Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

*июль–август 2023 года*

ВАРИАНТ 231

**1.** Найдите наименьшее целое число, превосходящее $\dfrac{\sqrt{8}}{\dfrac{\sqrt{2}}{20}+\dfrac{\sqrt{2}}{23}}$.

**2.** Дана последовательность $a_0, a_1, a_2, \ldots$ действительных чисел. Найдите $a_8$, если известно, что $a_1 = 1$ и что для любой пары индексов $n, m$, таких что $n \geqslant m \geqslant 0$, справедливо равенство $a_{n+m} + a_{n-m} = 2(a_n + a_m)$.

**3.** Решите неравенство

$$x^{\log_3 \sqrt{x}} > 9.$$

**4.** Решите уравнение

$$\cos 3x + 2\sin 2x + 2\cos x = 0.$$

**5.** В остроугольном треугольнике $ABC$ проведены высоты $AF$, $BD$ и $CE$. Найдите все возможные значения разности углов $\angle A$ и $\angle B$ треугольника, если известно, что $DE : EF = BC : AC$.

**6.** Положительные числа $a$, $b$, $c$ удовлетворяют соотношению

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = 1.$$

Найдите наибольшее возможное значение выражения $\dfrac{a}{2+a^2} + \dfrac{b}{2+b^2} + \dfrac{c}{2+c^2}$.

**7.** В правильной треугольной пирамиде $ABCS$ проведено сечение через ребро основания $AB$ перпендикулярно боковому ребру $CS$. Найдите его площадь, если известно, что площадь основания пирамиды равна 3, а площадь каждой боковой грани равна $\sqrt{5}$.

Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

*июль–август 2023 года*

ВАРИАНТ 233

**1.** Найдите целое число, задающееся выражением $\dfrac{3}{\sqrt[4]{16}} + \dfrac{5}{\sqrt[3]{27}} + \dfrac{11}{\sqrt{36}}$.

**2.** Последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots$ получается из последовательности натуральных чисел вычёркиванием всех полных квадратов (то есть $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$, $a_4 = 6$, $a_5 = 7$, $a_6 = 8$, $a_7 = 10$ и т.д.). Найдите $a_{2023}$.

**3.** Решите неравенство

$$\log_{\sqrt{3-x}} (3+x) \leqslant 2.$$

**4.** Решите уравнение

$$\cos^4 x - \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right).$$

**5.** Прямая $\ell$ касается окружности, описанной около треугольника $ABC$, в точке $A$. Известно, что $AB > AC$ и что $AC = 1$. На стороне $AB$ отмечена точка $D$ так, что $AD = AC$. Прямая, проходящая через точку $D$ и через центр окружности, вписанной в треугольник $ABC$, пересекает прямую $\ell$ в точке $E$. Найдите длину отрезка $AE$.

**6.** Положительные числа $a$, $b$, $c$ удовлетворяют соотношению

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

Найдите наибольшее возможное значение выражения $ab + bc\sqrt{3}$.

**7.** Найдите объём правильной четырёхугольной пирамиды со стороной основания равной 1, если известно, что плоские углы при вершине равны углам наклона боковых рёбер к плоскости основания.

Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

*июль–август 2023 года*

ВАРИАНТ 234

**1.** Найдите $f\left(\frac{3}{5}\right)$, если $f(x) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{\frac{8}{3} + \frac{1}{x^2}}$.

**2.** Дана последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots$ действительных чисел. Найдите $a_1$, если известно, что $a_8 = 8$ и что для любого индекса $n$ справедливо равенство

$$a_{n+1} = \sqrt[7]{2}\,a_n + \left(\sqrt[7]{2} - 1\right)n - 1.$$

**3.** Решите неравенство

$$\left(\sqrt{x}\right)^{3+\log_3 x} \geqslant 3^{1+\log_3 x}.$$

**4.** Решите уравнение

$$\frac{\sqrt{3}}{\sin x} - \frac{1}{\cos x} = 4.$$

**5.** На сторонах $AB$, $BC$, $CD$, $AD$ вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ отмечены соответственно точки $E$, $F$, $G$, $H$. Известно, что $AE = EB$, $2BF = FC$, $CG = GD$, $DH = 2HA$ и что площадь четырёхугольника $ABCD$ в два раза больше площади четырёхугольника $EFGH$. Найдите отношение $AC : BD$.

**6.** Найдите наименьшее возможное значение выражения

$$\frac{c-b}{a+2b+c} + \frac{2b}{a+b+2c} - \frac{4c}{a+b+3c}$$

при положительных $a$, $b$, $c$.

**7.** Расстояния от (внутренней) диагонали прямоугольного параллелепипеда до его рёбер, не имеющих с этой диагональю общих точек, равны $\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sqrt{\frac{6}{5}}$. Найдите объём этого параллелепипеда.

Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

*июль–август 2023 года*

ВАРИАНТ 235

**1.** Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением $\dfrac{\dfrac{\sqrt{64}}{5}+\dfrac{\sqrt[3]{64}}{3}}{\dfrac{\sqrt{64}}{5}-\dfrac{\sqrt[3]{64}}{3}}$.

**2.** Последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots$ действительных чисел определяется равенствами

$$a_1 = 0, \qquad a_n = \left(1+\sqrt{n}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}\right). \quad (n \geqslant 2).$$

Найдите $a_{2023}$.

**3.** Решите неравенство

$$\left(3x^2-3x+1\right)^{x^2-3x} \leqslant 1.$$

**4.** Решите уравнение

$$\cos^2 x+\sqrt{3}\sin^2 x = \left(1+\sqrt{3}\right)\left(\cos x-\cos x\sin x+\sin x\right).$$

**5.** В остроугольном треугольнике $ABC$ проведены высоты $BD$ и $CE$. На $DE$ как на диаметре построена окружность. Эта окружность пересекает отрезки $AE$ и $AD$ в точках $F$ и $G$ соответственно. Найдите длину отрезка $FG$, если известно, что $BC = 25$, $BD = 20$ и $BE = 7$.

**6.** Найдите все значения параметра $k$, при которых неравенство

$$a^3+b^3+c^3+6 \geqslant k(a+b+c)$$

справедливо для всех действительных $a$, $b$, $c$, таких что $a \geqslant -2$, $b \geqslant -2$, $c \geqslant -2$.

**7.** Плоские углы при вершине правильной четырёхугольной пирамиды равны 30°. Найдите длину ребра основания пирамиды, если известно, что радиус сферы, вписанной в эту пирамиду, равен 1.

Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

*июль–август 2023 года*

ВАРИАНТ 236

**1.** Найдите $f\left(\frac{1}{2}\right)$, если $f(x) = \left(\sqrt{x+1} + \sqrt{\frac{2}{3}}\right)\left(\sqrt{5x-1} - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

**2.** Найдите четыре числа $a$, $b$, $c$, $d$, если известно, что они образуют возрастающую геометрическую прогрессию, что $a + d = 28$ и что $b + c = 12$.

**3.** Решите неравенство

$$\log_x \log_3 \left(2^x - 1\right) \geqslant 0.$$

**4.** Решите уравнение

$$2\cos 2x + \frac{\cos x - \cos 3x}{\cos x + \cos 3x} = 2.$$

**5.** Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. На его диагонали $AC$ отмечена точка $E$, а на продолжении этой диагонали за точку $C$ отмечена точка $F$ таким образом, что $\angle ADE = \angle CBF$. Найдите угол $\angle CDF$, если известно, что $\angle ABE = 15°$.

**6.** Положительные числа $a$, $b$, $c$ удовлетворяют соотношению

$$a\sqrt{bc} + b\sqrt{ca} + c\sqrt{ab} = 1.$$

Найдите наименьшее возможное значение выражения $a + b + c$.

**7.** Дан куб с ребром 1, нижним основанием $ABCD$ и боковыми ребрами $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$, $DD_1$. На ребрах $A_1D_1$, $BB_1$, $CC_1$, $AD$ отмечены соответственно точки $K$, $L$, $M$, $N$, так что $A_1K = KD_1$, $BL : LB_1 = 7 : 1$, $CM : MC_1 = DN : NA = 4 : 3$. Найдите площадь сечения тетраэдра $KLMN$, параллельного ребрам $KL$ и $MN$, имеющего форму ромба.

Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

*июль–август 2023 года*

ВАРИАНТ 237

**1.** Известно, что $x : y = 19 : 17$. Найдите $\dfrac{x+y}{x-y}$.

**2.** Возрастающая геометрическая прогрессия $a_1, a_2, a_3, \ldots$ удовлетворяет условиям $a_3 - a_1 = 3$, $a_7 - a_3 = 60$. Найдите сумму первых семи членов этой прогрессии.

**3.** Решите неравенство

$$\log_{x^2-1}(x-1) \geqslant \log_{x^2-1}\sqrt{\frac{x^2}{2}+1}.$$

**4.** Решите уравнение

$$\frac{\operatorname{tg} 2x + 2\cos x}{\operatorname{tg} 2x - 2\cos x} = 0.$$

**5.** Вписанная в прямоугольный треугольник $ABC$ окружность касается катетов $AC$ и $BC$ в точках $D$ и $F$. Найдите $\sin\angle CBD$, если известно, что $\sin\angle CAF = 1/\sqrt{10}$.

**6.** Действительные числа $a$, $b$, $c$ удовлетворяют соотношению

$$abc = (a-1)(b-1)(c-1).$$

Найдите наименьшее возможное значение выражения $a^2 + b^2 + c^2$.

**7.** Ребро основания правильной треугольной пирамиды равно $\sqrt{6}$, высота пирамиды равна $\sqrt{7}$. Плоскость $\pi$ перпендикулярна одному из рёбер пирамиды и делит его в отношении $1 : 2$, считая от вершины. Найдите отношение, в котором плоскость $\pi$ делит объём пирамиды.

Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

*июль–август 2023 года*

ВАРИАНТ 238

**1.** Найдите $f\left(\dfrac{9}{4}\right)$, если известно, что $f(x) = \dfrac{2}{x-3} + \dfrac{3}{x-2}$.

**2.** Чему равна сумма выражений $\sqrt{2023+t^2}$ и $\sqrt{999+t^2}$, если их разность равна 8?

**3.** Решите уравнение $\sqrt{3}\cos x - \sqrt{2}\cos 2x - \sqrt{3}\sin x = 0$.

**4.** Решите уравнение $\left|\log_3^2 x - \log_{2x}^2 2\right| = \log_3^2 x + \log_{2x}^2 2 - 2$.

**5.** Из точки $E$ пересечения диагоналей $AC$ и $BD$ вписанного четырёхугольника $ABCD$ опущены перпендикуляры $EK$, $EL$, $EM$, $EN$ на его стороны $AB$, $BC$, $CD$, $AD$ соответственно, причём основания перпендикуляров принадлежат соответствующим сторонам. Найдите площадь четырёхугольника $KLMN$, если известно, что $KL = 5$, $MN = 3$, а расстояние от точки $E$ до прямой $LM$ равно $\sqrt{3}$.

**6.** Действительные числа $a$, $b$, $c$ удовлетворяют неравенствам $0 < a < 1$, $0 < b < 1$, $0 < c < 1$. Найдите наибольшее возможное значение выражения

$$\sqrt[4]{a(1-b)} + \sqrt[4]{b(1-c)} + \sqrt[4]{c(1-a)}.$$

**7.** Пересечение плоскости и правильной треугольной пирамиды является квадратом со стороной 1. Найдите длину ребра основания пирамиды, если известно, что двугранный угол между плоскостью боковой грани и плоскостью основания равен $\arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$.