из вершины B. Обозначим эту высоту h. Тогда $h \cdot AC = AB \cdot BC$, то есть $h = xz/\sqrt{x^2 + z^2}$. Итак, расстояние от AC' до ребра BB' равно $xz/\sqrt{x^2 + z^2}$. Аналогично, два других расстояния, указанных в условии, равны $xy/\sqrt{x^2 + y^2}$ и $yz/\sqrt{y^2 + z^2}$. Не ограничивая общности, можно считать, что

$$xy/\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad xz/\sqrt{x^2 + z^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad yz/\sqrt{y^2 + z^2} = \sqrt{\frac{6}{5}},$$

откуда

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{3}{2}, \qquad \frac{1}{x^2} + \frac{1}{z^2} = \frac{4}{3}, \qquad \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = \frac{5}{6}.$$

Следовательно, $1/x^2 = 1$, $1/y^2 = 1/2$, $1/z^2 = 1/3$, то есть $x = 1$, $y = \sqrt{2}$, $z = \sqrt{3}$. Стало быть, объём параллелепипеда равен $xyz = \sqrt{6}$.

Ответ: $\sqrt{6}$

Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

июль–август 2023 года

ВАРИАНТ 235

ОТВЕТЫ

1. 11

2. 2022

3. $x \in \{0\} \cup [1;3]$

4. $x = \dfrac{3\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

5. 9

6. $k = 3$

7. $2\sqrt[4]{3}$

РЕШЕНИЯ

1. Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением $\dfrac{\dfrac{\sqrt{64}}{5}+\dfrac{\sqrt[3]{64}}{3}}{\dfrac{\sqrt{64}}{5}-\dfrac{\sqrt[3]{64}}{3}}$.

Решение: $\dfrac{\dfrac{\sqrt{64}}{5}+\dfrac{\sqrt[3]{64}}{3}}{\dfrac{\sqrt{64}}{5}-\dfrac{\sqrt[3]{64}}{3}} = \dfrac{\frac{8}{5}+\frac{4}{3}}{\frac{8}{5}-\frac{4}{3}} = \dfrac{24+20}{24-20} = \dfrac{44}{4} = 11.$

Ответ: 11

2. Последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots$ действительных чисел определяется равенствами

$$a_n = (1+\sqrt{n})\left(\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}\right).$$

Найдите a_{2023}.

Решение: Поскольку $a_n = (1+\sqrt{n})\left(\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}\right) = (1+\sqrt{n})\Big((\sqrt{2}-\sqrt{1}) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + \ldots + (\sqrt{n}-\sqrt{n-1})\Big) = (1+\sqrt{n})(\sqrt{n}-1) = n-1$, имеем $a_{2023} = 2022$.

Ответ: 2022

3. Решите неравенство

$$\left(3x^2-3x+1\right)^{x^2-3x} \leqslant 1.$$

Решение: Заметим, что $3x^2-3x+1$ положительно при всех вещественных x. Значит, исходное неравенство справедливо либо когда основание $\leqslant 1$, а степень $\geqslant 0$, либо когда основание $\geqslant 1$, а степень $\leqslant 0$. Следовательно, оно равносильно неравенству

$$(3x^2-3x)(x^2-3x) \leqslant 0.$$

Которое переписывается как

$$x^2(x-1)(x-3) \leqslant 0.$$

Стало быть, $x \in \{0\} \cup [1;3]$.

Ответ: $x \in \{0\} \cup [1;3]$

4. Решите уравнение

$$\cos^2 x + \sqrt{3}\sin^2 x = \left(1+\sqrt{3}\right)\left(\cos x - \cos x \sin x + \sin x\right).$$

Решение:

$$\cos^2 x + \sqrt{3}\sin^2 x = \left(1+\sqrt{3}\right)\left(\cos x - \cos x \sin x + \sin x\right) \iff$$
$$\iff \cos^2 x + \left(1+\sqrt{3}\right)\cos x \sin x + \sqrt{3}\sin^2 x = \left(1+\sqrt{3}\right)\left(\cos x + \sin x\right) \iff$$
$$\iff \left(\cos x + \sin x\right)\left(\cos x + \sqrt{3}\sin x\right) = \left(1+\sqrt{3}\right)\left(\cos x + \sin x\right) \iff$$
$$\iff \left(\cos x + \sin x\right)\left(\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) = 0 \iff$$
$$\iff \cos\left(x - \tfrac{\pi}{4}\right)\left(\cos\left(x - \tfrac{\pi}{3}\right) - \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) = 0 \iff$$
$$\iff \cos\left(x - \tfrac{\pi}{4}\right) = 0 \iff x - \tfrac{\pi}{4} = \tfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \iff x = \tfrac{3\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = \dfrac{3\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

5. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BD и CE. На DE как на диаметре построена окружность. Эта окружность пересекает отрезки AE и AD в точках F и G соответственно. Найдите длину отрезка FG, если известно, что $BC = 25$, $BD = 20$ и $BE = 7$.

Решение: Из прямоугольных треугольников BCD и BCE получаем $CD = \sqrt{25^2 - 20^2} = 15$ и $CE = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24$. Из подобия прямоугольных треугольников ABD и ACE получаем

$$\frac{AD}{AE} = \frac{BD}{CE} = \frac{20}{24} = \frac{5}{6} \quad \text{и} \quad \frac{AE+7}{AD+15} = \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CE} = \frac{5}{6}.$$

Из этих двух соотношений на AD и AE получаем $AD = 15$, $AE = 18$. Таким образом, $AD = DC$, откуда $ED = AD$, то есть треугольник AED равнобедренный. Поскольку же DE — диаметр окружности, $DF \perp AE$, то есть DF — высота и медиана треугольника AED. Стало быть, $AF = \frac{1}{2}AE = 9$. Наконец, отметим, что четырёхугольники $BCDE$ и $EDGF$ вписанные, откуда следует, что $\angle ABC = \angle ADE = \angle AFG$. Значит, $FG \parallel BC$, то есть треугольники ABC и AFG подобны. Но, как мы отметили выше, $AD = DC$. Отсюда следует, что $BC = AB$ и, стало быть, $FG = AF = 9$.

Ответ: 9

6. Найдите все значения параметра k, при которых неравенство

$$a^3 + b^3 + c^3 + 6 \geqslant k(a+b+c)$$

справедливо для всех действительных a, b, c, таких что $a \geqslant -2$, $b \geqslant -2$, $c \geqslant -2$.

Решение: При $a = b = c = -2$ имеем $-18 \geqslant -6k$, откуда $k \geqslant 3$. При $a = b = c = 1$ имеем $9 \geqslant 3k$, откуда $k \leqslant 3$. Стало быть, если удовлетворяющие требуемому условию k существуют, то $k = 3$.

Заметим теперь, что при $a \geqslant -2$ справедливо $a^3 + 2 \geqslant 3a$, ибо при таких a имеем $a^3 - 3a + 2 = (a+2)(a-1)^2 \geqslant 0$. Аналогично, при $b \geqslant -2$ и $c \geqslant -2$ справедливо $b^3 + 2 \geqslant 3b$ и $c^3 + 2 \geqslant 3c$. Стало быть, при $\min(a,b,c) \geqslant -2$ выполняется

$$a^3 + b^3 + c^3 + 6 \geqslant 3(a+b+c).$$

Таким образом, $k = 3$.

Ответ: $k = 3$

7. Плоские углы при вершине правильной четырёхугольной пирамиды равны $30°$. Найдите длину ребра основания пирамиды, если известно, что радиус сферы, вписанной в эту пирамиду, равен 1.

Решение: Пусть AB — одно из рёбер основания пирамиды, S — её вершина. Пусть SH — высота пирамиды, SE — высота боковой грани ABS. Положим $\alpha = \angle ASE (= \frac{1}{2}\angle ASB = 15°)$, $\beta = \angle ESH$, $x = HE (= AE = \frac{1}{2}AB)$. Из прямоугольных треугольников ASE и ESH видим, что

$$\sin\beta = \frac{HE}{SE} = \frac{AE}{SE} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2 - \sqrt{3}.$$

Центр O вписанной сферы лежит на SH. Основание F перпендикуляра, опущенного из O на грань ABS, лежит на SE, причём $OH = OF = r$, где r — радиус сферы (по условию $r = 1$). Из прямоугольных треугольников OSF и ESH видим, что $OS = r/\sin\beta$, $ES = x/\sin\beta$. Стало быть,

$$\left(r + \frac{r}{\sin\beta}\right)^2 + x^2 = \left(\frac{x}{\sin\beta}\right)^2,$$

откуда

$$x^2 = r^2 \cdot \frac{(1+\sin\beta)^2}{1-\sin^2\beta} = r^2 \cdot \frac{1+\sin\beta}{1-\sin\beta} = \frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3}.$$

Таким образом, $AB = 2x = 2\sqrt[4]{3}$.

Ответ: $2\sqrt[4]{3}$

Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

июль–август 2023 года

ВАРИАНТ 236

ОТВЕТЫ

1. $\frac{5}{6}$

2. $a = 1$, $b = 3$, $c = 9$, $d = 27$

3. $x \geqslant 2$

4. $x = k\pi,\ \ \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$

5. 15°

6. $\sqrt{3}$

7. $\dfrac{\sqrt{13}}{5\sqrt{5}}$

РЕШЕНИЯ

1. Найдите $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$, если $f(x) = \left(\sqrt{x+1} + \sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)\left(\sqrt{5x-1} - \sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$.

Решение: $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \left(\sqrt{\dfrac{3}{2}} + \sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}} - \sqrt{\dfrac{2}{3}}\right) = \dfrac{3}{2} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{5}{6}$.

Ответ: $\frac{5}{6}$

2. Найдите четыре числа a, b, c, d, если известно, что они образуют возрастающую геометрическую прогрессию, что $a + d = 28$ и что $b + c = 12$.

Решение: Обозначим через q знаменатель прогрессии. Тогда

$$\begin{cases} a + aq^3 = 28 \\ aq + aq^2 = 12 \end{cases}.$$

Вычтем из первого уравнения, домноженного на 3, второе, домноженное на 7. Получим $3a(1 + q^3) - 7aq(1 + q) = 0$, то есть $a(1 + q)(3q^2 - 10q + 3) = 0$. Поскольку $a \neq 0$ и $q \neq -1$ (иначе ни последовательность не будет возрастающей, ни одно из уравнений системы не будет иметь место), получаем $3q^2-10q+3=0$, то есть $(3q-1)(q-3)=0$. Учитывая ещё раз, что последовательность возрастает, получаем $q=3$. Подставляя $q=3$ в любое из двух уравнений, получаем $a=1$. Стало быть, $a=1$, $b=3$, $c=9$, $d=27$.

Ответ: $a=1$, $b=3$, $c=9$, $d=27$

3. Решите неравенство $\log_x \log_3\left(2^x-1\right) \geqslant 0$.

Решение:

$$\log_x \log_3\left(2^x-1\right) \geqslant 0 \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>1 \\ \log_3(2^x-1) \geqslant 1 \end{cases} \\ \begin{cases} 0<x<1 \\ 0<\log_3(2^x-1) \leqslant 1 \end{cases} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>1 \\ 2^x-1 \geqslant 3 \end{cases} \\ \begin{cases} 0<x<1 \\ 1<2^x-1 \leqslant 3 \end{cases} \end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} x \geqslant 2 \\ \begin{cases} 0<x<1 \\ 1<x \leqslant 2 \end{cases} \end{array}\right. \iff x \geqslant 2.$$

Ответ: $x \geqslant 2$

4. Решите уравнение $2\cos 2x + \frac{\cos x-\cos 3x}{\cos x+\cos 3x} = 2$.

Решение:

$$2\cos 2x + \frac{\cos x-\cos 3x}{\cos x+\cos 3x} = 2 \iff \frac{\cos x-\cos 3x}{\cos x+\cos 3x} - 4\sin^2 x = 0 \iff$$

$$\iff \frac{\sin x \sin 2x}{\cos x \cos 2x} - 4\sin^2 x = 0 \iff \frac{\sin^2 x \cos x(2-4\cos 2x)}{\cos x \cos 2x} = 0 \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \cos 2x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ 2x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \end{array}\right., \quad k \in \mathbb{Z} \iff \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi \end{array}\right., \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = k\pi, \quad \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

5. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. На его диагонали AC отмечена точка E, а на продолжении этой диагонали за точку C отмечена точка F таким образом, что $\angle ADE = \angle CBF$. Найдите угол $\angle CDF$, если известно, что $\angle ABE = 15°$.

Решение: Углы $\angle ADB$ и $\angle ACB$ равны как опирающиеся на одну дугу. При этом $\angle ADB = \angle ADE + \angle EDB$ и $\angle ACB = \angle CBF + \angle CFB$. Поскольку по условию $\angle ADE = \angle CBF$, получаем $\angle EDB = \angle CFB$. Отсюда следует, что четырёхугольник $BFDE$ вписанный. В частности, $\angle BEF = \angle BDF$. При этом $\angle BEF = \angle BAE + \angle ABE$ и $\angle BDF = \angle BDC + \angle CDF$. Поскольку углы $\angle BAE (= \angle BAC)$ и $\angle BDC$ равны как опирающиеся на одну дугу, получаем $\angle CDF = \angle ABE = 15°$.

Ответ: $15°$

6. Положительные числа a, b, c удовлетворяют соотношению

$$a\sqrt{bc} + b\sqrt{ca} + c\sqrt{ab} = 1.$$

Найдите наименьшее возможное значение выражения $a + b + c$.

Решение: В силу неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим

$$1 = a\sqrt{bc} + b\sqrt{ca} + c\sqrt{ab} \leqslant a \cdot \frac{b+c}{2} + b \cdot \frac{c+a}{2} + c \cdot \frac{a+b}{2} = ab + bc + ac.$$

При этом равенство достигается при $a = b = c$. С другой стороны,

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac) =$$
$$\frac{1}{2}\Big((a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (a^2 - 2ac + c^2)\Big) + 3(ab + bc + ac) \geqslant 3(ab + bc + ac).$$

При этом равенство, опять же, достигается при $a = b = c$. Таким образом,

$$a + b + c \geqslant \sqrt{3} \cdot \sqrt{ab + bc + ac} \geqslant \sqrt{3}$$

и равенство достигается при $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Остаётся убедиться, что при таких значениях a, b, c данное в условии соотношение также имеет место. Стало быть, наименьшее значение выражения $a + b + c$ равно $\sqrt{3}$.

Ответ: $\sqrt{3}$

7. Дан куб с ребром 1, нижним основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1. На ребрах A_1D_1, BB_1, CC_1, AD отмечены соответственно точки K, L, M, N, так что $A_1K = KD_1$, $BL : LB_1 = 7 : 1$, $CM : MC_1 = DN : NA = 4 : 3$. Найдите площадь сечения тетраэдра $KLMN$, параллельного ребрам KL и MN, имеющего форму ромба.

Решение: Пусть c — длина стороны ромба, α — его меньший угол. Тогда искомая площадь равна $c^2 \sin\alpha$, причем угол α равен углу между прямыми KL и MN.

Найдем c. Пусть сечение делит отрезок KN на отрезки длины x и y, считая от K. Из подобия треугольников получаем

$$c = \frac{x}{x+y} NM = \frac{y}{x+y} KL.$$

Отсюда $x = y \cdot \dfrac{KL}{NM}$, то есть $c = \dfrac{1}{\frac{1}{KL} + \frac{1}{NM}}$. По теореме Пифагора

$$KL = \sqrt{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{64}} = \frac{9}{8}, \quad NM = \sqrt{1 + \frac{16}{49} + \frac{16}{49}} = \frac{9}{7},$$

то есть $c = \frac{3}{5}$.

Найдем угол α — угол между KL и MN. Он равен углу между векторами $\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{8}\right)$ и $(-\frac{4}{7}, 1, -\frac{4}{7})$. Их скалярное произведение равно $1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8}\right) \cdot \frac{4}{7} = \frac{9}{14}$. Следовательно,

$$\cos\alpha = \frac{9}{14} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{7}{9} = \frac{4}{9}.$$

Соответственно,

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{65}}{9},$$

то есть искомая площадь равна

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{65}}{9} = \frac{\sqrt{13}}{5\sqrt{5}}.$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{13}}{5\sqrt{5}}$

Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

июль–август 2023 года

ВАРИАНТ 237

ОТВЕТЫ

1. 18

2. 127

3. $x \in (1, \sqrt{2}) \cup [4, +\infty)$

4. $x = (-1)^k \dfrac{\pi}{6} + (k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

5. $1/\sqrt{17}$

6. 1

7. $1 : 11$

РЕШЕНИЯ

1. Известно, что $x : y = 19 : 17$. Найдите $\dfrac{x+y}{x-y}$.

Решение: $\dfrac{x+y}{x-y} = \dfrac{\frac{x}{y}+1}{\frac{x}{y}-1} = \dfrac{\frac{19}{17}+1}{\frac{19}{17}-1} = \dfrac{19+17}{19-17} = 18.$

Ответ: 18

2. Возрастающая геометрическая прогрессия $a_1, a_2, a_3, \ldots$ удовлетворяет условиям $a_3 - a_1 = 3$, $a_7 - a_3 = 60$. Найдите сумму первых семи членов этой прогрессии.

Решение: Обозначим через q знаменатель прогрессии. Тогда

$$\begin{cases} a_1(q^2-1) = 3 \\ a_1(q^6-q^2) = 60 \end{cases}.$$

Второе уравнение равносильно $a_1q^2(q^2-1)(q^2+1) = 60$. Учитывая первое уравнение, получаем $q^4 + q^2 - 20 = 0$, то есть $(q^2+5)(q^2-4) = 0$, откуда $q^2 = 4$. Стало быть, $q = 2$, ибо $q = -2$ противоречит возрастанию прогрессии. Подставляя $q = 2$ в любое из двух уравнений, получаем

$a_1 = 1$. Стало быть, $a_n = 2^{n-1}$ для любого $n \geqslant 1$, то есть искомая сумма равна $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^6 = 2^7 - 1 = 127$.

Ответ: 127

3. Решите неравенство $\log_{x^2-1}(x-1) \geqslant \log_{x^2-1}\sqrt{\frac{x^2}{2}+1}$.

Решение:

$$\log_{x^2-1}(x-1) \geqslant \log_{x^2-1}\sqrt{\frac{x^2}{2}+1} \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2-1>1 \\ x-1 \geqslant \sqrt{\frac{x^2}{2}+1} \end{cases} \\ \begin{cases} 0<x^2-1<1 \\ 0<x-1 \leqslant \sqrt{\frac{x^2}{2}+1} \end{cases} \end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>\sqrt{2} \\ x^2-4x \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 1<x<\sqrt{2} \\ x^2-4x \leqslant 0 \end{cases} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x \geqslant 4 \\ 1<x<\sqrt{2} \end{array}\right. .$$

Ответ: $x \in (1, \sqrt{2}) \cup [4, +\infty)$

4. Решите уравнение $\dfrac{\operatorname{tg} 2x + 2\cos x}{\operatorname{tg} 2x - 2\cos x} = 0$.

Решение: Выражения $\operatorname{tg} 2x + 2\cos x$ и $\operatorname{tg} 2x - 2\cos x$ отличаются на $4\cos x$, стало быть, если они одновременно равны нулю, то $\cos x = 0$. Легко убедиться, что обратное тоже верно. Стало быть, множество решений исходного уравнения совпадает с множеством нулей выражения $\operatorname{tg} 2x + 2\cos x$, из которого исключены нули $\cos x$. Преобразуем это выражение:

$$\operatorname{tg} 2x + 2\cos x = \frac{2\cos x(\sin x + \cos 2x)}{\cos 2x} =$$
$$= \frac{-2\cos x(2\sin^2 x - \sin x - 1)}{\cos 2x} = \frac{-4\cos x(\sin x - 1)(\sin x + \frac{1}{2})}{\cos 2x}.$$

Если $\sin x = 1$, то $\cos x = 0$, стало быть, множество решений исходного уравнения совпадает с множеством нулей выражения $\sin x + \frac{1}{2}$, из которого исключены нули $\cos 2x$. Но $\sin x + \frac{1}{2}$ и $\cos 2x$ одновременно нулю не равны, поскольку если $\sin x = -\frac{1}{2}$, то $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = \frac{1}{2}$. Следовательно, исходное уравнение равносильно уравнению $\sin x = -\frac{1}{2}$. То есть $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + (k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = (-1)^k \dfrac{\pi}{6} + (k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

5. Вписанная в прямоугольный треугольник ABC окружность касается катетов AC и BC в точках D и F. Найдите $\sin\angle CBD$, если известно, что $\sin\angle CAF = 1/\sqrt{10}$.

Решение: Положим $CD = x$, $BF = y$, $AD = z$. Тогда $CF = x$, $BE = y$, $AE = z$, где E — точка касания окружности с гипотенузой. По теореме Пифагора $(x+y)^2 + (x+z)^2 = (y+z)^2$.

Раскрывая скобки и приводя подобные слагаемые, получаем $x^2 + xy + xz = yz$ или, что то же самое, $\frac{x}{y} \cdot \frac{x}{z} + \frac{x}{y} + \frac{x}{z} = 1$. Раскладывая на множители, получаем

$$\left(\frac{x}{y} + 1\right)\left(\frac{x}{z} + 1\right) = 2.$$

По условию $\sin\angle CAF = 1/\sqrt{10}$. Тогда $\cos\angle CAF = 3/\sqrt{10}$ и $\operatorname{tg}\angle CAF = 1/3$. Стало быть, $x/(x+z) = 1/3$, откуда $z = 2x$. Подставляя $\frac{x}{z} = \frac{1}{2}$ в полученное выше соотношение, получаем $y = 3x$. Тогда $\operatorname{tg}\angle CBD = 1/4$, откуда $\sin\angle CBD = 1/\sqrt{17}$.

Ответ: $1/\sqrt{17}$

6. Действительные числа a, b, c удовлетворяют соотношению

$$abc = (a-1)(b-1)(c-1).$$

Найдите наименьшее возможное значение выражения $a^2 + b^2 + c^2$.

Решение: Заметим, что данное в условии соотношение равносильно равенству

$$ab + bc + ac = a + b + c - 1.$$

Стало быть,

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ac) = \\ &= (a+b+c)^2 - 2(a+b+c-1) = (a+b+c-1)^2 + 1 \geqslant 1. \end{aligned}$$

При этом равенство достигается при $a + b + c = 1$, например, при $a = b = 0$ и $c = 1$. Нетрудно заметить, что при таких значениях a, b, c равенство, данное в условии, имеет место. Стало быть, наименьшее значение выражения $a^2 + b^2 + c^2$ равно 1.

Ответ: 1

7. Ребро основания правильной треугольной пирамиды равно $\sqrt{6}$, высота пирамиды равна $\sqrt{7}$. Плоскость π перпендикулярна одному из рёбер пирамиды и делит его в отношении $1:2$, считая от вершины. Найдите отношение, в котором плоскость π делит объём пирамиды.

Решение: Обозначим через A, B, C, S вершины пирамиды, так что ABC — ее основание, а плоскость π перпендикулярна ребру SA. Поскольку $\pi \perp SA$ и $BC \perp SA$, имеем $\pi \parallel BC$. Стало быть, π пересекает плоскость BCS по прямой, параллельной BC, и делит ребра SB и SC (или их продолжения) в одинаковом отношении. Найдем это отношение.

Обозначим через H основание высоты пирамиды и через M — середину ребра BC. Тогда

$$AM = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{2}, \quad AH = \frac{2}{3}AM = \sqrt{2}.$$

Пусть K — точка пересечения π и SA, L — точка пересечения π с прямой AM, N — точка пересечения прямых LK и SM. Тогда $AK = 2KS$, причем $\angle AKL = 90°$. Из подобия треугольников ALK и ASH получаем:

$$\frac{AH}{\sqrt{AH^2 + SH^2}} = \frac{\frac{2}{3}\sqrt{AH^2 + SH^2}}{AL},$$

откуда

$$AL = \frac{\frac{2}{3}(2+7)}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2} = 2AM.$$

Итак, M — середина AL. Обозначим через P середину AK. Тогда $LK \parallel MP$, откуда $SN = NM$, ибо $SK = KP$. Таким образом, плоскость π проходит через середины ребер SB и SC. Следовательно, π отсекает от пирамиды $ABCS$ пирамиду, объем которой равен $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$ объема пирамиды $ABCS$. То есть π делит объем исходной пирамиды в отношении $1:11$.

Ответ: $1:11$

Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

июль–август 2023 года

ВАРИАНТ 238

ОТВЕТЫ

1. $\dfrac{28}{3}$

2. 128

3. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

4. $x = \frac{1}{4}, \frac{1}{3}$

5. $8\sqrt{3}$

6. $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

7. $1 + \sqrt{2}$

РЕШЕНИЯ

1. Найдите $f\left(\dfrac{9}{4}\right)$, если известно, что $f(x) = \dfrac{2}{x-3} + \dfrac{3}{x-2}$.

Решение: $f\left(\dfrac{9}{4}\right) = \dfrac{8}{9-12} + \dfrac{12}{9-8} = 12 - \dfrac{8}{3} = \dfrac{28}{3}$.

Ответ: $\dfrac{28}{3}$

2. Чему равна сумма выражений $\sqrt{2023+t^2}$ и $\sqrt{999+t^2}$, если их разность равна 8?

Решение: Сумма равна $\sqrt{2023+t^2} + \sqrt{999+t^2} = \dfrac{(2023+t^2)-(999+t^2)}{\sqrt{2023+t^2}-\sqrt{999+t^2}} = \dfrac{1024}{8} = 128.$
Отметим, что тогда $\sqrt{2023+t^2} = (128+8)/2 = 68$, то есть, $t^2 = 68^2 - 2023 > 3600 - 2023 > 0$, стало быть, условие корректно.

Ответ: 128

3. Решите уравнение $\sqrt{3}\cos x - \sqrt{2}\cos 2x - \sqrt{3}\sin x = 0$.

Решение: Преобразуем уравнение к виду

$$\cos 2x = \sqrt{3}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

и сделает замену $t = x + \frac{\pi}{4}$. Получим

$$\sin 2t = \sqrt{3}\cos t,$$

что равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l}\cos t = 0\\ \sin t = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right. .$$

Стало быть, $x + \frac{\pi}{4} = t = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

4. Решите уравнение $\left|\log_3^2 x - \log_{2x}^2 2\right| = \log_3^2 x + \log_{2x}^2 2 - 2$.

Решение: Заметим, что

$$|A - B| = A + B \iff \left[\begin{array}{l}\begin{cases}A \geqslant 0\\ B = 0\end{cases}\\ \begin{cases}B \geqslant 0\\ A = 0\end{cases}\end{array}\right. .$$

Тогда

$$\left|\log_3^2 x - \log_{2x}^2 2\right| = \log_3^2 x + \log_{2x}^2 2 - 2 \iff \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\log_3^2 x - 1 \geqslant 0\\ \log_{2x}^2 2 - 1 = 0\end{cases}\\ \begin{cases}\log_{2x}^2 2 - 1 \geqslant 0\\ \log_3^2 x - 1 = 0\end{cases}\end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l}\begin{cases}|\log_3 x| \geqslant 1\\ 2x = 2, \frac{1}{2}\end{cases}\\ \begin{cases}|\log_{2x} 2| \geqslant 1\\ x = 3, \frac{1}{3}\end{cases}\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}x = \frac{1}{4}\\ x = \frac{1}{3}\end{array}\right.$$

Ответ: $x = \frac{1}{4}, \frac{1}{3}$

5. Из точки E пересечения диагоналей AC и BD вписанного четырёхугольника $ABCD$ опущены перпендикуляры EK, EL, EM, EN на его стороны AB, BC, CD, AD соответственно, причём основания перпендикуляров принадлежат соответствующим сторонам. Найдите площадь четырёхугольника $KLMN$, если известно, что $KL = 5$, $MN = 3$, а расстояние от точки E до прямой LM равно $\sqrt{3}$.

Решение: Поскольку $\angle AKE = \angle ANE = \pi/2$, четырёхугольник $AKEN$ вписанный и $\angle ENK = \angle EAK$ как опирающиеся на одну дугу. Аналогично, $\angle MNE = \angle MDE$. Но $\angle EAK = \angle CAB = \angle CDB = \angle MDE$, следовательно, NE — биссектриса угла MNK, то есть точка E равноудалена от NK и MN. Аналогично, точка E равноудалена от всех сторон четырёхугольника $KLMN$, то есть является центром вписанной в него окружности. Но раз $KLMN$ описанный, его периметр равен $2(KL + MN) = 16$. Радиус же вписанной окружности равен расстоянию от точки E до прямой LM, которое по условию равно $\sqrt{3}$, то есть площадь $KLMN$ равна $\frac{1}{2} \cdot 16 \cdot \sqrt{3} = 8\sqrt{3}$.

Ответ: $8\sqrt{3}$

6. Действительные числа a, b, c удовлетворяют неравенствам $0 < a < 1$, $0 < b < 1$, $0 < c < 1$. Найдите наибольшее возможное значение выражения

$$\sqrt[4]{a(1-b)} + \sqrt[4]{b(1-c)} + \sqrt[4]{c(1-a)}.$$

Решение: В силу неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим для любых положительных x_1, x_2, x_3, x_4 справедливо

$$\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4} = \frac{\frac{x_1+x_2}{2} + \frac{x_3+x_4}{2}}{2} \geqslant \frac{\sqrt{x_1x_2} + \sqrt{x_3x_4}}{2} \geqslant \sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4}.$$

Стало быть,

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{a(1-b)} &+ \sqrt[4]{b(1-c)} + \sqrt[4]{c(1-a)} = \\ &= \sqrt{2}\left(\sqrt[4]{a(1-b)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} + \sqrt[4]{b(1-c)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} + \sqrt[4]{c(1-a)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}\right) \leqslant \\ &\leqslant \sqrt{2}\left(\frac{a+(1-b)+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{4} + \frac{b+(1-c)+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{4} + \frac{c+(1-a)+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{4}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

Равенство же достигается при $a = b = c = 1/2$.

Ответ: $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

7. Пересечение плоскости и правильной треугольной пирамиды является квадратом со стороной 1. Найдите длину ребра основания пирамиды, если известно, что двугранный угол между плоскостью боковой грани и плоскостью основания равен $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Решение: Поскольку сечение — четырёхугольник, плоскость пересекает все грани. Обозначим вершины основания через A, B, C и вершину пирамиды через D. Тогда можно считать, что секущая плоскость пересекает рёбра AB, BD, DC, CA в точках K, L, M, N соответственно. Поскольку $KL \| MN$, прямая KL параллельна всей плоскости ADC. Стало быть, $MN \| KL \| AD$. Аналогично, $KN \| BC \| LM$.

Положим $a = AB$, $b = AD$. Тогда косинус двугранного угла при основании равен

$$\frac{\frac{a}{2\sqrt{3}}}{\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{3\left(4\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 1\right)}},$$

что по условию равно $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, откуда $\dfrac{b}{a} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Из того, что $KL \| AD$, $LM \| BC$ получаем:

$$\frac{1}{a} = \frac{LM}{BC} = \frac{DL}{DB} = \frac{DB - LB}{DB} = 1 - \frac{LB}{DB} = 1 - \frac{KL}{AD} = 1 - \frac{1}{b}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{a} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{a},$$

то есть $a = 1 + \sqrt{2}$.

Ответ: $1 + \sqrt{2}$